Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

Загальні поняття.

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

де $p(x)$, $q(x)$ та $f(x)$ - задані неперервні на інтервалі (a, b) функції. Якщо в цьому інтервалі функція $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається однорідним, якщо ж $f(x) \neq 0$, то неоднорідним. Існування неперервних на (a, b) функцій $p(x)$, $q(x)$ та $f(x)$ забезпечує існування та єдиність розв‘язку задачі Коші з довільними початковими умовами при довільному $x_0 \in (a, b)$.

Для однорідного рівняння мають місце наступні теореми:

<u>Теорема 1</u>. Якщо $y_1(x)$ є частинний розв‘язок однорідного лінійного диференціального рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

то добуток $C_1 y_1(x)$, де C_1 - довільна стала, також є розв‘язком цього рівняння.

<u>Теорема 2</u>. Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є частинні розв‘язки однорідного рівняння, то їх сума $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ також є розв‘язком цього рівняння.

Нагадаємо, що функції $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ називаються лінійно залежними на (a, b) якщо існують числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, одночасно не рівні нулю, такі, що лінійна комбінація

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Якщо ця тотожність виконується лише в тому випадку, коли всі $\alpha_i = 0$, то функції $y_1, \ldots, y_n$ називаються лінійно незалежними.

Якщо функцій лише дві, то критерій лінійної незалежності буде виконуватись, якщо їх відношення $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$. Так, наприклад, функції $y_1(x) = e^x$ і $y_2(x) = e^{-x}$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі, оскільки $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq const$.

<u>Означення</u>. Система з двох лінійно незалежних на інтервалі (a, b) розв‘язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з неперервними на (a, b) коефіцієнтами називається фундаментальною системою розв‘язків цього рівняння.

Перевірити лінійну незалежність розв‘язків можна також за допомогою визначника Вронського. Це визначник, складений з частинних розв‘язків та їх похідних. Для рівняння другого порядку він має такий вид $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Теорема. Для того, щоб розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння були лінійно незалежними в (a,b) (в інтервалі неперервності коефіцієнтів рівняння), необхідно і достатньо, щоб $W(x)$ не обертався в нуль в жодній точці з (a,b).

Теорема (про структуру загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння). Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з неперервними на (a,b) коефіцієнтами, то загальний розв'язок рівняння має вигляд

$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де $a < x < b$, а $C_{1,}\ C_2$ - довільні сталі.

Отже, щоб розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку треба знайти його фундаментальну систему розв'язків.

Можна показати, що інтегрування неоднорідного рівняння зводиться до інтегрування відповідного однорідного, якщо відомий частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Має місце наступна теорема.

Теорема (про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняня). Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі довільного частинного розв'язку цього рівняння і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами називається рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0$$

де p та q - дійсні числа.

Розв'язок цього рівняння шукається у вигляді

$$y = e^{\lambda x}$$

де λ - число (дійсне чи комплексне), яке визначається в процесі розв'язку.

Підставляючи $e^{\lambda x}$ замість y у рівняння, ми отримаємо

$$\left(e^{\lambda x}\right)'' + p\left(e^{\lambda x}\right)' + qe^{\lambda x} = 0$$

або $e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0$.

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то дане рівняння буде дорівнювати нулю тоді і лише тоді, коли

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

.Рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ називають характеристичним рівнянням, а його корені – мають вигляд $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Відмітимо, що характеристичне рівняння досить просто складається виходячи із заданого диференціального рівняння. Для цього досить замінити похідні відповідними степенями λ (вважаючи, що функція є похідна нульового степеня). Так, наприклад, для рівняння

$$3y'' + 7y' - 8y = 0$$

характеристичним рівнянням буде

$$3\lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0.$$

<u>Структура фундаментальної системи розв‘язків, а разом з тим і структура загального розв‘язку диференціального рівняння залежить від вигляду коренів його характеристичного рівняння</u>.

Розглянемо різні випадки коренів характеристичного рівняння.

1. $p^2 - 4q > 0$, *тобто корені дійсні різні*

$\lambda_1 \neq \lambda_2$,. Тоді, підставляючи у формулу (4.12) замість λ числа λ_1 і λ_2, отримаємо два частинні розв‘язки рівняння (4.11):

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, що є лінійно незалежні (оскільки $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$ не є сталою величиною) і утворюють фундаментальну систему розв‘язків; тоді, внаслідок теореми про загальний розв‘язок однорідного лінійного диференціального рівняння) загальний розв‘язок буде мати такий вигляд:

$\overline{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

<u>Приклад</u>.

Розв‘язати рівняння $y'' - 2y' - 15y = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння:

$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$.

Шукаємо його корені:

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$; $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 5$.

Корені дійсні і різні, отже, фундаментальна система розв‘язків буде такою: $y_1 = e^{-3x}$; $y_2 = e^{5x}$; а загальний розв‘язок прийме такий вигляд:

$\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x}$,

де C_1, C_2 - деякі довільні сталі.

2. $\left(p^2-4q=0\right)$, *тобто корені характеристичного рівняння дійсні кратні* $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{P}{2}$.

Тоді можна показати, що фундаментальна система розв‘язків складається з таких функцій:

$y_1=e^{-\frac{p}{2}x}$; $y_2=xe^{-\frac{p}{2}x}$;

а загальний розв‘язок записується так:

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}\left(C_1+C_2x\right).$$

<u>Приклад</u>. $y''+2y'+y=0$.

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2+2\lambda+1=0.$$

$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}$; $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

Загальний розв‘язок: $\overline{y}=e^{-x}\left(C_1+C_2x\right)$.

3. $p^2-4q<0$*, тобто характеристичне рівняння не має дійсних коренів*.

Для знаходження розв‘язку в цьому випадку використовуються комплексні числа.

Комплексним числом називається вираз виду $z=\alpha+i\beta$, де α та β - дійсні числа, а i - уявна одиниця: $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$. Тоді, наприклад, корені $\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-64}}{2}$ запишуться так: $\lambda_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8i}{2}=1\pm 4i$, причому для розв‘язку можна брати корінь як зі знаком „+”, так і зі знаком „-”. Підставляючи таке комплексне значення λ в формулу (4.12), ми отримаємо такий розв‘язок $y=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha}e^{i\beta x}=$(за формулою Ейлера)$=e^{\alpha}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right)$.

Відділяючи в отриманому розв‘язкові дійсну та уявну частини, отримаємо два дійсні частинні розв‘язки:

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Вони лінійно незалежні, оскільки

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=ctg\beta x\neq const$,

і утворюють фундаментальну систему розв‘язків. Отже, загальний розв‘язок має такий вигляд:

$\overline{y}=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

<u>Приклад</u>. $y''+y'+y=0$.

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2+\lambda+1=0.$$

$\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$; $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Загальний розв‘язок: $\overline{y}=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$y''+py'+qy=f(x)$$

і відповідне йому однорідне

$$y''+py'+qy=0$$

Будемо шукати загальний розв‘язок у рівняння. Згідно теореми про загальний розв‘язок неоднорідного рівняння, він буде складатися із суми загального розв‘язку $\overline{y}$ однорідного рівняння і будь-якого частинного розв‘язку z неоднорідного рівняння, тобто $y=\overline{y}+z$. Методи знаходження загального розв‘язку однорідного рівняння розглянуті в попередньому параграфі. Знаходження частинного розв‘язку неоднорідного рівняння в загальному випадку дуже часто приводить до складних обчислень. Проте для рівняння з постійними коефіцієнтами у випадках, коли права частина має спеціальний вид, частинний розв‘язок вдається знайти методом невизначених коефіцієнтів, не звертаючись до квадратур.

Розглянемо деякі частинні випадки вигляду правої частини неоднорідного рівняння.

1. Права частина рівняння має вигляд $f(x)=P_m(x)$

де $P_m(x)$ є многочлен степені m, тобто $P_m(x)=a_0+a_1x+...+a_mx^m$, де $a_0, a_1,..., a_m$ - дійсні числа і $a_m\neq 0$. Тоді частинний розв‘язок шукається у вигляді

$$y(x)=x^s\left(A_0+A_1x+...+A_mx^m\right)$$

де $A_0+A_1x+...+A_mx^m$ - многочлен степені m з невизначеними коефіцієнтами. (Підкреслимо, що в цьому многочлені записуються всі коефіцієнти C_i незалежно від того, дорівнюють чи ні нулеві відповідні коефіцієнти a_i заданого многочлена $P_m(x)$).

Показник степені S дорівнює кратності коренів характеристичного рівняння $\lambda^2+p\lambda+q=0$.

Якщо $\lambda_1\neq\lambda_2\neq 0$, то $S=0$.

Якщо $\lambda_1\neq\lambda_2$ і $\lambda_1=0$ або $\lambda_2=0$ то $S=1$.

Якщо $\lambda_1=\lambda_2=0$, то $S=2$.

Підставляючи побудований частинний розв‘язок у вихідне рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x зліва і справа від знака рівності, знаходимо коефіцієнти A_i.

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв‘язок рівняння

$$y'' - 3y' - 4y = 1 + x^2$$

<u>Розв‘язання</u>.

Розглядаємо відповідне однорідне рівняння і шукаємо його загальний розв‘язок:

$y'' - 3y' - 4y = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння:

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$.

$\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$; $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$; $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 4$.

Записуємо загальний розв‘язок однорідного рівняння:

$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$.

Шукаємо частинний розв‘язок неоднорідного рівняння, виходячи з правої частини. Оскільки справа максимальна степінь x друга, то частинний розв‘язок записуємо у вигляді многочлена другого порядку з невизначеними коефіцієнтами:

$z = A + Bx + Cx^2$, $\left(A = A_0;\ B = A_1;\ C = A_2\right)$,

де A, B, C - невідомі коефіцієнти. Щоб їх визначити, знайдемо першу та другу похідні частинного розв‘язку і підставимо їх у рівняння (4.16):

$z = A + Bx + Cx^2$; $\qquad 4z = 4A + 4Bx + 4Cx^2$

$z' = B + 2Cx$; $\qquad 3z' = 3B + 6Cx$

$z'' = 2C$;

Підставляємо ці значення в ліву частину рівняння (4.16)

$2C - 3B - 6Cx - 4A - 4Bx - 4Cx^2 = 1 + 2x^2$.

Щоб знайти A, B та C, прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x зліва і справа від знака рівності:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -4C = 2; \\ x^1 & -6C - 4B = 0; \\ x^0 & 2C - 3B - 4A = 1; \end{array}$$

Розв‘язуючи цю систему рівнянь, отримуємо $C = -\dfrac{1}{2}$; $B = \dfrac{3}{2}$; $A = -\dfrac{17}{16}$, звідки записуємо частинний розв‘язок неоднорідного рівняння.

$z = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{17}{16}$

Загальний розв‘язок неоднорідного рівняння буде мати такий вид:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{17}{16}.$$

2. *Права частина рівняння має вигляд* $f(x) = ae^{\alpha x}$

де α *та* a *деякі дійсні числа.*

Можливі два випадки:

а) Якщо число α не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв‘язок має такий вигляд:

$$z = Ae^{\alpha x}$$

де A - невідома стала.

б) Якщо число α є коренем характеристичного рівняння кратності k $(k = 1,2)$, то

$$z = x^k A e^{\alpha x}$$

(тобто в частинному розв‘язку з‘являється додатковий множник x^k).

<u>Приклад 1</u>.

$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$: $A = 2$; $\alpha = 3$.

Знаходимо загальний розв‘язок однорідного рівняння: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

$\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$.

$\overline{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$:

$\alpha = 3$ не співпадає ні з $\lambda_1 = 1$, ні з $\lambda_2 = 2$, отже, частинний розв‘язок шукаємо у вигляді

$z = Ae^{3x}$;

$z' = 3Ae^{3x}$; $z'' = 9Ae^{3x}$.

Підставляємо ці значення у вихідне рівняння:

$9Ae^{3x} - 3 \cdot 3Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$;

$2Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow A = 1$, звідки

$z = e^{3x}$;

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + e^{3x}$.

<u>Приклад 2</u>.

$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$: $a = 4$; $\alpha = 2$.

$y'' - 4y' + 4y = 0$; $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$.

$\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$; $\qquad \overline{y} = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.

Число $\alpha = 2 = \lambda_1 = \lambda_2$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв‘язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$z = Ax^2 e^{2x}$;

$z' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2 e^{2x}$;

$z'' = 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} = 4Ax^2 e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x}$.

Підставляємо знайдені значення z, z', z'' у вихідне рівняння

$e^{2x}\left(4Ax^2 + 8Ax + 2A - 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2\right) = 4e^{2x}$;

$2Ae^{2x} = 4e^{2x} \Rightarrow A = 2$. Отже, частинний розв‘язок має такий вигляд: $z = 2x^2 e^{2x}$; а загальний записується так: $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x\right) + 2x^2 e^{2x} = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + 2x^2\right)$.

3. *Права частина рівняння має вигляд*

$f(x) = e^{\alpha x}\left(P\cos\beta x + R\sin\beta x\right)$,

де P, R, α та β - дійсні числа, $\beta \neq 0$.

Складаємо комплексне число $z = \alpha + i\beta$. Вигляд частинного розв‘язку рівняння (4.14) буде залежати від того, співпадає чи ні отримане $z = \alpha + i\beta$ з коренем характеристичного рівняння.

а) Якщо число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв‘язок шукаємо у вигляді

$z = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$

де A та B - невизначені коефіцієнти (відмітимо, що у частинному розв‘язку необхідно завжди брати обидва коефіцієнти, навіть у тому випадку, коли в правій частині (4.14) P чи R тотожньо дорівнюють нулеві).

б) Якщо число $\alpha + i\beta$ є корінь характеристичного рівняння кратності k, то частинний розв‘язок шукається у вигляді

$z = x^k e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$.

<u>Приклад 1</u>.

$y'' + y' - 2y = e^x\left(\cos x - 7\sin x\right)$.

В цьому рівнянні $P = 1$, $R = -7$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $z = 1 + i$.

Складаємо характеристичне рівняння:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$; $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$;

$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Оскільки побудоване $z = 1 + i$ не співпадає ні з λ_1, ні з λ_2, то частинний розв‘язок шукаємо у вигляді $z = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right)$,

де A та B - невизначені коефіцієнти.

Для їх визначення підставляємо z, z' та z'' у вихідне рівняння.

$$z' = e^x A\cos x + e^x B\sin x - e^x A\sin x + B\cos x = e^x\left(\left(A + B\right)\cos x + \left(B - A\right)\sin x\right)$$

$$z'' = e^x\left(2B\cos x - 2A\sin x\right).$$

$$e^x\left(2B\cos x - 2A\sin x + \left(A + B\right)\cos x + \left(B - A\right)\sin x - 2A\cos x - 2B\sin x\right) = e^x\left(\cos x - 7\sin x\right)$$

Зводимо подібні члени:

$$\left(3B - A\right)\cos x - \left(3A + B\right)\sin x = \cos x - 7\sin x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$:

$\begin{cases} 3B - A = 1 \\ 3A + B = 7 \end{cases} \Rightarrow B = 1;\ A = 2$: Підставляємо A та B у частинний розв‘язок:

$$z = e^x\left(2\cos x + \sin x\right).$$

Загальний розв‘язок:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + e^x\left(2\cos x + \sin x\right).$$

Приклад 2.

$$y'' + y = 2\sin x;$$

Перепишемо це рівняння так:

$$y'' + y = e^{0\cdot x}\left(0\cdot\cos x + 2\cdot\sin x\right).$$

Звідси маємо: $P = 0$; $R = 2$; $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $z = 1\cdot i = i$.

Складаємо характеристичне рівняння:

$\lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$; $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{1}$; $\lambda_1 = i$; $\lambda_2 = -i$.

Записуємо загальний розв‘язок однорідного рівняння: $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Оскільки $z = i$ співпадає з $\lambda_1 = i$ (є однократним коренем характеристичного рівняння), то частинний розв‘язок шукаємо у вигляді

$$z = x\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

$$z' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x = \left(A + Bx\right)\cos x + \left(-Ax + B\right)\sin x.$$

$$z'' = \left(2B - Ax\right)\cos x - \left(2A + Bx\right)\sin x.$$

Підставляємо у рівняння $y^{*''}$ та y^*:

$$\left(2B - Ax\right)\cos x - \left(2A + Bx\right)\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = 2\sin x.$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = 2\sin x;$$

$B=0;\ A=-1;$ Записуємо частинний розв‘зок: $y^* = -x\cos x$

Загальний розв‘язок:

$y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x$.

<u>Примітка</u>. Розглянуті варіанти різних виразів правої частини рівняння є частинними випадками функції виду

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x\right)$$

де α та β - дійсні числа, $P_m(x)$ та $P_n(x)$ - многочлени степенів m та n відповідно.

Можна показати, що частинний розв‘язок рівняння з правою частиною слід шукати у вигляді

$$z = x^k e^{\alpha x}\left(Q_r(x)\cos\beta x + P_r(x)\sin\beta x\right)$$

де k - кратність кореня $z=\alpha+i\beta$ характеристичного многочлена, $Q_r(x)$ та $P_r(x)$ - многочлени з невизначеними коефіцієнтами, степінь яких дорівнює найбільшому із степенів многочленів $P_m(x)$ та $P_n(x)$. Коефіцієнти многочленів $Q_r(x)$ та $P_r(x)$ знаходяться з системи лінійних рівнянь, що отримується після підстановки розв‘язку та його похідних у вихідне рівняння.