Лабораторна робота № 4

Закони розподілу та числові характеристики неперервних випадкових величин

***Мета роботи*:** Використання можливостей пакету Microsoft Excel для розв'язання задач теорії ймовірності з використанням основних законів розподілу неперервних випадкових величин.

Теоретичні відомості

Означення. ***Неперервною випадковою величиною*** *(НВВ)* називають величину, якщо сукупність її можливих значень цілком заповнює деякий проміжок числової осі, який може бути скінченним або нескінченним. Наприклад, випадкова величина X − час безвідмовної роботи приладу є неперервною, оскільки її можливе значення $t > 0$.

Закон розподілу неперервної випадкової величини може бути заданий графічно або аналітично $y = p(x) = f(x)$ (за допомогою формули). Табличне задання неможливе, оскільки ймовірність отримати будь-яке певне значення неперервної величини дорівнює нулеві, що пов'язане не з неможливістю самої події (попадання в певну точку на числовій осі), а з нескінченно великою кількістю можливих випадків.

Тому для неперервних випадкових величин (як, зрештою, і для дискретних) визначають ймовірність попадання в деякий інтервал числової осі.

Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[a, b]$ визначають як ймовірність події $P(a \le X < b)$.

Для кількісної оцінки закону розподілу випадкової величини (дискретної або неперервної) задають ***функцію розподілу ймовірностей випадкової величини,*** яку визначають як імовірність того, що випадкова величина X

прийме значення, менше деякого фіксованого числа x, і позначають $F(x)=P(X<x)$ або $F(x)=P(-\infty<X<x)$.

Функцію розподілу $F(x)$ називають ***інтегральною функцією*** розподілу ймовірностей випадкової величини.

Знаючи функцію розподілу $F(x)$, можна обчислити ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал $[a, b)$:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a). \quad (4.1)$$

Оскільки ймовірність того, що випадкова величина X набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю, тобто $P(X=x_k)=0$, то мають місце рівності

$$P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b).$$

Означення. ***Диференціальною функцією розподілу*** або ***щільністю розподілу ймовірностей*** неперервної випадкової величини називають

$$f(x)=F'(x). \quad (4.2)$$

Теорема. *Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде будь-яке значення з проміжку (a,b) обчислюється за формулою*

$$P\big(X\in(a,b)\big)=\int_a^b f(x)dx. \quad (4.3)$$

Наслідок. Функцію розподілу випадкової величини визначають через її функцію щільності $f(x)$ таким чином:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \quad (4.4)$$

Умову нормування через функцію щільності записують таким чином:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=1.$$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку (a,b), то умова формування має вигляд $\int_a^b f(t)dt=1$.

Числові характеристики неперервних випадкових величин

У випадку неперервних випадкових величин математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення мають такий самий зміст та властивості, як і для дискретних випадкових величин, але обчислюють їх за іншими формулами.

Математичним сподіванням *неперервної випадкової величини X*, яка задана щільністю розподілу $f(x)$, називають

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{4.5}$$

якщо цей інтеграл абсолютно збіжний. Зокрема, якщо можливі значення неперервної випадкової величини *X* належать проміжку $[a,b]$, тоді

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx. \tag{4.6}$$

Для обчислення дисперсії використовувати формули:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2; \tag{4.7}$$

якщо її можливі значення належать відрізку $[a,b]$, тоді

$$D(X)=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx-(M(X))^2. \tag{4.8}$$

Числову характеристику закону розподілу випадкової величини

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)},$$

називають *середньоквадратичним відхиленням* або *стандартним відхиленням.*

Закони неперервних випадкових числових величин та їх числові характеристики

Найчастіше використовуються наступні закони розподілу.

1. ***Рівномірний закон розподілу.*** Розподіл ймовірностей називається ***рівномірним****,* якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення випадкової величини, функція щільності розподілу дорівнює константі.

Випадкова величина X, розподілена рівномірно на проміжку $[a,b]$, має таку функцію щільності розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{4.9}$$

Функція розподілу ймовірностей має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Числові характеристики рівномірного закону:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{4.10}$$

2. ***Показниковий розподіл.*** Випадкову величина X називають розподіленою за ***показниковим*** розподілом, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

де $\lambda > 0$ – параметр розподілу.

Показниковий розподіл задовольняють: час телефонної розмови, час ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп'ютерної мережі.

Якщо випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром λ, тоді

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{4.12}$$

Якщо випадкова величина X розподілена за показниковим розподілом, то її інтегральна функція розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, \quad x<0,\end{cases}$$

відповідно

$$P(a<X<b)=\begin{cases}e^{-a\lambda}-e^{-b\lambda}, & a\ge 0,\\ 1-e^{-b\lambda}, & a<0, \quad b>0,\\ 0, \quad b<0.\end{cases}$$

Графіки диференціальної та інтегральної функцій показникового розподілу зображено на рис. 4.1 а, б.

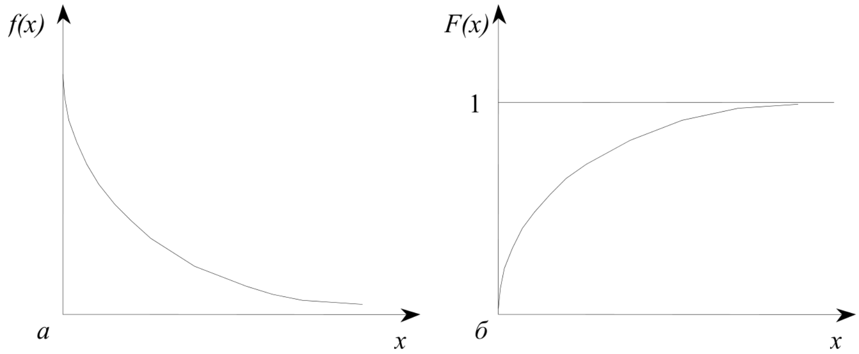


Рис. 4.1. Диференціальна та інтегральна функції показникового розподілу

Показниковий розподіл часто зустрічається в теорії масового обслуговування, теорії надійності. Нехай t – час безвідмовної роботи деякого елемента, а λ – інтенсивність відмов (середнє число відмов за одиницю часу). Тоді час t роботи елемента можна вважати неперервною випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом із функцією розподілу

$$F(x)=p(t<x)=1-e^{-\lambda x} \quad (\lambda>0),$$

яка визначає ймовірність відмови елемента за час, який менший *x*.

Імовірність

$$R(x)=p(t\ge x)=e^{-\lambda x} \tag{4.13}$$

називають ***функцією надійності***, яка визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час *x*.

3. ***Нормальний закон розподілу. Нормально розподіленою*** з параметрами a та σ називається випадкова величина X, функція щільності розподілу якої має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < x < +\infty, \ -\infty < a < +\infty, \ \sigma > 0. \quad (4.14)$$

Підпорядкування випадкової величини X нормальному закону розподілу з параметрами a та σ позначають $N(a;\sigma)$. Графік функції щільності нормального розподілу називають ***кривою Гаусса*** або ***нормальною кривою***. Параметри a та σ впливають на форму кривої розподілу $M(X) = a$ та $D(X) = \sigma^2$, де a та $\sigma -$ параметри розподілу.

Інтегральна функція нормального розподілу має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (4.15)$$

Розподіл $N(0;1)$ називають ***стандартним нормальним розподілом.*** В цьому випадку

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty;$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t}{2}} dt = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{x} e^{-\frac{t}{2}} dt = 0,5 + \Phi(x),$$

де $\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt -$ функція Лапласа.

Графіки функцій щільності ймовірності та розподілу наведено відповідно на рис. 4.2 та рис. 4.3.

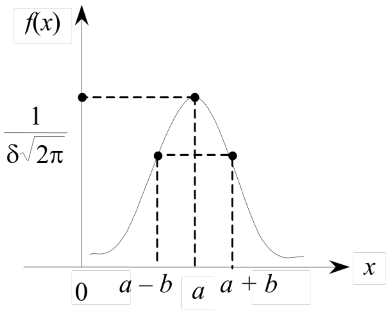


Рис. 4.2. Диференціальна функція нормального розподілу

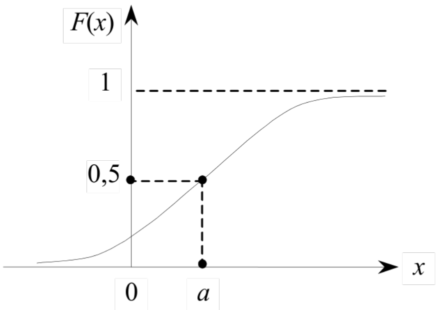


Рис. 4.3. Інтегральна функція нормального розподілу

Імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X прийме значення на проміжку (α, β) визначається за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (4.16)$$

Правило «трьох сигм» для нормального закону. Коли $\delta = 3\sigma,$ то

$$P\left(|x-a| < 3\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973. \quad (4.17)$$

Звідси випливає:

$$P\left(|x-a| > 3\sigma\right) = 1 - P\left(|x-a| < 3\sigma\right) = 1 - 0,9973 = 0,0027,$$

тобто ймовірність того, що внаслідок проведення експерименту випадкова величина *X*, яка має розподіл $N(a;\sigma)$, не потрапить в проміжок $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, дорівнює 0,0027.

Зміст ***«правила** 3σ **»***: *практично достовірно, що нормально розподілена випадкова величина може відхилятись від свого математичного сподівання не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення.*

На практиці його використовують так: *якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але $|X - a| < 3\sigma$, тоді можна припустити, що X розподілена нормально.*

Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці. Головна особливість нормального закону полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу за типових умов.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано формулою

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le -1; \\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & \text{якщо} \quad -1<x\le 3; \\ 1, & \text{якщо} \quad x>3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ та побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити $P(0<X<2)$, скориставшись формулами (4.1) та (4.3).

Розв'язання. За означенням

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le -1; \\ \dfrac{3\cdot(x+1)^2}{64}, & \text{якщо} \quad -1<x\le 3; \\ 0, & \text{якщо} \quad x>3. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$, побудовані за їх табличними значеннями, зображено відповідно на рис.4.4 та рис.4.5.

x	-1	0	1	2	3	4
$F(x)$	0	0,016	0,016	0,016	0,016	1
$f(x)$	0	0,047	0,188	0,422	0,750	0

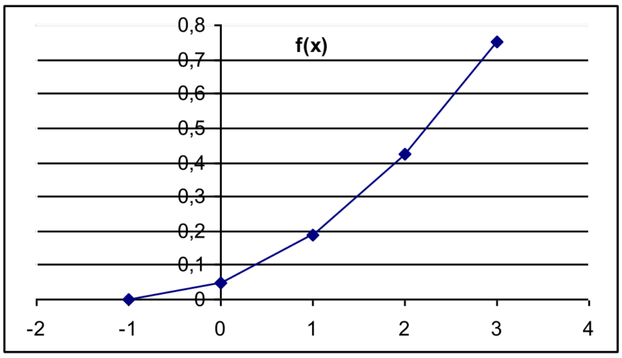


Рис.4.4. Диференціальна функція

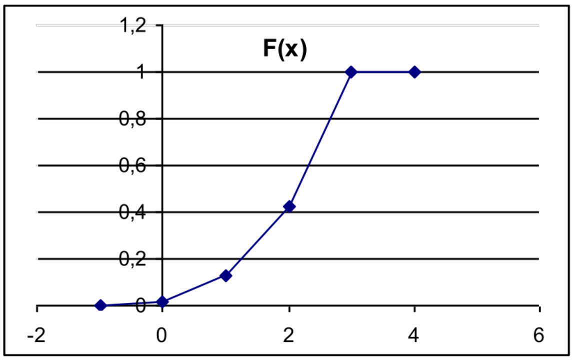


Рис.4.5. Інтегральна функція

Імовірність події $0 < X < 2$ обчислимо за формулою (4.1)

$$P(0 < x < 2) = F(2) - F(0) = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{13}{32}.$$

Те саме одержуємо за формулою (4.3)

$$P(0 < x < 2) = \int_0^2 \frac{3 \cdot (x+1)^2}{64} dx = \left. \frac{(x+1)^3}{64} \right|_0^2 = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{13}{32}.$$

Приклад 2. Диференціальна функція розподілу випадкової величини X має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{якщо} \quad 0 < x \le \pi; \\ 0, & \text{якщо} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$, побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Згідно з формулою (4.4) маємо:

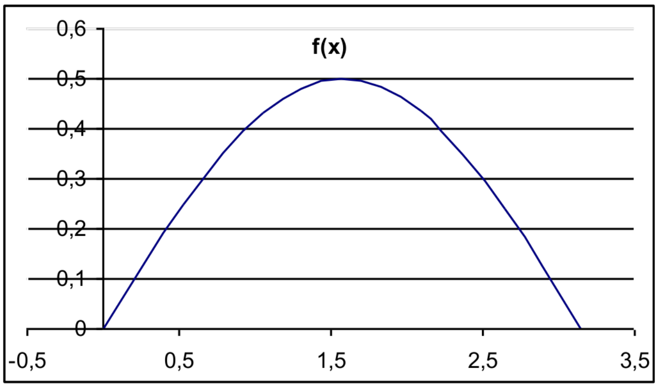
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\sin t \cdot dt = \left. \frac{1}{2}(-\cos t) \right|_0^x = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

Таким чином функція розподілу ймовірності має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{якщо} \quad 0 < x \le \pi; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$, побудовані за їх табличними значеннями, зображено відповідно на рис.4.6 і рис.4.7.

x	0,00	0,52	1,05	1,57	2,09	2,64	3,14
$f(x)$	0,00	0,25	0,43	0,50	0,43	0,24	0,00
$F(x)$	0,00	0,07	0,25	0,50	0,75	0,94	1,00



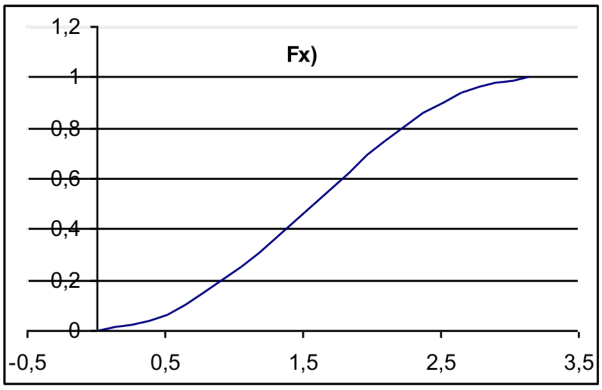


Рис.4.6. Диференціальна функція *Рис 4.7.* Інтегральна функція

Ймовірність події $P\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ можна обчислити згідно за формулою (4.1) або (4.3). За формулою (4.1) маємо

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

За формулою (4.3) будемо мати $P\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Приклад 3. Час t безперервної роботи планшета має показниковий розподіл. Знайти ймовірність його безвідмовної роботи протягом 600 годин, якщо середній час його роботи – 400 годин.

Розв'язання. За умовою задачі математичне сподівання випадкової величини t дорівнює 400, тому $\lambda = \frac{1}{M} = \frac{1}{400}$. За формулою (4.13) $R(x) = p(t \geq x) = e^{-\lambda x}$, маємо

$$R(x = 600) = e^{-\frac{600}{400}} = e^{-1,5} = 0,2231.$$

Отже, ймовірність того, що планшет працюватиме не менше 600 годин, дорівнює 22%.

Приклад 4. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом

$$f(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Розв'язання. Для даного показникового розподілу випадкової величини з параметром $\lambda=4$ за формулами (4.12) маємо:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{4}=0{,}25;\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{16}=0{,}0625.$$

Приклад 3. Нормально розподілена випадкової величина X має математичне сподівання $M(X)=30$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)=10$. Ставиться завдання:

1) Записати вигляд диференціальної функції розподілу $f\left(x\right)$, побудувати її графік та графік інтегральної функції розподілу $F\left(x\right)$.

2) Знайти ймовірність того, що внаслідок випробування випадкова величина набуде значення з інтервалів: $\left(10,50\right)$, $\left(a-3\sigma,a+3\sigma\right)$ (тобто знайти $P\left(10<X<50\right)$ і $P\left(a-3\sigma<X<a+3\sigma\right)$).

Розв'язання. 1) Згідно умови задачі $a=30$, $\sigma=10$, тому за формулою щільності розподілу (4.14)

$$f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-30)^2}{2\cdot 10^2}}dx=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-30)^2}{200}}dx.$$

Для побудови графіка функції $f\left(x\right)$ знайдемо значення у точках $x=5,\ 10,\ \ldots,\ 50$, використовуючи функцією пакету Excel, яка має вигляд: **НОРМРАСП**(*x*; среднее; стандартное_откл; интегральная), де *x*− значення, для якого будується розподіл; *среднее* − математичне сподівання $M(X)$; *стандартное_откл* – середнє квадратичне відхилення $\sigma\left(X\right)$; *интегральная* − логічне значення 0 або 1. (Якщо «*интегральная*»: − 0, отримаємо значення диференціальної функції розподілу $f\left(x\right)$ в точці *x*, якщо «*интегральная*»: 1 − функція повертає значення інтегральної функції розподілу $F\left(x\right)$ в точці *x*).

Для побудови графіка функції $F(x)$ знайдемо її значення у тих же точках $x = 5,\ 10,\ \dots,\ 50$, використовуючи функцію **НОРМРАСП**(x; $M(X)$; $\sigma(X)$;1).

2) Використовуючи формулу (4.3), одержимо:

$$P(10 < X < 50) = \int_{10}^{50} f(t)dt = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}9544,$$

де $\Phi(2)$ знаходимо за таблицею значень функції Лапласа.

Цю ймовірність легко обчислити, якщо скористатись функцією **НОРМРАСП,** використовуючи різницю виразів **НОРМРАСП**(50;30;10;1) і **НОРМРАСП**(10;30;10;1), що дорівнює 0,9545. Результат застосування функції **НОРМРАСП** та графіки функції $f(x)$ і $F(x)$ наведено на рис. 4.8.

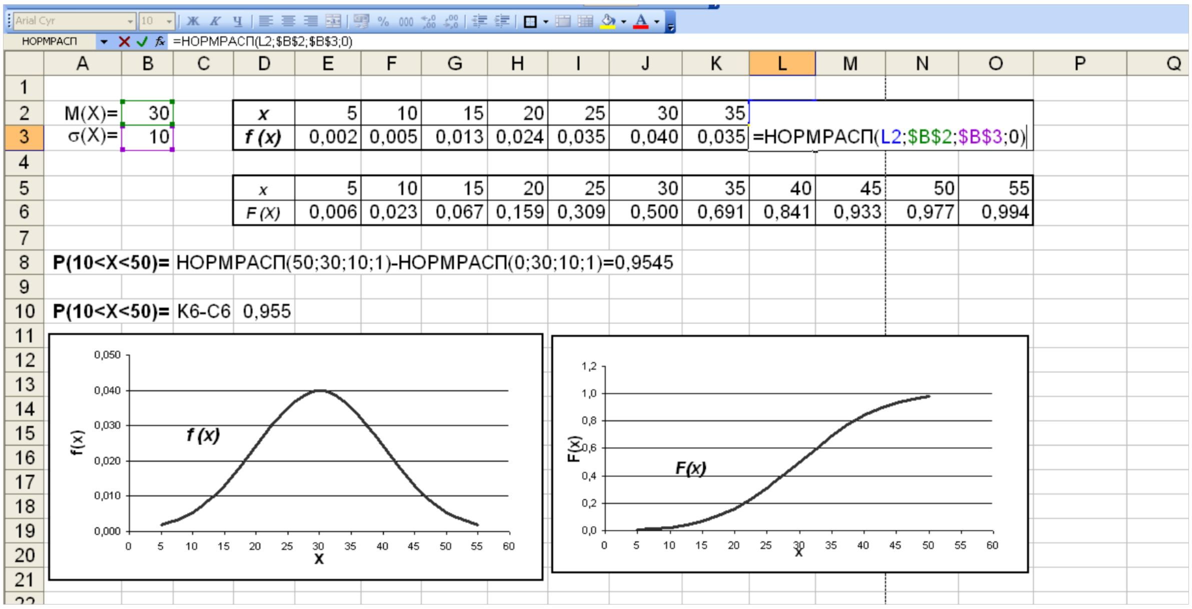


Рис.4.8. Обчислення за допомогою **НОРМРАСП**

Для інтервалу $(a - 3\sigma, a + 3\sigma) = (0, 60)$ шукана ймовірність обчислюється аналогічно за допомогою різниці виразів **НОРМРАСП**(60;30;10;1), **НОРМРАСП**(0;30;10;1) і дорівнює 0,9973, що співпадає також з результатами, одержаними за формулою (4.3).

Виконання лабораторної роботи

Завдання до теми

Завдання 1.

1.1. Задана функція розподілу неперервної випадкової величини *X*. Знайти коефіцієнт *A;* записати щільність розподілу $f(x)$; обчислити числові характеристики $M(X), D(X)$, а також $P(\alpha \le X \le \beta)$. Зробити креслення графіків функції розподілу та щільності розподілу.

1. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ Ax^5, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3; \end{cases} \quad \alpha = 0,25; \beta = 0,75.$

2. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ A\left(2x-\dfrac{x^2}{3}\right), & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3; \end{cases} \quad \alpha = 1; \beta = 2.$

3. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ A\left(-x^2+4x\right), & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases} \quad \alpha = 0,5; \beta = 1,5.$

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ Ax^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases} \quad \alpha = 0,3; \beta = 0,8.$

5. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ Ax^3, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases} \quad \alpha = 0,2; \beta = 1,7.$

6. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ A\cos 3x, & \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{3}; \end{cases} \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6}, \quad \beta = \dfrac{\pi}{4}.$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^2, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$ $\alpha=1{,}3;\ \beta=1{,}5.$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^3, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3;\end{cases}$ $\alpha=0{,}25;\ \beta=0{,}75.$

9. $F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ A\sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{6};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6};\end{cases}$ $\alpha=\dfrac{\pi}{12},\quad \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^2, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3;\end{cases}$ $\alpha=0;\ \beta=2.$

1.2. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу $y=f(x)$. Записати інтегральну функцію розподілу $y=F(x)$; обчислити числові характеристики $M(X), D(X)$, а також $P\left(\alpha\le X\le\beta\right)$. Зробити креслення графіків диференціальної та інтегральної функцій розподілу.

1. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0, x>\pi/2,\\ \cos x, & 0<x\le \pi/2;\end{cases}$, $\alpha=-\pi/4;\ \beta=\pi/4.$

2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0, x>\pi/2,\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\end{cases}$, $\alpha=-\pi;\ \beta=\pi/4.$

3. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le \pi/6, x>\pi/3,\\ 3\sin 3x, & \pi/6<x\le \pi/3;\end{cases}$, $\alpha=0;\ \beta=\pi/4.$

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x|\le \pi/2,\\ 0, & |x|>\pi/2;\end{cases}$, $\alpha=0;\ \beta=\pi/4.$

5. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2, \\ 0, & x>2; \end{cases}$ $\alpha=1; \beta=1{,}5.$

6. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\alpha=0; \beta=\pi/4.$

7. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 2\cos x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$ $\alpha=0; \beta=\pi/12.$

8. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 3x^2, & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1; \end{cases}$ $\alpha=0; \beta=1/2.$

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{2}(2x-1), & 0<x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$ $\alpha=1/2; \beta=2.$

10. $f(x)=\begin{cases} ae^{-ax}\ (a>0), & x>0, \\ 0, x\le 0; \end{cases}$, $\alpha=1; \beta=2.$

Зауваження. У завданнях 1.1 та 1.2 номер варіанту вибирати за номером у списку до 11, починаючи з 11, 12, … і т.д. варіанту – повторення завдань: 1, 2, … .

Завдання 2. Випадкова величина X розподілена рівномірно на інтервалі $(a;b)$. Записати диференційну $f(x)$ та інтегральну $F(x)$ функції, знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо

1) $a=1, b=6$; 2) $a=2, b=8$; 3) $a=3, b=8$;

4) $a=3, b=6$; 5) $a=3, b=7$; 6) $a=4, b=10$;

7) $a=-1, b=4$; 8) $a=2, b=9$; 9) $a=\ 2, b=7$;

10) $a=3, b=9$; 11) $a=\ 3, b=10$; 12) $a=-2, b=4$;

13) $a=\ 2, b=12$; 14) $a=12, b=16$; 15) $a=5, b=10$;

16) $a=7, b=11$; 17) $a=1, b=3$; 18) $a=10, b=14$;

19) $a=11, b=19$; 20) $a=-10, b=-2$.

Зауваження. У завданнях 2, 3 та 4 номер варіанту вибирати за номером у списку.

Завдання 3. Час t безперервної роботи електроприладу має показниковий розподіл. Знайти ймовірність його безвідмовної роботи протягом N годин, якщо середній час його роботи – T годин, записавши відповідну диференціальну функцію розподілу.

1) $N=200, \quad T=100;$ 2) $N=250, \quad T=100;$

3) $N=300, \quad T=200;$ 4) $N=300, \quad T=150;$

5) $N=300, \quad T=290;$ 6) $N=200, \quad T=180;$

7) $N=400, \quad T=200;$ 8) $N=400, \quad T=250;$

9) $N=400, \quad T=300;$ 10) $N=400, \quad T=380;$

11) $N=400, \quad T=350;$ 12) $N=500, \quad T=300;$

13) $N=500, \quad T=400;$ 14) $N=500, \quad T=450;$

15) $N=500, \quad T=150;$ 16) $N=600, \quad T=350;$

17) $N=600, \quad T=500;$ 18) $N=700, \quad T=400;$

19) $N=800, \quad T=650;$ 20) $N=800, \quad T=700.$

Завдання 4. Неперервна випадкова величина X має розподіл $N(a;\sigma)$. Записати диференціальну функцію розподілу $f(x)$, побудувати її графік та графік інтегральної функції розподілу, знайти $P(\alpha < X < \beta)$, використовуючи функцією пакету Excel **НОРМРАСП**, якщо

1) $a=3, \ \sigma=4, \ \alpha=0{,}5, \ \beta=9;$ 2) $a=3, \ \sigma=4, \ \alpha=2, \ \beta=9;$

3) $a=0, \ \sigma=12, \ \alpha=3, \ \beta=6;$ 4) $a=2, \ \sigma=8, \ \alpha=5, \ \beta=9;$

5) $a=2, \ \sigma=1, \ \alpha=4, \ \beta=11;$ 6) $a=5, \ \sigma=1, \ \alpha=1, \ \beta=5;$

7) $a=4,\ \sigma=2,\ \alpha=2,\ \beta=6;$ 8) $a=1,\ \sigma=25,\ \alpha=1,\ \beta=3;$

9) $a=2,\ \sigma=25,\ \alpha=3,\ \beta=8;$ 10) $a=3,\ \sigma=9,\ \alpha=0{,}25,\ \beta=10;$

11) $a=-1,\ \sigma=-1,\ \alpha=0,\ \beta=9;$ 12) $a=-1,\ \sigma=5,\ \alpha=2,\ \beta=7;$

13) $a=-2,\ \sigma=9,\ \alpha=0,\ \beta=7;$ 14) $a=-2,\ \sigma=4,\ \alpha=1,\ \beta=5{,}25;$

15) $a=12,\ \sigma=4,\ \alpha=5,\ \beta=9;$ 16) $a=13,\ \sigma=4,\ \alpha=6,\ \beta=9;$

17) $a=11,\ \sigma=6,\ \alpha=6,\ \beta=12;$ 18) $a=11,\ \sigma=6,\ \alpha=5,\ \beta=8;$

19) $a=-1,\ \sigma=4,\ \alpha=7,\ \beta=9{,}25;$ 20) $a=1,\ \sigma=4,\ \alpha=0,\ \beta=14.$

Зауваження. Вибирати числові дані для побудови функцій розподілу, щоб побачити їх вигляд, як на рис. 4.2, 4.3 або, відповідно, на рисунках 4.6, 4.7.

Теоретичні запитання до теми

1. Які основні характеристики для неперервних випадкових величин?
2. Записати формули обчислення числових характеристик неперервних випадкових величин.
3. Записати основні закони розподілу неперервних випадкових величин, отримати для них інтегральну функцію розподілу.
4. Пояснити використання функції надійності на практиці.
5. Як використовують функцією пакету Excel **НОРМРАСП?**

Оформлення звіту та порядок захисту

Лабораторна робота виконується на аркушах А4, в ній стисло відображаються формули теоретичної частини, розв’язання завдань самостійної роботи та отримані результати (студент здає електронний варіант проведених обчислень практичних задач).

При захисті студент повинен розуміти зміст роботи, порівняти отримані результати проведених обчислень, знати відповіді на теоретичні запитання.

Додаткове завдання – обчислення числових характеристик одного (на вибір) закону розподілу неперервної випадкової величини.