Вища математика.

Лекція 8.

Тема: Розкриття деяких невизначеностей. Порівняння нескінченно малих функцій. Неперервність функції. Похідна.

4. Невизначеності виду $\infty - \infty$ задані ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+8x}-3x\right)$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+8x}+3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+x-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+0}+3}=\frac{1}{6}$$

3.2. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі функції при $x\to x_0$, тобто

$$\mathop{lim}_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0,\quad \mathop{lim}_{x\to x_0}\alpha_2(x)=0.$$

Введемо такі означення:

1) функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку при $x\to x_0$, якщо

$$\mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=A\neq 0,\quad A\in R;$$

2) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=0;$$

3) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\infty;$$

4) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою k-го порядку відносно $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{[\alpha_2(x)]^k}=A\neq 0,\quad A\in R;$$

5) нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються непорівнянними при $x\to x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Введені означення охоплюють усі випадки, які можуть трапитись при порівнянні двох нескінченно малих функцій в околі точки x_0. Такі самі правила порівняння нескінченно малих при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ та при $x\to x_0\pm 0$.

Аналогічно порівнюються нескінченно великі величини.

Приклади.

1. Функції $\alpha_1(x)=x$, $\alpha_2(x)=tg\ 7x$ нескінченно малі одного порядку при $x\to 0$, тому що

$$\mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\mathop{lim}_{x\to 0}\frac{x}{tg\ 7x}=\mathop{lim}_{x\to 0}\frac{7x}{7tg\ 7x}=\frac{1}{7}\mathop{lim}_{x\to 0}\frac{7x}{tg\ 7x}=\frac{1}{7}\cdot 1=\frac{1}{7}.$$

2. Функція $\alpha_1(x) = x^3$ при $x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція $\alpha_2(x) = \sin x$, тому що

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0$$

Очевидно, функція $\alpha_2(x) = \sin x$ при $x \to 0$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_1(x) = x^3$.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку особливу роль відіграють так звані еквівалентні нескінченно малі.

Означення. Функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x \to x_0$, називаються еквівалентними нескінченно малими, якщо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Розглянемо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 1. Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

Теорема 2. Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \to x_0$. Якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$ і ці границі рівні між собою.

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченною малою, яка еквівалентна заданій. Часто зустрічаються, наприклад, такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$\sin \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ $\qquad$ $e^\alpha - 1 \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$

$tg\, \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ $\qquad$ $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a, \quad \alpha \to 0;$

$\arcsin \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ $\qquad$ $\log_a(1+\alpha) \sim \alpha \log_a e, \quad \alpha \to 0;$

$arctg\, \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ $\qquad$ $\ln(1+\alpha) \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$

$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha \to 0;$ $\qquad$ $(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha, \quad \alpha \to 0, \ k > 0.$

Зазначимо, що ці еквівалентності досить просто дістати за допомогою правила Лопіталя, яке ми вивчимо в подальшому курсі вищої математики.

Теорема 3. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Приклади. 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, 9x}{\sin 3x}$.

Розв'язання. Оскільки $tg\, 9x \sim 9x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то за теоремою 2 дістанемо

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, 9x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{9x}{3x} = \frac{9}{3} = 3.$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 5} \frac{arctg\,(x-5)}{x^2-7x+10}$.

Розв'язання. Оскільки $arctg\,(x-5) \sim x-5$ при $x \to 5$ та $x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$, то

$$\lim_{x\to 5} \frac{arctg\,(x-5)}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(x-2)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}.$$

§ 4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу — поняття неперервності функції.

4.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву.

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (4.1)$$

Рис. 3.

Якщо порівняти це означення з означенням границі функції $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, то при означенні границі функції число x_0 могло й не належати області визначення функції, а якщо число x_0 належало області визначення, то значення функції $f(x_0)$ в цій точці могло й не збігатися з границею A.

Таким чином, функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існує границя $\lim_{x\to x_0} f(x)$;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 і значення функції в цій точці x_0 збігаються, тобто виконується рівність (4.1).

Можна дати ще одне означення неперервності функції, опираючись на поняття приростів аргументу і функції.

Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y = f(x)$. Різниця $x - x_0$ називається *приростом аргументу* в точці x_0 і позначається через Δx («дельта x»):

$$\Delta x = x - x_0 \qquad \text{або} \qquad x = x_0 + \Delta x.$$

Різниця відповідних значень функції $f(x) - f(x_0)$ називається приростом функції в точці x_0 і позначається через Δy:

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,.$$

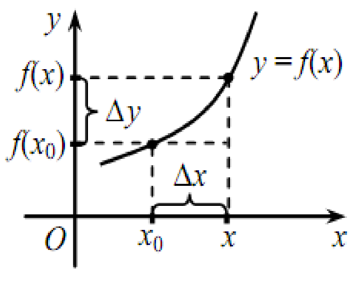

Рис. 4.

Очевидно, приріст Δx може бути додатним або від'ємним числом, приріст Δy — довільним числом. Запишемо рівність (4.1) в нових позначеннях, для чого перенесемо в ній значення $f(x_0)$ в ліву частину і внесемо його під знак границі. Оскільки умови $x \to x_0$ і $x - x_0 \to 0$ однакові, то рівність (4.1) набуває вигляду

$$\lim_{x-x_0\to 0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = 0. \quad \text{або} \quad \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0 \qquad (4.2)$$

Рівність (4.2) і є ще одним означенням неперервності функції, яке можна сформулювати так.

Означення. Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$.

Часто зустрічається поняття односторонньої неперервності.

Означення. *Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 зліва, якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0 - \varepsilon;\ x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0;\ x_0 + \varepsilon)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною в точці x_0 справа.*

Використовуючи ці поняття, можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (4.3)$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 називається точкою розриву функції.

Розрізняють такі види розривів. Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою, то розрив в точці x_0 називають розривом першого роду, точку x_0 — точкою розриву першого роду.

Зокрема , якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0),$$

то розрив в точці x_0 називають усувним, а точку x_0 — точкою усувного розриву. У цьому випадку досить довизначити функцію лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в точці x_0.

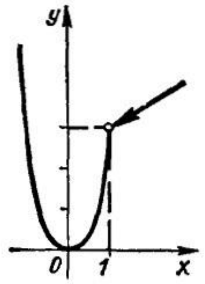

Рис. 5.

Якщо $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то розрив в точці x_0 називають неусувним, а точку x_0 — точкою неусувного розриву. Величину $\delta = |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ називають стрибком функції.

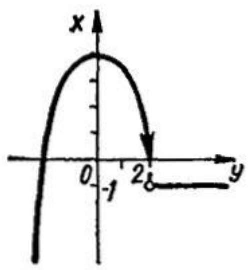

Рис. 6.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (4.3) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається розривом другого роду, а сама точка x_0 — точкою розриву другого роду.

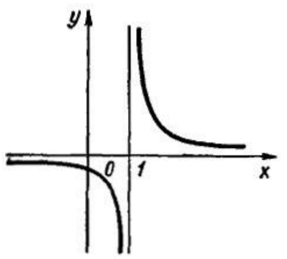

Рис. 7.

4.2. Дії над неперервними функціями. Неперервність елементарних функцій.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є функції

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)\,g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)} \tag{4.4}$$

(остання за умови, що $g(x) \neq 0$).

Теорема 2. Якщо функція $u = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f\big(g(x)\big)$ неперервна в точці x_0.

Теорема 3. Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Означення. Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу $(a;b)$, то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Означення. Функція називається неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a;b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b.

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей.

Сформулюємо деякі з них.

Теорема 1. (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині відрізка $[a;b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює, нулю: $f(c) = 0,\ a < c < b$.

Геометричний зміст цієї теореми такий (рис. 8): неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею між якими є вісь Ox, перетинає цю вісь.

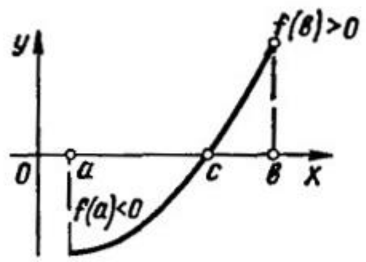

Рис. 8.

Теорема 2 (друга теорема Больцано — Коші). Нехай функція неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває, на його кінцях різних значень: $f(a) = A, f(b) = B, A \neq B$. Тоді для довільного числа $\mu \in (A;B)$ знайдеться таке число $c \in (a;b)$, що $f(c) = \mu$.

Отже, неперервна функція при переході від одного значення до другого набуває також всіх проміжних значень.

Зміст теореми 2 ілюструється на рис. 9.

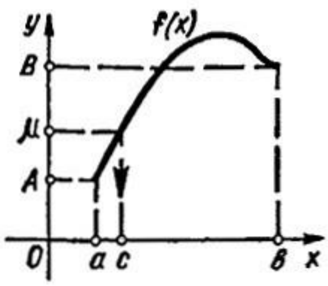

Рис. 9.

Теорема 3 (Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше.

Отже, неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ досягає на цьому відрізку найбільшого значення $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$ і найменшого значення $m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$ (рис. 10).

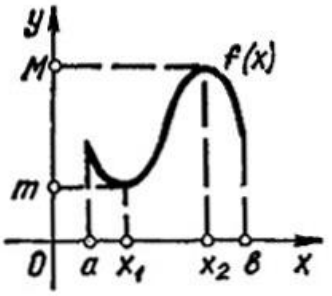

Рис. 10.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Диференціальне числення — розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Деякі задачі диференціального числення розв'язані ще в давнину. Так, Евклід розв'язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, а Аполлоній — дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь.

§1. Похідна.

Центральне поняття диференціального числення — похідна — широко використовується при розв'язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

Нехай на деякому інтервалі $(a; b)$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in (a; b)$ і надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала інтервалу $(a; b)$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

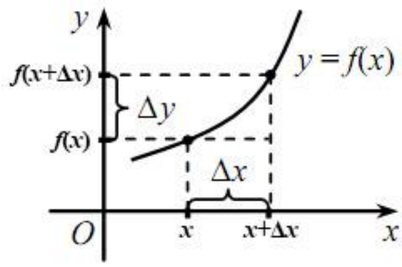

Рис. 1.

1.1. Означення похідної.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, якщо ця границя існує.

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y'_x.$$

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається одним із таких символів:

$$y'(x_0) = f'(x_0).$$

Приклад. Знайдіть за означенням похідну функції $y = cos\ x$.

Розв'язання. Запишемо приріст заданої функції $\Delta y = cos\,(x + \Delta x) - cos\,x$. Використовуючи першу важливу границю у вигляді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\,x}{\Delta x} = 1\,,$$

а також формулу розкладання різниці косинусів у добуток

$$cos\,\alpha - cos\,\beta = -2sin\,\frac{\alpha - \beta}{2}\,sin\,\frac{\alpha + \beta}{2}\,,$$

дістаємо

$$(cos\,x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\,(x + \Delta x) - cos\,x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\,sin\,\frac{\Delta x}{2}\,sin\,\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\,sin\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} sin\,\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot sin\,x = -sin\,x\,.$$

1.2. Механічний фізичний та геометричний зміст похідної. Механічний зміст похідної:

Механічний зміст похідної:

Швидкість в даний момент часу — це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом t :

$$v = S'(t).$$

Фізичний зміст похідної:

Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. В цьому полягає фізичний зміст похідної. Інакше кажучи, яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни функції у відносно аргументу x, а похідну $f'(x)$ — миттєву швидкість зміни функції.

Геометричний зміст похідної.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox,— це похідна $f'(x_0)$ в цій точці: $k = tg\alpha = f'(x_0)$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Оскільки кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов'язані між собою умовою перпендикулярності, то рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ *в точці* $M_0(x_0; y_0)$ *має вигляд:*

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

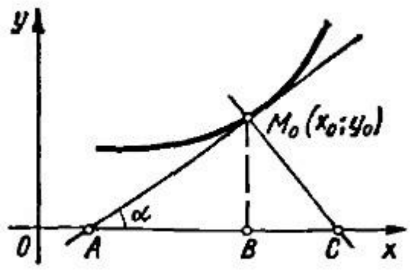

Рис. 2.