ЛЕКЦІЯ 1. ЛОГІЧНІ ОСНОВИ МП-СИСТЕМ.

План.

- Елементи алгебри логіки.
- Логічні операції.
- Логічні елементи МП-систем. Класифікація.

Елементи алгебри логіки

Для математичного опису роботи МП-пристроїв, синтезу і аналізу схем широко використовується ***алгебра логіки*** (алгебра висловлювань, булева алгебра [Джордж Буль – англійський математик в середині XIX століття створив математичний апарат алгебри висловлювань, заклавши тим самим основи для розробки комп'ютерів]). Предметом розгляду алгебри логіки є ***висловлювання*** (вивчається в дискретній математиці і математичній логіці).

Основні положення булевої алгебри

Двійковими (булевими) змінними $x_1, x_2, \ldots x_n$ називаються змінні, які можуть приймати тільки два значення: нуль і одиниця

$$x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Сукупність значень таких змінних називають набором. Десятковий еквівалент двійкового набору називається номером набору.

Двійковою (булевою) логічною функцією двійкових змінних $x_1, x_2, \ldots x_n$ називається функция $F_i(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)$, яка може приймати тільки два значення: нуль і одиниця

$$F_i(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Область визначення булевої функції скінченна, оскільки аргументи функції приймають тільки два значення. Загальна кількість наборів ***n*** двійкових змінних, на яких визначається булева функція, дорівнює 2^n, а загальне число булевих функцій при цьому дорівнює 2^{2^n} . Наприклад, для $n = 4$ загальна кількість наборів $N = 2^4 = 16$. При цьому десяткова нумерація наборів буде від 0 до 15, а сукупність змінних, наприклад $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ означає, що це набір № 9.

Логічна функція вважається повністю визначеною, коли задані всі її значення на всіх наборах аргументів. Таблиця, за допомогою якої задається логічна функція, називається таблицею істинності.

У алгебрі логіки існують дві основні аналітичні форми представлення функцій:

- досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ);
- досконала кон'юнктива нормальна форма (ДКНФ).

Кожна логічна функція має тільки одну ДДНФ і одну ДКНФ.

ДДНФ логічної функції - це диз'юнкція констатуент одиниці (мінтерми) відповідних наборам вхідних змінних, для яких функція рівна одиниці.

ДКНФ логічної функції - це кон'юнкція констатуент нуля (макстерми) відповідних наборам вхідних змінних, для яких функція рівна нулю.

Будь-яку функцію алгебри логіки, крім функції $f = 0$, можна записати у вигляді формули через кон'юнкцію, диз'юнкцію і інверсію

$$F_i = f(x_1 x_2 \ldots x_n) = \cup(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n), \qquad (1)$$

де $\tilde{x}_i$ - загальне позначення для аргументу x і його інверсії $\overline{x}$.

Логічне додавання у виразі (1) ведеться для тих наборів, для яких $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1$. Зображення логічної функції у формі (1) називається досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ).

Можливе інше зображення логічної функції, яке називається досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ).

$$F_i = f(x_1 x_2 \ldots x_n) = \cap(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{x}_n). \qquad (2)$$

Логічне множення у виразі (2) ведеться для тих наборів, для яких $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$.

У загальному випадку ДДНФ або ДКНФ можна представити за допомогою таблиці істинності, яка описує функцію, наприклад $f(x_1 x_2 x_3)$.

Значення аргументу			Значення функції f	ДДНФ	ДКНФ
x_3	x_2	x_1		мінтерм	макстерм
0	0	0	0	---	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	1	1	$x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$	---
0	1	0	0	---	$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
0	1	1	1	$x_1 x_2 \overline{x_3}$	---
1	0	0	1	$\overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3$	---
1	0	1	0	---	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
1	1	0	0	---	$x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
1	1	1	1	$x_1 x_2 x_3$	---

Таким чином запишемо логічну функцію F у ДННФ та ДКНФ:

$$f_{ДДНФ}(x_1 x_2 x_3) = x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

$$f_{ДКНФ}(x_1 x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

У процесі перетворення логічних виразів ДКНФ використовують рідше за ДДНФ.

$f(x_1, x_2, x_3) = 01011100$.

Це означає, що функція задається рядком своїх значень в порядку зростання номера набору незалежних змінних. Для означеної функції можна записати такі вирази для ДДНФ і ДКНФ

$$f(x_1, x_2, x_3)_{ДДНФ} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3, \qquad (3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3)_{ДКНФ} = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1 + \bar{x}_2 + x_3) + \\ + (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3) + (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \qquad (4)$$

Формули (3) і (4) представляють аналітичний варіант задавання логічної функції.

В булевій алгебрі використовують три основних закони: перемісний, сполучний і розподільний (табл. 1).

Таблиця 1

Закон	**Логічне додавання**	**Логічне множення**
Перемісний	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Сполучний	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Розподільний	$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

Застосування цих законів для перетворення формул логічних функцій малоефективне, тому використовується цілий ряд додаткових правил і співвідношень (табл. 2)

Таблиця 2

Правило	**Логічне додавання**	**Логічне множення**
Теорема де-Моргана	$\overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$	$\overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y}$
Інверсії	$\bar{0}=1,$	$\bar{1}=0$
Операції з константами 0 і 1	$x+0=x;\;\; x+1=1$	$x\cdot 0=0;\;\; x\cdot 1=x$
Повторення	$x+x=x$	$x\cdot x=x$
Доповняльності	$x+\bar{x}=1$	$x\cdot\bar{x}=0$
Склеювання	$x\cdot y+x\cdot\bar{y}=x$	$(x+y)(x+\bar{y})=x$
Поглинання	$x+x\cdot y=x$	$x\cdot(x+y)=x$
Подвійної інверсії	$\bar{\bar{x}}=x$	$\bar{\bar{x}}=x$
	$x+\bar{x}y=x+y$ $\bar{x}+xy=\bar{x}+y$	

Використовуючи вказані закони і правила, спростимо вирази для означених форм (3) і (4).

Для першого виразу отримаємо

$$f(x_1,x_2,x_3)_{ДДНФ}=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2x_3= \\ \bar{x}_1x_3(\bar{x}_2+x_2)+x_1\bar{x}_2(\bar{x}_3+x_3)=\bar{x}_1x_3+x_1\bar{x}_2 \qquad (3)$$

Для другого виразу отримаємо

$$f(x_1,x_2,x_3)_{ДКНФ}=\overline{\overline{f(x_1,x_2,x_3)}}=$$
$$=\overline{\overline{(x_1+x_2+x_3)(x_1+\bar{x}_2+x_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)}}=$$
$$=\overline{\overline{(x_1+x_2+x_3)}+\overline{(x_1+\bar{x}_2+x_3)}+\overline{(\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3)}+\overline{(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)}}= \qquad (4)$$
$$=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1x_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3}=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3(\bar{x}_2+x_2)+x_1x_2(\bar{x}_3+x_3)}=$$
$$=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3+x_1x_2}=\overline{(\bar{x}_1\bar{x}_3)}\,\overline{(x_1x_2)}=(x_1+x_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_2).$$

Таким же чином можуть бути спрощені вирази і для інших варіантів логічних функцій.

Методи мінімізації булевих функцій

Методи мінімізації можуть бути аналітичні або графічні.

Мінімізація логічних функцій

Логічні вирази, що записані в ДДНФ та ДКНФ, не доцільно використовувати для побудови цифрових пристроїв. Схеми, як правило, не оптимальні з погляду їх практичної реалізації. Вони потребують велику кількість логічних елементів, що впливає на швидкодію, надійність, використану потужність, вартість, та інші параметри. При проектуванні цифрових пристроїв бажано виконати мінімізацію булевих функцій для побудови економічних схем. Загальна задача мінімізації полягає в тому, що необхідно знайти аналітичний вираз для булевої функції в формі, яка описується мінімальним числом логічних змінних.

Тому виникає необхідність ***спростити вирази***. Процес спрощення має назву ***мінімізації***. Критерій, відповідно до якого виконують мінімізацію, далеко не однозначний і залежить як від типу задачі, так і від рівня розвитку технології.

Процес побудови цифрового пристрою називають логічним синтезом.

Основними вимогами до задачі синтезу є: мінімальне число елементарних кон’юнкцій або диз’юнкцій у логічній формі й однорідність використовуваних операцій.

Крім вимог мінімізації є ряд обмежень і умов на ***вибір елементної бази для синтезованого пристрою***.

Найпростіші логічні функції (І, АБО, НЕ, І-НЕ, АБО-НЕ)які описують дію пристрою мають назву – **БАЗИС**

Мінімальна форма запису (***МДНФ*** так і ***МКНФ***) логічного виразу описує принцип дії логічної схеми. Існує два методи мінімізації:

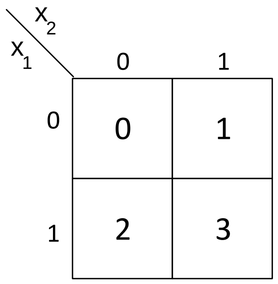
- **метод Квайна – Мак - Класки** (аналітичний метод);
- **метод Карно - Вейча (**графічний метод**)**;

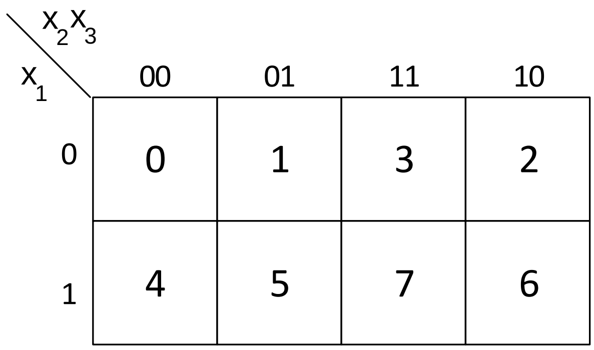
Метод діаграм (карт) Карно

В основу метода покладено зображення булевої функції спеціальними діаграмами (картами) Карно (або Вейча). Еталонні карти Карно для булевих функцій двох, трьох, чотирьох і п’яти змінних зображені на рис. 4.

Кожна клітинка діаграми відповідає набору змінних булевих функцій згідно з таблицею істинності. Карта заповнюється за допомогою таблиці істинності чи логічних виразів ДДНФ або ДКНФ.

В клітку діаграми записується одиниця, якщо булева функція на цьому наборі дорівнює одиниці. Нульові визначення булевих функцій на діаграмі не записуються.





x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

x_1x_2 \ $x_3x_4x_5$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

Карти Карно для функцій двох, трьох, чотирьох і п'яти змінних

Методику мінімізації розглянемо на прикладі булевої функції, заданої виразом (16). Нанесемо дану функцію на карту Карно (рис. 5).

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		

Приклад мінімізації за методом карт Карно

Для запису виразу мінімальної форми необхідно використовувати такі правила.

Всі клітини, в яких записані 1, об'єднують у замкнуті області, які являють собою прямокутники з числом клітин 2^k, де $k = 0, 1, 2…$, і виконують їх склеювання. Після цього записують мінімальний вираз в диз'юнктивній нормальній формі. Охоплюючи клітини карти замкненими областями потрібно прагнути до мінімального числа областей, а кожна область повинна містити якомога більше число клітин.

Для даної функції маємо дві області, кожна з яких містить по дві клітки (k = 1). Тому мінімальна форма для даної функції може бути записана у вигляді

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \qquad (5)$$

що співпадає з виразом (3).

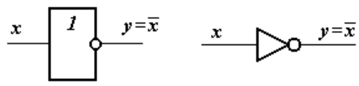
Аналогічно виконується мінімізація для функції чотирьох і п’яти змінних.

Логічні операції

Операція «НЕ» (інверсія, логічне заперечення, NOT). Нехай є деяке висловлювання $\boldsymbol{A}$. Заперечення цього висловлювання позначається $\overline{\boldsymbol{A}}$ (прийнято читати: ***не A***). Якщо висловлювання $\boldsymbol{A}$ правдиве ($\boldsymbol{A}$ = 1), то висловлювання $\overline{\boldsymbol{A}}$ неправдиве ($\overline{\boldsymbol{A}}$ = 0). Якщо висловлювання $\boldsymbol{A}$ неправдиве ($\boldsymbol{A}$ = 0), то висловлювання $\overline{\boldsymbol{A}}$ правдиве ($\overline{\boldsymbol{A}}$ = 1). Отже, для логічного заперечення справедливе таке правило:

$$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$$
$$\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

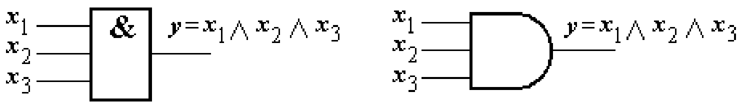
Позначення операції в схемах логічних перетворень:



Операція «І» (кон’юнкція, логічне множення, AND). Операцію логічного множення двох змінних $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ позначають $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ (прийнято читати: $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$). Висловлювання $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ правдиве ($\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ = 1) тільки в тому випадку, якщо одночасно правдиве $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}$ = 1) і правдиве $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{B}$ = 1). У всіх інших випадках це висловлювання неправдиве, тобто $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ = 0. Отже, при логічному множенні справедливе наступне правило:

$$\mathbf{0} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

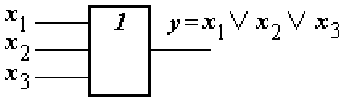
Правило логічного множення справедливе не тільки для двох співмножників, але і для будь-якої їх кількості, тобто $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D} \wedge \ldots$. Позначення операції в схемах логічних перетворень:

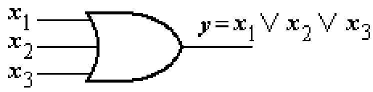


Операція «АБО» (диз’юнкція, логічне додавання, OR). Операцію логічного додавання двох змінних $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ позначають $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ (прийнято читати: $\boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{B}$). Висловлювання $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ правдиве ($\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ = 1) в тому випадку, якщо хоча б одна із змінних $\boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{B}$ має значення правдиве ($\boldsymbol{A}$ = 1 або $\boldsymbol{B}$ = 1). Якщо ж ця умова не виконується, то висловлювання неправдиве ($\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ = 0). Отже, при логічному додаванні справедливе наступне правило:

$$\mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0} \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{1} \vee \mathbf{0} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{1} \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Правило логічного додавання справедливе не тільки для двох доданків, але і для будь-якої їх кількості, тобто $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D} \vee \ldots$. Позначення операції в схемах логічних перетворень:

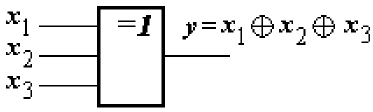


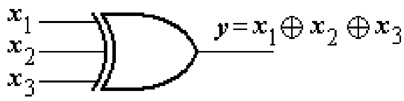


Операція «АБО із виключенням» (додавання за модулем 2, нееквівалентність, XOR (Exclusive OR)***).*** Операція “АБО із виключенням” над двома змінними A і B позначають $A \oplus B$. Висловлювання $A \oplus B$ правдиве ($A \oplus B = 1$) в тому випадку, якщо <u>тільки одна</u> із змінних A або B має значення правдиве ($A = 1$, $B = 0$ або $A = 0$, $B = 1$). Якщо ж ця умова не виконується, то висловлювання неправдиве ($A \oplus B=0$). Перша назва операції зумовлена тим, що результат даної операції збігається із результатом операції «АБО» за виключенням одного із чотирьох випадків – одночасної правдивості аргументів «виключається»). Друга назва – тим, що дійсно є складанням в кільці вирахувань за модулем 2. Третя назва – результат операції правдивий тільки тоді, коли значення операндів не співпадають. Отже, операція “АБО із виключенням” виконується за таким правилом:

$$\mathbf{0 \oplus 0 = 0}$$
$$\mathbf{0 \oplus 1 = 1}$$
$$\mathbf{1 \oplus 0 = 1}$$
$$\mathbf{1 \oplus 1 = 0}$$

Позначення операції в схемах логічних перетворень:





На основі розглянутих логічних висловлювань можна уявити будь-яке складне висловлювання, тобто будь-який логічний зв’язок можна виразити за допомогою логічних операцій додавання, множення і заперечення.

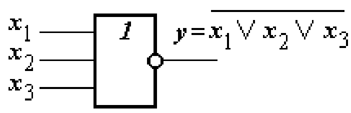
Операції «І», «АБО» і «АБО із виключенням» є не тільки комутативними, але і асоціативними, і тому легко узагальнюються на випадок кількох аргументів.

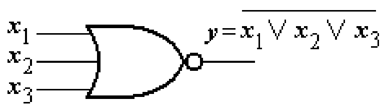
Інші логічні (бінарні, двійкові) операції:

Операція «АБО–НЕ» (стрілка Пірса, NOR) – двомісна логічна операція, введена в розгляд Ч. Пирсом [Чарльз Сандерс Пирс; дата нар. 10.09.1839, американський філософ, логік, математик, основоположник прагматизму і семіотики]. Операцію «АБО–НЕ» над двома змінними A і B позначають $A \downarrow B$. Її результатом є інвертований результат операції «АБО». Операція «АБО–НЕ” виконується за таким правилом:

$$\mathbf{0 \downarrow 0 = 1}$$
$$\mathbf{0 \downarrow 1 = 0}$$
$$\mathbf{1 \downarrow 0 = 0}$$
$$\mathbf{1 \downarrow 1 = 0}$$

Висловлювання $A \downarrow B$ прийнято читати «ні A, ні B». Позначення операції в схемах логічних перетворень:





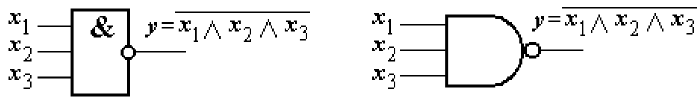
Стрілка Пірсу має ту властивість, що через її одну виражаються всі інші логічні операції. Наприклад, висловлювання $\overline{A}$ (не A) еквівалентно висловлюванню $A \downarrow A$, кон’юнкція $A \wedge B$ висловлювань A і B виражається так: $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$, диз’юнкція

$A \vee B$ еквівалентна $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$.

Операція «І–НЕ» (штрих Шеффера, NAND) [Джонатан Шеффер; нар. в 1957 р. в Торонто, Канада; дослідник теорії ігор] – є результатом інвертування результату операції «І», видає значення 0 тільки коли обидва операнди 1. Операцію «***І–НЕ***» над двома змінними A і B позначають $A \mid B$ і виконуєть за таким правилом:

$$\mathbf{0 \mid 0 = 1}$$
$$\mathbf{0 \mid 1 = 1}$$
$$\mathbf{1 \mid 0 = 1}$$
$$\mathbf{1 \mid 1 = 0}$$

Позначення операції в схемах логічних перетворень:



Операція імплікація («якщо–то»). Операцію «якщо–то» над двома змінними A і B позначають $A \subset B$ (іноді $A \to B$). Результат співпадає з результатом операції «АБО» з інвертованим першим аргументом, видає значення 0 тільки коли перший операнд дорівнює 1 а другий – 0. Дана операція не є комутативною, на відміну від всіх вищеописаних бінарних операцій. Її можна розуміти як арифметичне $\le$ (менше або рівно). Операція «якщо–то” виконується за таким правилом:

$$\mathbf{0 \subset 0 = 1}$$
$$\mathbf{0 \subset 1 = 1}$$
$$\mathbf{1 \subset 0 = 0}$$
$$\mathbf{1 \subset 1 = 1}$$

A – антецедент (передуючий), B –консеквент (подальший). Імплікація неправдива тоді і тільки тоді, коли антецедент правдивий, а консеквент неправдивий. Отже, «з правди не може випливати неправда!».

Операція еквіваленція. Еквіваленцією двох висловлювань A і B називається таке висловлювання, яке правдиве тоді і тільки тоді, коли обидва ці висловлювання A і B правдиві або обидва неправдиві, тобто видає 1 якщо і тільки якщо обидва аргументи рівні між собою. Є результатом інвертування результату операції «АБО із виключенням». Позначають операцію символом «$\Leftrightarrow$». Операція виконується за таким правилом:

$$\mathbf{0 \Leftrightarrow 0 = 1}$$
$$\mathbf{0 \Leftrightarrow 1 = 0}$$
$$\mathbf{1 \Leftrightarrow 0 = 0}$$
$$\mathbf{1 \Leftrightarrow 1 = 1}$$

При розробці вузлів МП-систем значення неправдивого або правдивого висловлювання A, B, C до уваги не приймається; апарат алгебри логіки використовується для виконання заданих логічних перетворень. Наприклад, арифметичні перетворення (складання, віднімання) задаються у вигляді сукупності логічних перетворень над аргументами.

Логічні елементи МП-систем

Електронний елемент МП-систем – це електронна схема, яка являє собою деяку сукупність певним чином з’єднаних деталей або компонентів і що виконує одну або декілька логічних або допоміжних функцій.

За призначенням електронні елементи ділять на логічні, запам’ятовуючі, підсилювально-формуючі, спеціальні.

За способом кодування двійкових змінних електронними сигналами електронні елементи можуть бути імпульсними, потенціальними, імпульсно-потенціальними, фазовими**.**

При імпульсному кодуванні «1» звичайно представляється наявністю імпульсу, а «0» його відсутністю. У потенціальних елементах вхідні і вихідні змінні кодуються різним значенням електричного потенціалу (рівнем сигналів). У імпульсно-потенційних елементах на входи можуть подаватися потенційні сигнали і імпульси. Вихідні інформаційні сигнали мають потенційний характер. У фазових елементах використовують сигнали у вигляді синусоїдальних напруг, а двійкові змінні 1 і 0 кодуються фазою синусоїдальних сигналів.

За функціональним призначенням елементи діляться на аналогові і цифрові. До аналогових елементів відносять елементи, які призначені для перетворення і обробки сигналів, що змінюються безперервно у часі. Такі елементи в МП-системах, як правило, використовуються для отримання і попередньої обробки вхідної інформації і у виконавчих пристроях, керуючих деяким об'єктом, МП-систем. До цифрових відносять елементи, за допомогою яких перетворюються і обробляються сигнали, виражені в двійковому або іншому цифровому коді.

Існують інші класифікації: за технологією виготовлення, за типом основної логічної схеми, за швидкістю і потужністю споживання і ін.

Схеми логічних елементів МП-систем ділять на два класи. До першого класу відносяться схеми, в яких значення вихідних сигналів однозначно визначаються значеннями вхідних сигналів в той же момент часу. Такі схеми називаються ***комбінаційними (або схеми з жорсткою логікою)***. У схемах другого класу ***(схеми з логікою, що програмується)*** вихідні сигнали визначаються не тільки значеннями вхідних сигналів в даний момент часу, але і станом схеми, який залежить від сигналів, поданих на її входи в попередні моменти. Такі схеми на відміну від комбінаційних містять елементи пам'яті – тригери.

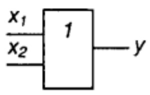
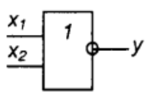
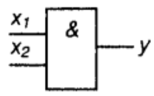
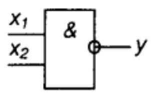
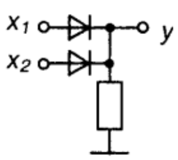
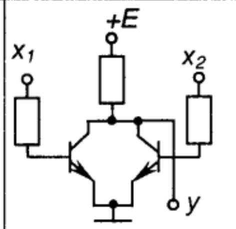
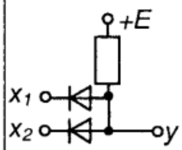
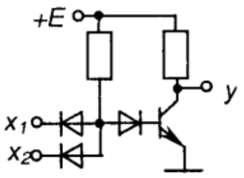
Для опису законів функціонування комбінаційних схем використовується математичний апарат алгебри логіки. Змінні $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ називаються двійковими, якщо вони можуть приймати значення 0 або 1. Функція від двійкових змінних $\boldsymbol{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ ***називається перемикаючою функцією (булевою функцією або функцією алгебри логіки).*** Ця функція, так само як і її аргументи, приймають тільки значення 0 або 1.

Фундаментальне значення в теорії побудови комбінаційних схем має ***основна функціонально повна система***, в яку входять три функції: інверсія, кон'юнкція і диз'юнкція. За допомогою цих трьох функцій можна побудувати логічну функцію будь-якої складності.

Технічним аналогом (технічною реалізацією) перемикаючої функції є комбінаційна схема, що виконує відповідні цій функції перетворення інформації. Напруги, відповідні прийнятому в схемі представленню сигналів 0 і 1, можуть розглядатися як технічні аналоги константи 0 і константи 1.

Елементарні логічні операції над двійковими змінними реалізовуються схемами, званими ***логічними елементами***. Число входів логічного елемента відповідає числу аргументів булевої функції, що відтворюється ним.

Представлення чисел за допомогою електричних сигналів дозволяє конструювати різні електронні логічні схеми. Як правило, є набір типових найпростіших схем, призначених для синтезу будь-яких більш складних схем.

Вхідні змінні		Функція y			
x_1	x_2	АБО	АБО-НІ	І	І-НІ
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0
Математичний запис (формула)		$y = x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2$	$y = \overline{x_1 + x_2}$	$y = x_1 \cdot x_2 = x_1 \wedge x_2$	$y = \overline{x_1 \cdot x_2}$
Назва функції		Логічне додавання (диз'юнкція) – функція АБО	Заперечення логічного додавання (стрілка Пірса) – функція АБО-НІ	Логічне множення (кон'юнкція) – функція І	Заперечення логічного множення (штрих Шеффера) – функція І-НІ
Графічне позначення елемента, що реалізує функцію					
Можлива реалізація		 Резисторно-діодна логіка (РДЛ)	 Резисторно-транзисторна логіка (РТЛ)	 Резисторно-діодна логіка (РДЛ)	 Резисторно-діодно-транзисторна логіка (РДТЛ)

Деякі логічні функції двох змінних

Завдання 1. Згідно з заданим викладачем варіантом запишіть досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ) і досконалу кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ) для логічної функції F чотирьох змінних, яка задана таблицею істинності.

Таблиця істинності для $\mathbf{F_2}$:

Номер набору	X1	X2	X3	X4	$\mathbf{F_2}$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

Для запису ДДНФ використовуємо всі набори, на яких функція дорівнює „1”:

$$F_{\text{ÄÄÍÔ}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2\bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

Для запису ДКНФ використовуємо всі набори, на яких функція дорівнює „0”, активним станом для функції є логічний нуль :

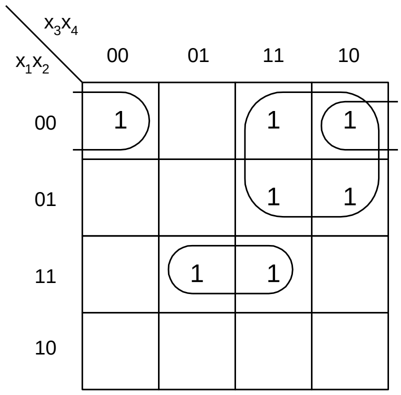
$$F_{\text{ÄÊÍÔ}} = (x_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + x_4)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4)\cdot$$
$$\cdot(\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4)$$

Завдання 2. Використовуючи закони алгебри логіки, спростіть вирази, одержані при виконанні завдання 1.

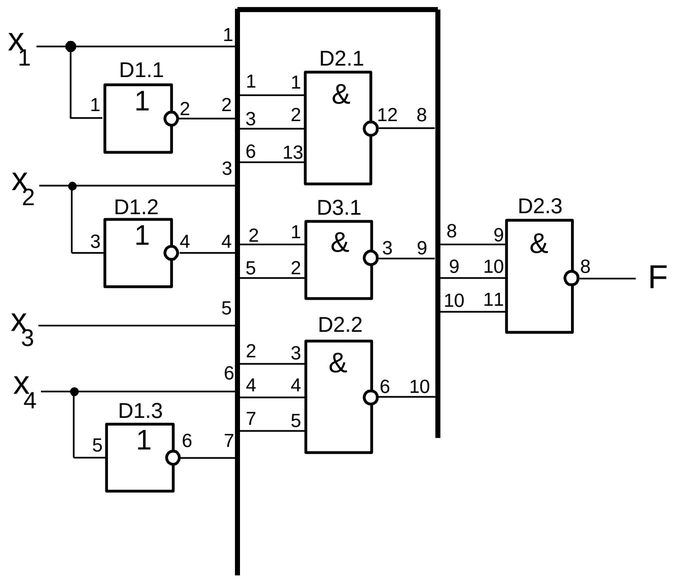
$$F_{\text{ÄÄÍÔ}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2\bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3(\bar{x}_4 + x_4) + \bar{x}_1 x_2 x_3(\overline{x_4} + x_4) + x_1 x_2 x_4(\bar{x}_3 + x_3) + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = = \bar{x}_1 x_3(\bar{x}_2 + x_2) + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 =$$
$$= \bar{x}_1 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1(x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4) + x_1 x_2 x_4 = \bar{x}_1 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$$

$$F_{\text{ÄÊÍÔ}} = \overline{\overline{F_{\text{ÄÊÍÔ}}}} = \overline{\overline{(x_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + x_4)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4)\cdot}}$$
$$\overline{\overline{\cdot(\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4)}} =$$
$$= \overline{\overline{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)} + \overline{(x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + x_4)} + \overline{(x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)} + \overline{(\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4)} +}$$
$$\overline{+ \overline{(\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4)} + \overline{(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4)} + \overline{(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)} + \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 + x_4)} +}$$
$$\overline{+ \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4)}} = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 + x_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 +}$$
$$\overline{+ x_1\bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1 x_2 x_3\bar{x}_4} = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 + x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3\bar{x}_4}$$
$$= \overline{\bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 + x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2 + x_1 x_3\bar{x}_4} = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_3 x} \cdot \overline{x_2\bar{x}_3\bar{x}_4} \cdot \overline{x_1\bar{x}_2} \cdot \overline{x_1 x_3\bar{x}_4} =$$
$$(x_1 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + x_4)$$

Завдання 3. Побудуйте принципову електричну схему логічної функції F чотирьох змінних на логічних елементах малого рівня інтеграції, виконавши мінімізацію логічної функції F методом карт Карно;



$$F = \bar{x}_1 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 = \overline{\overline{\bar{x}_1 x_3} \cdot \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4} \cdot \overline{x_1 x_2 x_4}}$$



D1- К555ЛН1, D2 – К555ЛА4, D3 –К555ЛА3.