РЯДИ

1. Числові ряди. Основні поняття

Нехай задано числову послідовність $a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Вираз

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

називається *числовим рядом*. Числа $a_1,\ a_2, \ldots$ називають *членами* ряду, a_n – *загальним членом* ряду.

Суми $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, …, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, … називають *частковими сумами* ряду (1).

Якщо існує скінченна границя послідовності $\{S_n\}$ часткових сум

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (2)$$

то ряд (1) називають *збіжним*, а число S – *сумою* ряду.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або дорівнює ∞, то ряд (1) називають *розбіжним*.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, тобто загальний член ряду не прямує до нуля, то ряд (1) розбіжний.

1. Дослідити на збіжність ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$.

$\ulcorner$ Члени цього ряду утворюють геометричну прогресію. За відомою з елементарної математики формулою маємо

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ якщо } q \neq 1.$$

Розглянемо чотири випадки.

1) $|q| > 1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ і тому ряд розбіжний.

2) $|q| < 1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}\cdot\left(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n\right) = \dfrac{1}{1-q}\cdot(1-0) = \dfrac{1}{1-q}$.

Отже, в цьому випадку ряд збіжний і його сума $S = \dfrac{1}{1-q}$.

3) $q = -1$. Тоді $S_n = \left[\begin{array}{ll} 0, & \text{якщо } n - \text{парне} \\ 1, & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{array}\right.$ В цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує і, отже, ряд розбіжний.

4) $q = 1$. Тоді маємо ряд $1 + 1 + \ldots$, який, очевидно, розбіжний ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$).

<u>Висновок</u>: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ збіжний при $|q| < 1$. $\lrcorner$

2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$.

$\ulcorner$ Представимо загальний член ряду $\dfrac{1}{n(n+1)}$ у вигляді

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Запишемо n-ну часткову суму ряду

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

так як усі доданки з другого до передостаннього взаємно знищуються.

Згідно з (2) знаходимо границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$. Отже, сума ряду $S = 1$. $\lrcorner$

3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} + \cdots$.

$\ulcorner$ Цей ряд розбіжний, так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

4. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

5. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^2+2}$.

Відповіді:

4. $S=\frac{1}{2}$. **5.** $S=\frac{3}{4}$. **6.** Розбіжний.