Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку

Одним із методів розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку є метод пониження порядку. Він полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до диференціального рівняння першого порядку.

Розглянемо два типи таких диференціальних рівнянь.

1°. Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду

$$F\left(x, y', y''\right) = 0, \qquad (24)$$

або

$$y'' = f\left(x, y'\right), \qquad (25)$$

яке не містить явно шуканої функції $y = y(x)$.

Зробимо заміну $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'$. Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F\left(x, z, z'\right) = 0, \text{ або } z' = f\left(x, z\right), \qquad (26)$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, C_1)$ рівняння (26), то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $y' = z(x, C_1)$. Звідси маємо загальний розв'язок $y = \int z(x, C_1)\,dx + C_2$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

86. $y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{1}{x^6}$, якщо $y(-1) = \frac{1}{4}$, $y'(-1) = 4$.

⌈ Маємо рівняння виду (25). Зробимо заміну $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Дістанемо рівняння $z' = -\frac{4}{x}z + \frac{1}{x^6}$. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуємо його за методом Бернуллі: $z = u(x)\cdot v(x)$, $z' = u'v + uv'$. Тоді

$$u'v + uv' + \frac{4}{x}uv = \frac{1}{x^6},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{4}{x}v\right) = \frac{1}{x^6}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, $v' + \frac{4}{x}v = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4}{x}v,\ \frac{dv}{v} = -\frac{4}{x}dx,\ \int\frac{dv}{v} = -4\int\frac{dx}{x},\ \ln|v| = -4\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\frac{1}{x^4},\ v = \frac{1}{x^4}.$$

Підставляючи функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u'\cdot\frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^6},\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2},\quad du = \frac{dx}{x^2},\quad u = \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_1.$$

Тоді $z = u\cdot v = \frac{1}{x^4}\cdot\left(-\frac{1}{x} + C_1\right) = \frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$.

Але $z = y'$. Тому маємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$, $dy = \left(\frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)dx$,

$$y = \int\left(\frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)dx = C_1\int x^{-4}dx - \int x^{-5}dx = C_1\cdot\frac{x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-4}}{-4} + C_2 = \frac{1}{4x^4} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2.$$

Маємо загальний розв'язок рівняння $y = \frac{1}{4x^4} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(-1) = \frac{1}{4}$, $y'(-1) = 4$:

$$\begin{cases} y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{C_1}{3} + C_2 = \frac{1}{4} \\ y'(-1) = C_1 + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + C_2 = 0 \\ C_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^3} - 1$. ⌋

87. $y''x\ln x = y'$.

$\ulcorner$ Дане рівняння запишемо у вигляді $y'' = \dfrac{y'}{x\ln x}$ і отримаємо рівняння виду (25). Зробимо заміну $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = \dfrac{z}{x\ln x}$. Розв'язуємо його:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x\ln x},\ \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\ln x},\ \int\frac{dz}{z} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x},\ \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1,\ \ln|z| = \ln|C_1\ln x|,\ z = C_1\ln x.$$

Але $z = y'$. Тому маємо

$$\frac{dy}{dx} = C_1\ln x,\ dy = C_1\ln x\,dx,\ \int dy = C_1\int\ln x\,dx,\ \text{звідки}$$

$$y = C_1x(\ln x - 1) + C_2.\ \lrcorner$$

2°. Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду

$$F(y, y', y'') = 0, \qquad (27)$$

або

$$y'' = f(y, y'), \qquad (28)$$

яке не містить явно незалежну змінну x.

Зробимо заміну $y' = p(y)$, де p вважається функцією від y. Тоді $y'' = (y')' = p'_x = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = p'_y\cdot y'_x = p'_y\cdot p = pp'_y$. Тому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(y, p, pp'_y) = 0,\ \text{або}\ pp'_y = f(y, p). \qquad (29)$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння (29) $p = p(y, C_1)$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = p(y, C_1),\ \frac{dy}{dx} = p(y, C_1),\ \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx,\ \int\frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2.$$

Обчисливши невизначений інтеграл, отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) рівняння (27) або (28).

Розв'язати диференціальні рівняння.

88. $y'' = -\dfrac{2}{y^5}$, якщо $y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду (28). Зробимо заміну $y' = p(y)$, $y'' = pp'_y$. Дістанемо рівняння виду (31) з відокремлюваними змінними: $pp'_y = -\dfrac{2}{y^5}$.

Розв'яжемо його:

$$p\frac{dp}{dy} = -\frac{2}{y^5},\ \ p\,dp = -\frac{2}{y^5}dy,\ \int p\,dp = -2\int y^{-5}dy,\ \frac{p^2}{2} = -2\frac{y^{-4}}{-4} + C_1,\ p^2 = y^{-4} + 2C_1,\ p^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1,$$

$$(y')^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1.$$

Так як потрібно знайти тільки такий частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, то можливо одразу знайти C_1 (підставляючи в отриману рівність умови $y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1$):

$$1 = 1 + 2C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0.$$

Тому маємо $(y')^2 = \dfrac{1}{y^4}$, звідки $y' = \dfrac{1}{y^2}$ (врахували початкову умову $y'(-1) = 1$).

Розв'язуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2},\ y^2dy = dx,\ \int y^2dy = \int dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = x + C_2 \Leftrightarrow y^3 = 3x + 3C_2.$$

Підставляємо початкову умову $y(-1) = 1$ і знаходимо: $1^3 = 3\cdot(-1) + 3C_2$, $3C_2 = 4$, $C_2 = \dfrac{4}{3}$. Тоді $y^3 = 3x + 4$. Остаточно маємо $y = \sqrt[3]{3x + 4}$. $\lrcorner$

89. $y''(1 + y) - 5(y')^2 = 0$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду (27). Зробимо заміну $y' = p(y)$, $y'' = pp'_y$. Дістанемо рівняння $pp'_y(1+y) - 5p^2 = 0$. Виносимо спільний множник p за дужки:

$p\left(p'_y(1+y) - 5p\right) = 0$.

Можливі два випадки.

1) $p = 0$, тоді $y' = 0$, $y = \text{const}$.

2) $p'_y(1+y) - 5p = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язуємо його:

$$(1+y)\frac{dp}{dy} = 5p,\ \frac{dp}{p} = \frac{5dy}{y+1},\ \int\frac{dp}{p} = 5\int\frac{dy}{y+1},\ \ln|p| = 5\ln|y+1| + \ln C_1,\ \ln|p| = \ln\left|C_1\cdot(y+1)^5\right|,\ p = C_1(y+1)^5,$$

$$y' = C_1(y+1)^5.$$

Це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язуємо його: $\frac{dy}{dx} = C_1(y+1)^5$, $\frac{dy}{(y+1)^5} = C_1dx$, $\int(y+1)^{-5}dy = C_1\int dx$, $\frac{(y+1)^{-4}}{-4} = C_1x + C_2$, $\frac{1}{4(y+1)^4} = C_1x + C_2$, $(y+1)^4 = \frac{1}{C_1x + C_2}$.

Зауважимо, що розв’язок $y = \text{const}$ дістаємо із загального розв’язку при $C_1 = 0$. $\lrcorner$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (30)$$

де p і q – дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (31)$$

називається відповідним *характеристичним рівнянням*.

Загальний розв’язок рівняння (30) залежить від значень коренів характеристичного рівняння. Можливі три випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння (31) дійсні та різні, тобто $k_1 \neq k_2$, то загальний розв’язок диференціального рівняння (31) має вигляд:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \qquad (32)$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2x). \qquad (33)$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені $\left(D = p^2 - 4q < 0\right)$, тобто $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, де $i = \sqrt{-1}$ (*уявна одиниця*), $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, то

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \qquad (34)$$

У формулах (32) – (34) C_1 і C_2 довільні сталі.

Розв’язати диференціальні рівняння.

94. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду (30). Запишемо його характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Розв’яжемо його: $D = (-5)^2 - 4\cdot4\cdot1 = 25 - 16 = 9 > 0$, тоді $k_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ і $k_2 = \frac{5+3}{2} = 4$.

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Тому за формулою (32) загальний розв’язок диференціального рівняння – $y = C_1e^x + C_2e^{4x}$. $\lrcorner$

95. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду (30). Його характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 8k + 16 = 0$, або $(k+4)^2 = 0$. Тому $k_1 = k_2 = -4$, тобто маємо другий випадок. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв’язок диференціального рівняння: $y = e^{-4x}(C_1 + C_2x)$. $\lrcorner$

96. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду (30). Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2+2k+10=0$. Розв'язуємо його: $D=2^2-4\cdot1\cdot10=4-40=-36$, $k_1=\dfrac{-2-\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{-2-6i}{2}=-1-3i$, $k_2=\dfrac{-2+\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{-2+6i}{2}=-1+3i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. Це третій випадок. При цьому $\alpha=-1$, $\beta=3$. Тому за формулою (34) записуємо загальний розв'язок рівняння: $y=e^{-x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$. $\lrcorner$

97. $y''+25y=0$.

$\ulcorner$ Характеристичне рівняння має вигляд $k^2+25=0$. Розв'язуємо його: $k^2=-25$, $k=\pm\sqrt{-25}=\pm5i$. Тоді $k_1=-5i$, а $k_2=5i$. Маємо третій випадок. При цьому $\alpha=0$, $\beta=5$. Тому за формулою (34) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий: $y=C_1\cos5x+C_2\sin5x$. $\lrcorner$

98. $y''-2y'+1=0$, якщо $y(0)=2$, $y'(0)=7$.

$\ulcorner$ Характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння має вигляд $k^2-2k+1=0\Leftrightarrow (k-1)^2=0$. Його корені $k_1=k_2=1$ дійсні та рівні. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y=e^x(C_1+C_2x)$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(0)=2$, $y'(0)=7$. Знайдемо похідну:

$$y'=\left(e^x(C_1+C_2x)\right)'=\left(e^x\right)'(C_1+C_2x)+e^x\cdot(C_1+C_2x)'=$$
$$=e^x(C_1+C_2x)+e^x\cdot C_2=e^x(C_1+C_2x+C_2),$$
$$\begin{cases} y(0)=C_1=2 \\ y'(0)=C_1+C_2=7 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C_1=2 \\ C_2=5. \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y=e^x(2+5x)$. $\lrcorner$

Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a_{11}x+a_{12}y \\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y, \end{aligned} \qquad (35)$$

де коефіцієнти a_{ij} – сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається *однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Задача Коші для системи (35) полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=y_0. \qquad (36)$$

Розв'язання системи (35) виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12}\neq0$, виразимо в ньому y через x:

$$y=\frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt}-\frac{a_{11}}{a_{12}}x. \qquad (37)$$

Продиференціюємо цю рівність по t:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt}. \qquad (38)$$

Підставляючи вирази (37) і (38) в друге рівняння системи (35), отримаємо

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt}=a_{21}x+a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt}-\frac{a_{11}}{a_{12}}x\right),$$

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{22}}{a_{12}}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{22}-a_{21}\right)x=0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(a_{11}+a_{22})\frac{dx}{dt}+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=0. \qquad (39)$$

Рівняння (39) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30) з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$. Розв'язуємо його відносно $x(t)$. Після цього за формулою (37) знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні системи (35) коефіцієнт $a_{12}=0$, то це рівняння матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}x .$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, підставимо знайдену функцію $x(t)$ в друге рівняння системи (35) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Розв'язуємо його і записуємо остаточну відповідь.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

108. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+5y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y. \end{cases}$

$\ulcorner$ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y:

$$\frac{dx}{dt}=-x+5y\,,\quad 5y=\frac{dx}{dt}+x\,,\quad y=\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{5}x\,.$$

Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}\,.$$

Підставимо знайдені y та $\dfrac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}=x+3\left(\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{5}x\right),\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=5x+3\frac{dx}{dt}+3x\,,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-8x=0\,.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2-2k-8=0$ є $k_1=-2$ і $k_2=4$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Так як $\dfrac{dx}{dt}=-2C_1e^{-2t}+4C_2e^{4t}$, то підставляючи знайдені $x(t)$ та $\dfrac{dx}{dt}$ у вираз для y ($y=\dfrac{1}{5}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{1}{5}x$), отримаємо

$$y(t)=\frac{1}{5}\left(-2C_1e^{-2t}+4C_2e^{4t}\right)+\frac{1}{5}\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}\right),\quad y(t)=-\frac{1}{5}C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}\,.$$

Запишемо тепер загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{4t} \\ y(t)=-\dfrac{1}{5}C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}. \end{cases}\quad \lrcorner$$

109. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+8y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y. \end{cases}$

$\ulcorner$ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y: $\dfrac{dx}{dt}=2x+8y$, $8y=\dfrac{dx}{dt}-2x$, $y=\dfrac{1}{8}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{1}{4}x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо: $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{8}\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{4}\frac{dx}{dt}=x+4\left(\frac{1}{8}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{4}x\right),\quad \frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}=8x+4\frac{dx}{dt}-8x\,,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}=0\,.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами виду 31 . Коренями його характеристичного рівняння $k^2-6k=0$ є $k_1=0$ і $k_2=6$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:

$x\ \ t\ =C_1+C_2e^{6t}$, де C_1 і C_2 довільні сталі. Так як $\dfrac{dx}{dt}=6C_2e^{6t}$, то підставивши ці вирази у вираз для y ($y=\dfrac{1}{8}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{1}{4}x$), отримаємо

$$y\ \ t\ =\frac{1}{8}\cdot 6C_2e^{6t}-\frac{1}{4}\ \ C_1+C_2e^{6t}\ \ =-\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{6t}\,.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x\ \ t\ =C_1+C_2e^{6t} \\ y\ \ t\ =-\dfrac{1}{4}C_1+\dfrac{1}{2}C_2e^{6t}. \end{cases} \lrcorner$$

110. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=8x+y, \end{cases}$

якщо $x(0)=4$, $y(0)=2$.

$\ulcorner$ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y: $\dfrac{dx}{dt}=3x+y$, $y=\dfrac{dx}{dt}-3x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}=8x+\frac{dx}{dt}-3x\,,\quad \frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-5x=0\,.$$

Це рівняння виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2-4k-5=0$ є $k_1=-1$ і $k_2=5$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}$. Так як $\dfrac{dx}{dt}=-C_1e^{-t}+5C_2e^{5t}$, то підставляючи ці вирази у вираз для y $\left(y=\dfrac{dx}{dt}-3x\right)$, отримаємо

$$y(t)=-C_1e^{-t}+5C_2e^{5t}-3\left(C_1e^{-t}+C_2e^{5t}\right)=-4C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}\,.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{5t} \\ y(t)=-4C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з початковими умовами виду (36) $x(0)=4$, $y(0)=2$:

$$\begin{cases} C_1+C_2=4 \\ -4C_1+2C_2=2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=3. \end{cases}$$

Записуємо частинний розв'язок системи, підставляючи в загальний розв'язок знайдені значення $C_1=1$ і $C_2=3$:

$$\begin{cases} x(t)=e^{-t}+3e^{5t} \\ y(t)=-4e^{-t}+6e^{5t}. \end{cases} \lrcorner$$