Лекція 4.

Тема. Вектори в прямокутній системі координат. Скалярний добуток векторів. Елементи аналітичної геометрії. Пряма на площині.

§3. Вектори в прямокутній системі координат.

1.1. Координати, довжина і напрямні косинуси вектора в просторі R^3.

1. Координати вектора. Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано деякий вектор $\vec{a}$. Тоді наша система координат задається ортонормованим базисом $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ і згідно рівності (2.2) вектор $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$, де числа a_x, a_y, a_z - координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. З рівності (2.3) випливає, що координати вектора в прямокутній системі координат $Oxyz$ це його проекції на осі координат, тобто

$a_x = \text{пр}_{Ox}\vec{a},\ a_y = \text{пр}_{Oy}\vec{a},\ a_z = \text{пр}_{Oz}\vec{a}$ (3.1)

2. Довжина вектора. Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (рис. 1) з сторонами $|a_x|$, $|a_y|$, $|a_z|$, і тому його довжина дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (3.2)$$

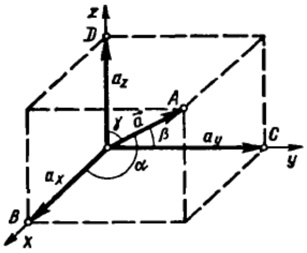

Рис. 1

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 2) знаходиться в точці $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінець - в точці $B(x_2, y_2, z_2)$, то для того, щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$ потрібно від координат кінця вектора відняти відповідні координати початку:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \qquad (3.3)$$

Тоді з формули (3.2) знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ або іншими словами відстань між точками A і B:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (3.4)$$

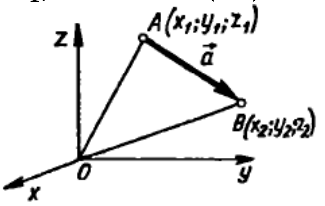

Рис. 2

3. Орт вектора. Нехай маємо деякий вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Тоді ортом вектора $\vec{a}$ буде вектор $\vec{a}^\circ$ одиничної довжини, співнапрямлений з даним вектором, тобто

$$\vec{a}^\circ = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right) \qquad (3.5)$$

4. Напрямні косинуси вектора.

Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається кутами α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат (рис. 1):

$\alpha = (\vec{a},\wedge\, \vec{\imath}),\ \beta = (\vec{a},\wedge\, \vec{\jmath}),\ \gamma = (\vec{a},\wedge\, \vec{k}),\ 0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi.$

Косинуси цих кутів називаються напрямними косинусами. Формули для напрямних косинусів наступні:

$$cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (3.6)$$

Підносячи обидві частини кожної з рівностей (3.6) до квадрата і підсумовуючи, з урахуванням формули (3.2) дістанемо

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \qquad (3.7)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці.

3.2. Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів.

1. Дії з векторами. Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами.

Нехай задано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і дійсне число λ, тоді $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$.

2. Рівність векторів. Нехай вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, тоді це рівносильно одночасному виконанню трьох рівностей:

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z \qquad (3.8)$$

і навпаки, якщо мають місце формули (3.8), то $\vec{a} = \vec{b}$. Отже, всяка векторна рівність виду $\vec{a} = \vec{b}$ еквівалентна трьом скалярним рівностям (3.8).

3. Колінеарність векторів. Необхідною і достатньою умовою того,
що вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, є пропорціональність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad (3.9)$$

Дійсно, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує таке число λ, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, тоді з формул (3.8) дістаємо рівності $a_x = \lambda b_x,\ a_y = \lambda b_y,\ a_z = \lambda b_z$, з яких випливають формули (3.9).

3.3. Поділ відрізка в даному відношенні.

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$.
Знайдемо на відрізку таку точку $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $|\overline{AM}| : |\overline{MB}| = \lambda$. Введемо радіуси-вектори $\vec{r}_1 = \overline{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r} = \overline{OM} = (x, y, z)$, $\vec{r}_2 = \overline{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3). Оскільки $\overline{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overline{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ і за умовою $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$, то $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, звідки

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda}$$

Прирівнюючи проекції обох частин цієї рівності на осі координат, згідно з формулами (3.8) маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (3.10)$$

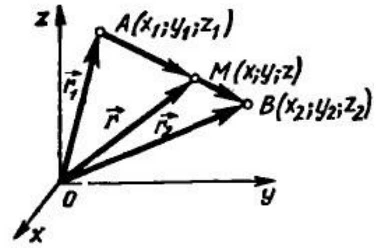

Рис. 3

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл ($\lambda = 1$), знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (3.11)$$

§4. Скалярний добуток векторів.

4.1. Означення. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos(\vec{a},^\wedge \vec{b}). \qquad (4.1)$$

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, то вважають, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Скалярний добуток векторів можна виразити через таке геометричне поняття, як проекція вектора на напрям (вісь) іншого вектора. Величина $|\vec{a}|cos(\vec{a},^\wedge \vec{b})$ є проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, тобто

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} = |\vec{a}|cos(\vec{a},^\wedge \vec{b})$$
$$\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}|cos(\vec{a},^\wedge \vec{b}).$$

Тепер можна сказати, що скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - це добуток довжини одного вектора на проекцію іншого, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\text{Пр}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}|\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (4.2)$$

З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α (рис. 4), дорівнює

$$A = |\vec{F}||\vec{S}|cos\alpha,$$

або

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \qquad (4.3)$$

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть механічного змісту скалярного добутку.

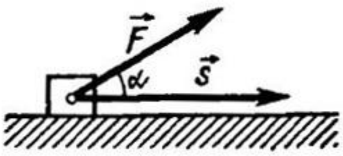

Рис. 4

4.2.Алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1. Комутативна властивість множення:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2. Асоціативна властивість відносно множення на число λ:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

3. Дистрибутивна властивість відносно додавания векторів:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4.3. Геометричні властивості скалярного добутку.

1. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді, і тільки тоді, коли вони ортогональні, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \vec{a}\perp\vec{b}.$$

2. Скалярний добуток вектора самого на себе називається скалярним квадратом і дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \text{ тоді } |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}.$$

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, якщо $0\le\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)<\frac{\pi}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, якщо $\frac{\pi}{2}<\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)\le\pi$.

4. Якщо відомі скалярний добуток двох векторів та їх довжини, то завжди можна знайти косинус кута між ними (і сам кут)

$$cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\;\; \left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=arccos\,\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

З означення скалярного добутку, враховуючи, що $\left|cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)\right|\le 1$, випливає нерівність $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|$.

Приклади.

1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}$ і $\vec{n}=4\vec{a}+5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}$.

   Розв'язання. $\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(4\vec{a}+5\vec{b}\right)=8\vec{a}^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}-12\vec{b}\cdot\vec{a}-15\vec{b}^2=$

   $$=8|\vec{a}|^2\;-2|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)-15\left|\vec{b}\right|^2$$

   Підставляючи відповідні значення отримаємо:

   $$\vec{m}\cdot\vec{n}=8\cdot1^2-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}-15\cdot2^2=-54.$$

2. Знайти довжину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}$.

   Розв'язання. За формулою $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$ маємо:

   $$|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^2}=\sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=\sqrt{124}=2\sqrt{31}.$$

4.4. Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами.

Нехай задано два вектори $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ та $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$. Тоді їхній скалярний добуток рівний:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (4.4)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.

Вкажемо на ряд важливих висновків з формули (4.4).

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ є рівність

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \qquad (4.5)$$

2. Довжина вектора $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ визначається за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,. \qquad (4.6)$$

3. Кут $\varphi=\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)$ між векторами $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ та $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ визначається рівністю

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (4.7)$$

Приклад. Обчислити яку роботу виконує сила $\vec{F} = (2, -1, 4)$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з точки $M = (-1, 0, 3)$ в точку $N = (2, -3, 5)$.
Розв'язання. Знайдемо спочатку вектор переміщення $\vec{S} = \overline{MN} = (2-(-1), -3-0, 5-3) = (3, -3, 2)$.
Тоді за формулами (4.3) і (4.4) робота $A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-3) + 4\cdot 2 = 6+3+8 = 17$.

Тема. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.

Аналітична геометрія — це розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат.

§ 1. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХНІ РІВНЯННЯ. ПОВЕРХНЯ ТА ЇЇ РІВНЯННЯ.

1.1. Поняття про лінію та її рівняння.

Розглянемо рівність

$$F(x, y) = 0, \qquad (1.1)$$

яка зв'язує змінні величини x та y.

Рівняння (1.1) називається рівнянням лінії l, яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати x і y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Ми вивчатимемо лише лінії першого та другого порядків, тобто лінії, що задаються рівняннями

$$ax + by + c = 0 \text{ та } ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

1.2. Параметричні рівняння лінії.

Нехай залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t, тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t). \qquad (1.2)$$

Якщо t змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію l. Такий спосіб задання лінії називається параметричним, а рівняння (1.2) — параметричними рівняннями лінії l.

Приклади.

1. Розглянемо траєкторію точки кола, яке котиться без ковзання вздовж нерухомої прямої. Якщо вздовж осі Ox котиться без ковзання коло радіуса R, то будь-яка нерухома точка кола описує криву, яка називається циклоїдою (рис. 5) і задається рівнянням

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t); \quad -\infty < t < +\infty.$$

Якщо параметр t змінюється від 0 до 2π, то дані рівняння визначають першу арку циклоїди, якщо $2\pi < t < 4\pi$ — то другу арку і т. д.

Циклоїда є найпростішою з кривих, які описує на нерухомій площині точка однієї лінії, що котиться без ковзання по другій лінії.

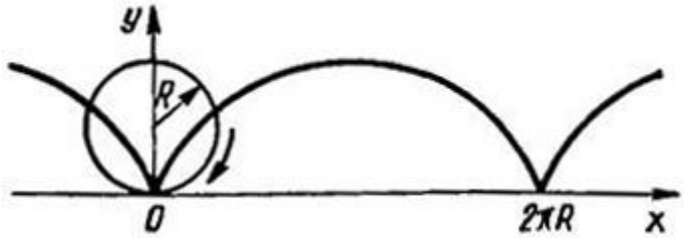

Рис. 5

2. Кардіоїда задається параметричними рівняннями

$$x = 2R\cos t\,(1+\cos t), \quad y = 2R\sin t\,(1+\cos t); \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Простіше записується полярне рівняння кардіоїди:

$$\rho = 2R\,(1+\cos\varphi).$$

Усі ці криві широко застосовуються в теорії механізмів.

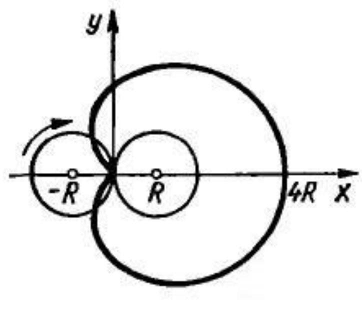

Рис. 6

1.3. Векторне рівняння лінії.

Лінію можна задати також векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t — скалярний змінний параметр. Кожному значенню t_0 відповідає цілком визначений вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$, площини.

Векторному параметричному рівнянню $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в прямокутній системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

тобто проекціями на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

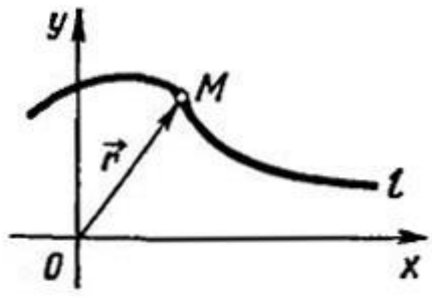

Рис. 7

1.4. Поверхня та її рівняння.

Розглянемо співвідношення

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1.3}$$

між трьома змінними величинами x, y, z.

Отже, рівняння (1.3) називається рівнянням поверхні відносно заданої системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x, y, z кожної точки даної поверхні і не задовольняють координати x, y, z жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

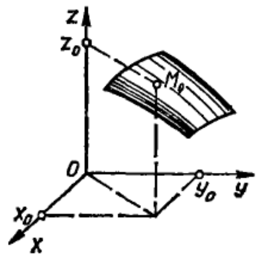

Рис. 8

§ 2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ.

2.1. Різні види рівнянь прямої на площині.

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним даній прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої, тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

1. Векторне параметричне рівняння прямої. Нехай пряма (на площині чи в просторі) проходить через задану точку M_0 паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s}$, який називається *напрямним вектором прямої*. Пряма має безліч напрямних векторів, їхні відповідні координати пропорційні. Точка M_0 і її напрямний вектор цілком визначають пряму, тому що через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо рівняння цієї прямої. Позначимо через M (рис. 9) довільну точку прямої і розглянемо радіуси-вектори

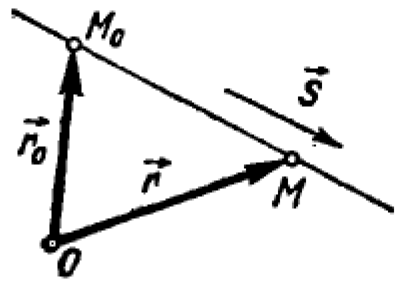

Рис. 9

$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM}_0$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та M і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, що лежить на даній прямій.

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{s}$ колінеарні, то $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$, звідки

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t. \tag{1.4}$$

Змінна t у формулі (1.4) може набувати довільних дійсних значень і називається параметром, а рівняння (1.4) називається *векторним параметричним рівнянням прямої*.

Векторне параметричне рівняння прямої має однаковий вигляд і на площині, і в просторі.