Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \qquad (35)$$

де коефіцієнти a_{ij} – сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається *однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Задача Коші для системи (35) полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \qquad (36)$$

Розв’язання системи (35) виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому y через x:

$$y = \frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x. \qquad (37)$$

Продиференціюємо цю рівність по t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt}. \qquad (38)$$

Підставляючи вирази (37) і (38) в друге рівняння системи (35), отримаємо

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt} = a_{21}x + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x\right),$$

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{22}}{a_{12}}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{22} - a_{21}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = 0. \qquad (39)$$

Рівняння (39) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30) з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$. Розв’язуємо його відносно $x(t)$. Після цього за формулою (37) знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні системи (35) коефіцієнт $a_{12} = 0$, то це рівняння матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язавши його, підставимо знайдену функцію $x(t)$ в друге рівняння системи (35) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Розв’язуємо його і записуємо остаточну відповідь.

Розв’язати системи диференціальних рівнянь:

108. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y:

$$\frac{dx}{dt} = -x + 5y, \quad 5y = \frac{dx}{dt} + x, \quad y = \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x.$$

Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо знайдені y та $\dfrac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}=x+3\left(\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{5}x\right),\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=5x+3\frac{dx}{dt}+3x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-8x=0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2-2k-8=0$ є $k_1=-2$ і $k_2=4$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x\ t\ =C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Так як $\frac{dx}{dt}=-2C_1e^{-2t}+4C_2e^{4t}$, то підставляючи знайдені $x(t)$ та $\frac{dx}{dt}$ у вираз для y ($y=\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{5}x$), отримаємо

$$y\ t\ =\frac{1}{5}\ -2C_1e^{-2t}+4C_2e^{4t}\ +\frac{1}{5}\ C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}\ ,\ y\ t\ =-\frac{1}{5}C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}.$$

Запишемо тепер загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x\ t\ =C_1e^{-2t}+C_2e^{4t} \\ y\ t\ =-\frac{1}{5}C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}. \end{cases} \lrcorner$$

109. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x+8y \\ \frac{dy}{dt}=x+4y. \end{cases}$

$\ulcorner$ Маємо систему виду 35 . З першого рівняння виражаємо y: $\frac{dx}{dt}=2x+8y$, $8y=\frac{dx}{dt}-2x$, $y=\frac{1}{8}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{4}x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо: $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{4}\frac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{4}\frac{dx}{dt}=x+4\left(\frac{1}{8}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{4}x\right),\quad \frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}=8x+4\frac{dx}{dt}-8x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}=0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами виду 31 . Коренями його характеристичного рівняння $k^2-6k=0$ є $k_1=0$ і $k_2=6$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:

$x\ t\ =C_1+C_2e^{6t}$, де C_1 і C_2 довільні сталі. Так як $\frac{dx}{dt}=6C_2e^{6t}$, то підставивши ці вирази у вираз для y ($y=\frac{1}{8}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{4}x$), отримаємо

$$y\ t\ =\frac{1}{8}\cdot 6C_2e^{6t}-\frac{1}{4}\ C_1+C_2e^{6t}\ =-\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{6t}.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x\ t\ =C_1+C_2e^{6t} \\ y\ t\ =-\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{6t}. \end{cases} \lrcorner$$

110. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x+y \\ \frac{dy}{dt}=8x+y, \end{cases}$

якщо $x(0)=4$, $y(0)=2$.

$\ulcorner$ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y : $\frac{dx}{dt} = 3x + y$, $y = \frac{dx}{dt} - 3x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} = 8x + \frac{dx}{dt} - 3x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0 .$$

Це рівняння виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 4k - 5 = 0$ є $k_1 = -1$ і $k_2 = 5$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$. Так як $\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t}$, то підставляючи ці вирази у вираз для y $\left(y = \frac{dx}{dt} - 3x \right)$, отримаємо

$$y(t) = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} - 3\left(C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}\right) = -4C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} .$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -4C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з початковими умовами виду (36) $x(0) = 4$, $y(0) = 2$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -4C_1 + 2C_2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Записуємо частинний розв'язок системи, підставляючи в загальний розв'язок знайдені значення $C_1 = 1$ і $C_2 = 3$:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + 3e^{5t} \\ y(t) = -4e^{-t} + 6e^{5t}. \end{cases} \lrcorner$$