НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини, її властивості

Випадкову величину називають ***неперервною***, якщо множина її можливих значень є проміжком, скінченим чи нескінченим. Задати неперервну випадкову величину таблично неможливо, тому застосовуються аналітичний та графічний способи.

Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини $F(x)=P(X<x)$ є неперервною, диференційовною майже скрізь, за винятком можливо окремих ізольованих точок. До властивостей інтегральної функції, що були перелічені вище, приєднуються ще деякі властивості, а саме:

1. Ймовірність того, що неперервна величина X набуває якого-небудь значення x_1, дорівнює нулю: $P(X=x_1)=0$.

2. Для неперервної випадкової величини X при будь-яких a й b, $a<b$, справджуються рівності:

$$P(a \le X \le b)=P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

Щільність розподілу неперервної випадкової величини

Оскільки інтегральна функція неперервної величини є диференційовною функцією, можна розглядати її похідну, яку позначають $f(x)$ і називають ***щільністю розподілу неперервної величини***:

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Графік $f(x)$ називається кривою розподілу. Щільність розподілу має такі властивості:

1. $f(x)\geq 0$ для будь-якого $x\in R$;

2. Ймовірність того, що неперервна величина прийме значення з інтервалу (a,b): $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$;

3. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $x\in R$;

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$.

Зразки розв'язування задач

1. Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ ax^2, & 0<x\leq 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Обчислити значення параметра a, щільність $f(x)$ та ймовірність того, що випадкова величина набуває значень з інтервалу $\left(0,\frac{2}{3}\right)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

Розв'язання. Знайдемо $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 2ax, & 0<x\leq 2\\ 0, & x>2.\end{cases}$

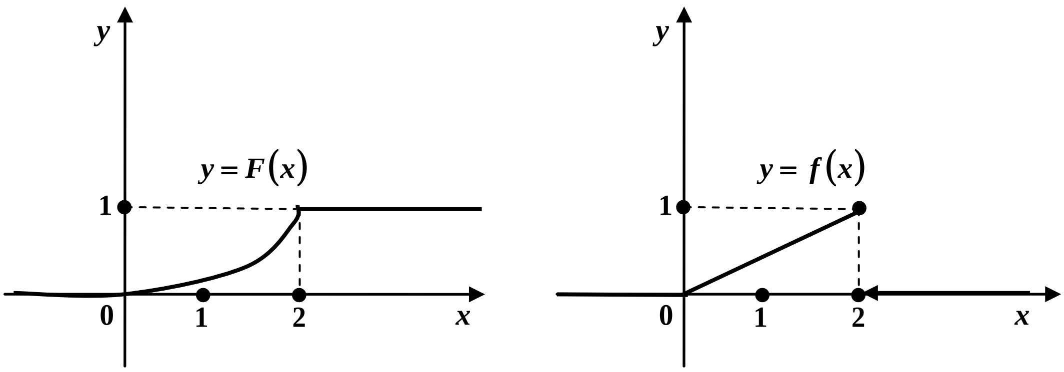
Значення параметра a обчислимо, користуючись властивістю $f(x)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} 2axdx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = 2a\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 4a = 1.$$

Звідки $a = \frac{1}{4}$.

Отже, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ або } x > 2 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \le 2. \end{cases}$

Графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$:



$$P\left(0 < X < \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F(0) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} - 0 = \frac{1}{9}.$$

2. Задано щільність розподілу випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \text{ або } x > 3 \\ x - \frac{3}{4}, & -1 < x \le 3. \end{cases}$$

Визначити функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання. Розглянемо $x \le -1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Якщо $-1 < x \le 3$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x}\left(t - \frac{3}{4}\right)dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3t}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{x} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{5}{4}.$$

При $x > 3$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)dt + \int_{3}^{x} 0dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3t}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= \left(\frac{3^2}{2} - \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = 4 - 3 = 1.$$

Отже, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{4} - \dfrac{5}{4}, & -1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

3. Щільність розподілу випадкової величини X задано функцією $f(x) = \dfrac{a}{1 + x^2}$. Визначити значення параметра a та знайти ймовірність того, що $X \in [-1,1]$.

Розв'язання. Знайдемо a, користуючись тим, що $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+t^2}dt = a\left(\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{dt}{1+t^2} + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{\beta}\frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= a\left(\lim_{\alpha\to-\infty} arctg\, t\Big|_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta\to+\infty} arctg\, t\Big|_{0}^{\beta}\right) = a\left(\lim_{\alpha\to-\infty}(arctg 0 - arctg\, \alpha) +\right.$$

$$\left. + \lim_{\beta\to+\infty}(arctg\, \beta - arctg 0)\right) = a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a\pi = 1.$$

Звідки $a = \dfrac{1}{\pi}$.

Тоді $P(-1 \le X \le 1) = \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} arctg\, x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}(arctg 1 - arctg(-1)) =$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}.$$

Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичне сподівання неперервної випадкової величини із щільністю $f(x)$ обчислюється за формулою

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

(за умови абсолютної збіжності вказаного невласного інтеграла).

Дисперсія неперервної величини – це, як і раніше, математичне сподівання величини $(X-M(x))^2$.

Отже, $D(X)=M(X-M(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx=$

$$=M(X)^2-M^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Усі властивості числових характеристик неперервних випадкових величин співпадають з властивостями числових характеристик дискретних величин.

Зразки розв'язування задач

1. Задано функцію розподілу випадкової величини

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Визначити числові характеристики цієї величини. Знайти ймовірність попадання X в інтервалі $(1,3)$.

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\ \text{або}\ x>2\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2.\end{cases}$$

Тоді $M(X)=\int\limits_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$,

$$D(X)=\int\limits_0^2 x^2\cdot\frac{x}{2}dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2-\frac{16}{9}=\frac{16}{8}-1\frac{7}{9}=2-1\frac{7}{9}=\frac{2}{9},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47.$$

$$P(1<X<3)=F(3)-F(1)=1-\frac{1^2}{4}=\frac{3}{4}.$$

2. Задано щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\ \text{або}\ x>\pi\\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0<x\le \pi.\end{cases}$$

Знайти числові характеристики величини та ймовірність попадання в інтервал $\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$.

Розв'язання. Обчислимо математичне сподівання:

$$M(X)=\int\limits_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{2}dx=\begin{vmatrix}u=x; & du=dx\\ dv=\sin x dx; & V=-\cos x\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\cos x\Big|_0^\pi-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^\pi-\cos x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(-\pi\cos\pi+\sin x\Big|_0^\pi\right)=\frac{\pi}{2}\approx\frac{3{,}14}{2}\approx 1{,}57.$$

$$D(X)=\int\limits_0^\pi x^2\cdot\frac{\sin x}{2}dx-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\begin{vmatrix}u=\dfrac{x^2}{2}; & du=xdx\\ dv=\sin x dx; & v=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cdot\cos x\Big|_0^\pi-\int\limits_0^\pi-\cos x\cdot xdx-\frac{\pi^2}{4}=-\frac{\pi^2}{2}\cdot(-1)+\int\limits_0^\pi x\cos xdx-\frac{\pi^2}{4}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\begin{vmatrix}u=x; & du=dx\\ dv=\cos x dx; & V=\sin x\end{vmatrix}=\frac{\pi^2}{4}+x\cdot\sin x\Big|_0^\pi-\int\limits_0^\pi\sin xdx=\frac{\pi^2}{4}+\cos x\Big|_0^\pi=$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx \frac{(3{,}14)^2}{4} - 2 \approx 0{,}46.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}68.$$

$$P\left(\frac{\pi}{2} < X < 2\pi\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{2}dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0dx = -\frac{\cos x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -\frac{\cos \pi}{2} + \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Деякі закони розподілу неперервних випадкових величин та їх числові характеристики

Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина має рівномірний розподіл на проміжку $[a,b]$, якщо щільність розподілу є стала величина на цьому проміжку і дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \text{ або } x > b \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \le b, \end{cases}$$

де a,b - параметри розподілу.

Інтегральна функція розподілу має вигляд $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases}$

Числові характеристики рівномірного розподілу:

$M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}$.

Ймовірність попадання в інтервал (α, β) дорівнює:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Показниковий розподіл

Неперервна випадкова величина має показниковий розподіл, якщо її щільність розподілу ймовірностей дорівнює

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\end{cases}$$

де $\lambda>0$ - параметр.

Інтегральна функція розподілу має вигляд $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$

Показниковий закон має наступні числові характеристики:

$M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Цей закон застосовується в багатьох задачах теорії масового обслуговування, наприклад, в задачах про час безвідмовної роботи пристроїв.

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса)

Неперервна випадкова величина має нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу дорівнює $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де $a,\sigma>0$ - параметри.

Графік функції $f(x)$ називається кривою нормального розподілу.

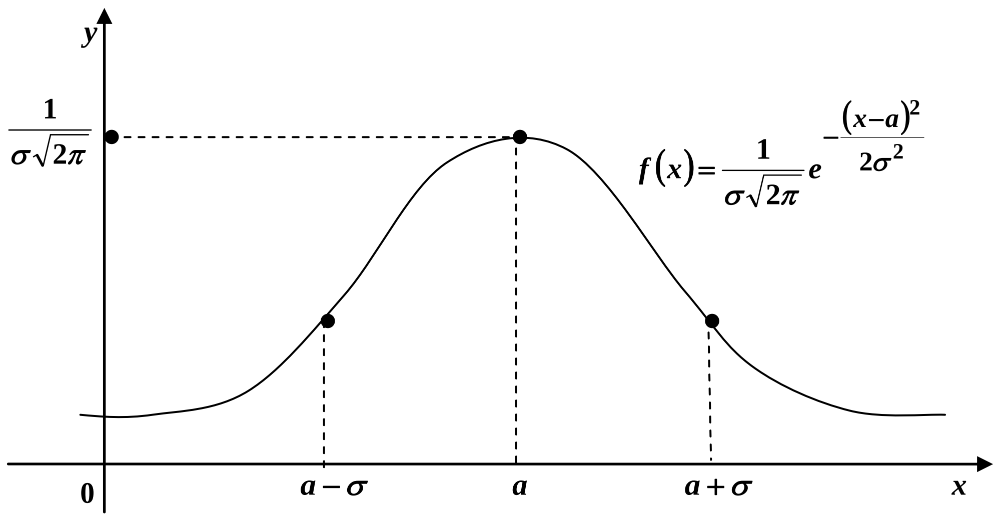


Рис. .1

Нормальна крива симетрична відносно прямої $x=a$, має максимум при $x=a$, що дорівнює $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. У точках $x_1=a-\sigma$, $x_2=a+\sigma$ крива має перегини. При $x\to\pm\infty$ крива наближається до вісі $0x$. Якщо σ зростає, максимум зменшується, інтервал $(a-\sigma, a+\sigma)$ збільшується, крива стає більш розтягнутою вздовж $0x$.

Інтегральна функція нормального розподілу має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt.$$

Числові характеристики нормального розподілу:

$M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$, $\sigma(X)=\sigma$.

Отже, параметр a є математичне сподівання, а σ - середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини.

Ймовірність попадання в інтервал (α,β) дорівнює

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функція Лапласа, значення якої містяться у таблиці.

Досить часто треба обчислити ймовірність того, що нормально розподілена величина X відхилиться від свого математичного сподівання a на величину менш ніж ε, а саме

$$P(|x-a|<\varepsilon)=P(a-\varepsilon<X<a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Якщо в цій формулі покласти $\varepsilon=\sigma t$, здобудемо $P(|x-a|<\sigma t)=2\Phi(t)$.

Розглянув різні значення t, отримаємо:

при $t=1$ $\quad P(|x-a|<\sigma)=2\Phi(1)\approx 0{,}6837$;

при $t=2$ $\quad P(|x-a|<2\sigma)=2\Phi(2)\approx 0{,}9545$;

при $t=3$ $\quad P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973$.

В останньому рівнянні ймовірність дуже близька до одиниці, тому подія $|x-a|<3\sigma$ є майже вірогідною. Звідси випливає «правило 3σ», згідно з яким практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини знаходяться в інтервалі $(a-3\sigma, a+3\sigma)$. Це правило часто використовується в математичній статистиці.

Розглянутий нормальний закон відіграє в теорії ймовірностей важливу роль. Це пояснюється тим, що при деяких припущеннях розподіл суми великого числа випадкових величин виявляється близьким до нормального розподілу.

Зразки розв'язування задач

1. Значення рівномірно розподіленої випадкової величини належать проміжку $[2,8]$. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та ймовірність попадання у проміжок $[3,5]$.

Розв'язання. Оскільки параметри розподілу $a=2$, $b=8$, то

$$M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{2+8}{2}=5;$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(8-2)^2}{12}=\frac{36}{12}=3;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{3}\approx 1{,}73;$$

$$P(\alpha \le X \le \beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}, \text{ тому}$$

$$P(3 \le X \le 5)=\frac{5-3}{8-2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

2. Хвилинна стрілка електронного годинника переміщується стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більш ніж на 20 секунд.

Розв'язання. Різницю між дійсним часом та часом на годиннику можна вважати випадковою величиною X, що рівномірно розподілена у інтервалі протягом $b-a=60$ сек. Щільність розподілу $f(x)=\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{60}$.

Тоді $P(0 \le X \le 20) = \int\limits_0^{20} f(x)dx = \int\limits_0^{20} \frac{1}{60}dx = \frac{x}{60}\Big|_0^{20} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

3. Час безвідмовної роботи приладу – випадкова величина X, що задана щільністю розподілу ймовірностей $f(t) = 0{,}08e^{-0{,}08t}, t > 0$. Знайти: а) середній час безвідмовної роботи приладу; б) ймовірність безвідмовної роботи приладу протягом 4 годин; в) ймовірність відмови приладу в інтервалі часу $(4{,}20)$ годин.

Розв'язання. а) Середній час безвідмовної роботи приладу є математичним сподіванням величини X. З вигляду щільності розподілу ймовірностей випливає, що X розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 0{,}08$. Отже, $M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5$ год.

б) Ймовірність безвідмовної роботи приладу знайдемо за формулою

$$P(X \ge t) = 1 - P(X < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

При $\lambda = 0{,}08$, $t = 4$ маємо $P(X \ge 4) = e^{-0{,}08 \cdot 4} = e^{-0{,}32} \approx 0{,}726$.

в) Щоб знайти ймовірність відмови приладу в інтервалі часу $(4{,}20)$, знайдемо спочатку ймовірність протилежної події, того, що прилад працює безвідмовно $P(4 < X < 20) = F(20) - F(4) = e^{-0{,}32} - e^{-1{,}6} \approx 0{,}524$.

Тоді ймовірність відмови приладу в цьому інтервалі $P = 1 - P(4 < X < 20) = 1 - 0{,}524 = 0{,}476$.

4. Середній час безвідмовної роботи приладу складає 750 годин. Яка ймовірність того, що прилад безперервно пропрацює не менш ніж 1000 годин?

Розв'язання. Час безвідмовної роботи приладу є випадкова величина T, що розподілена за показниковим законом $F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$, де $\lambda -$ параметр розподілу, а саме число відмов за одиницю часу.

Середній час безвідмовної роботи приладу – це математичне сподівання випадкової величини. З тексту задачі $M(X) = 750$ год. Оскільки $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ для показникового розподілу, то $\lambda = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{750}$.

Обчислимо $P(T \ge 1000) = 1 - P(T < 1000) = 1 - F(1000) =$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1000}{750}}\right) = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0{,}274.$$

5. Випадкова величина розподілена нормально з параметрами $a = 5$, $\sigma = 2$. Знайти: а) ймовірність попадання X в інтервал $(4{,}7)$; б) ймовірність того, що X прийме значення більше 10; в) інтервал такий, що ймовірність $P(|X - a| < \varepsilon) = 0{,}95$; г) ймовірність того, що $|X - a| < 0{,}1$; д) ймовірність того, що три навмання узятих можливих значення мають модуль відхилення від математичного сподівання не більш ніж 3; є) ймовірність того, що у чотирьох незалежних випробуваннях X хоча б один раз прийме значення з інтервалу $(4{,}7)$; ж) сформулювати «правило 3σ» для цієї випадкової величини.

Розв'язання. а) За формулою $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ маємо $P(4 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(1) + \Phi(0{,}5) =$ $= 0{,}3413 + 0{,}1915 = 0{,}5328$.

б) $P(10 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{10-5}{2}\right) = 0{,}5 - 0{,}4938 = 0{,}0062$.

в) За формулою $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$ маємо $P(|X - 5| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) =$ $= 0{,}95$, звідки $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0{,}475$, $\frac{\varepsilon}{2} = 1{,}96$, $\varepsilon = 3{,}92$.

Тоді $|X - 5| < 3{,}92$; $\quad -3{,}92 < X - 5 < 3{,}92$, $\quad 1{,}08 < X < 8{,}92$.

г) Обчислимо ймовірність попадання X в інтервал $|X - 5| \le 3$ при одному випробуванні $P(|X - 5| \le 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}8664$. Якщо розглянути 3 можливих значення, то ймовірність буде $(0{,}8664)^3 = 0{,}6504$.

є) Вище була знайдена ймовірність попадання в інтервал $(4{,}7)$ при одному випробуванні, вона дорівнює $0{,}5328$. Ймовірність того, що X не прийме значення з цього інтервалу при одному випробуванні, дорівнює

$\left(1-0{,}5328\right)=0{,}4672$, а при чотирьох випробуваннях $\left(0{,}4672\right)^4=0{,}0476$. Звідки ймовірність, яку ми розшукуємо, дорівнює $\left(1-0{,}0476\right)=0{,}9524$.

ж) Згідно з «правилом 3σ» майже вірогідно, що X здобуде значення з інтервалу $\left(a-3\sigma,\ \ a+3\sigma\right)=\left(5-3\cdot 2;\ \ 5+3\cdot 2\right)=\left(-1{,}11\right)$.

6. Фірма, що займається продажем товарів за каталогом, щомісячно отримує поштою замовлення. Число цих замовлень є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 560. У 90% випадків число щомісячних замовлень перевищує 12439. Знайти середнє число замовлень, що отримуються фірмою за місяць.

Розв'язання. Середнє число замовлень є математичним сподіванням випадкової величини a . За формулою $P\left(\alpha<X<\beta\right)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ маємо

$$P\left(12439<X<+\infty\right)=\Phi\left(+\infty\right)-\Phi\left(\frac{12439-a}{560}\right)=0{,}9;$$

$$0{,}5-\Phi\left(\frac{12439-a}{560}\right)=0{,}9;$$

$$\Phi\left(\frac{a-12439}{560}\right)=0{,}4.$$

Із таблиці $\dfrac{a-12439}{560}=1{,}282$, тоді $a=13157$.

7. За статистичними даними річний дохід населення міста N має нормальний розподіл із середнім значенням 3 тис. грн. та середнім квадратичним відхиленням 1 тис. грн. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний житель міста має дохід: а) від 2,5 до 4 тис. грн.; б) менше 6 тис. грн.

Розв'язання. а) $a=3,\sigma=1$.

За формулою $P\left(\alpha<X<\beta\right)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ маємо

$$P\left(2{,}5<X<4\right)=\Phi\left(\frac{4-3}{1}\right)-\Phi\left(\frac{2{,}5-3}{1}\right)=\Phi\left(1\right)-\Phi\left(-0{,}5\right)=\Phi\left(1\right)+\Phi\left(0{,}5\right)=$$

$= \mathbf{0{,}3413 + 0{,}1915 = 0{,}5328}$.

б) За правилом трьох сигм дістанемо $\boldsymbol{P(0 < X < 6) = P(|X - 3| < 3) =}$ $\boldsymbol{= P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0{,}9973}$, тобто практично вірогідним є те, що дохід жителя менше 6 тис. грн.

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Ф (x)	x	Ф (x)	x	Ф (x)	x	Ф (x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997