ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y':

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \qquad (1)$$

Розв'язавши рівняння (1) відносно y' (якщо це можливо), приходимо до диференціального рівняння

$$y' = f(x,\ y), \qquad (2)$$

яке називають *розв'язаним відносно похідної*.

Розв'язком рівняння (1) (або (2)) на інтервалі $(a,\ b)$ називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх x з інтервалу $(a,\ b)$.

Загальним розв'язком рівняння (1) (або (2)) називають функцію $y = \varphi(x,\ C)$, яка є розв'язком даного рівняння при будь-якому фіксованому значенні сталої C і для довільної *початкової умови* $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ задовольняє початкову умову. Розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ називають *частинним* або *розв'язком задачі Коші*.

Співвідношення $G(x,\ y,\ C) = 0$, яким загальний розв'язок $y = \varphi(x,\ C)$ рівняння (1) задається неявно, називають *загальним інтегралом* рівняння (1). При конкретному значенні $C = C_0$ співвідношення $G(x,\ y,\ C_0) = 0$ називають *частинним інтегралом*.

Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x) \qquad (3)$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, або $dy = f(x)dx$. Інтегруємо $\int dy = \int f(x)dx + C$ і отримуємо $y = \int f(x)dx + C$. Тут під невизначеним інтегралом розуміємо одну з первісних функції $f(x)$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' = x^2 + 4x - 7$.

┌ Це рівняння виду (3). Розв'яжемо його за наведеною вище схемою:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 7, \quad dy = (x^2 + 4x - 7)dx,$$

$$\int dy = \int (x^2 + 4x - 7)dx, \quad y = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 7x + C, \text{ або}$$

$y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C$ – загальний розв'язок заданого диференціального рівняння. ┘

2. $y' = \cos x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$.

┌ Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad dy = \cos x\, dx,$$

$\int dy = \int \cos x\, dx, \quad y = \sin x + C$ – загальний розв'язок.

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші. За умовою задачі $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$. Тому, підставляючи в загальний розв'язок $y = 3$ та $x = \dfrac{\pi}{2}$, маємо $3 = \sin\dfrac{\pi}{2} + C$, $3 = 1 + C$, $C = 3 - 1 = 2$. Підставивши $C = 2$ в загальний розв'язок, знаходимо частинний розв'язок $y = \sin x + 2$. ┘

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння виду

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad (4)$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Права частина рівняння (4) є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від x, а друга – лише від y.

Подамо схему розв’язання диференціального рівняння (4). Так як $y'=\frac{dy}{dx}$, то маємо $y'=f(x)\cdot g(y)$, або $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$. Помножимо обидві частини рівності на вираз $\frac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y)\neq 0$). Отримаємо рівняння з *відокремленими змінними*

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx. \tag{5}$$

У лівій частині рівності (5) маємо диференціал деякої функції по змінній y, а у правій – по змінній x.

Інтегруючи рівняння (5)

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C, \tag{6}$$

отримаємо загальний інтеграл (розв’язок) диференціального рівняння (4).

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)g_1(y)dy+f_2(x)g_2(y)dx=0 \tag{7}$$

зводиться до диференціального рівняння (4). Поділимо ліву і праву частини рівняння (7) на добуток функцій $f_1(x)\cdot g_2(y)\neq 0$ і перенесемо вираз, який містить диференціал dx, вправо:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Інтегруючи ліву частину за змінною y, а праву – за змінною x, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (7):

$$\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=-\int\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx+C.$$

Розв’язати диференціальні рівняння:

3. $y'=\frac{y}{x}$.

⌈ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y'=\frac{y}{x}=\frac{1}{x}\cdot y$. Оскільки $y'=\frac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на dx і поділимо на y. Отримаємо

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$, $\ln|y|=\ln|x|+\ln C$, $\ln|y|=\ln|C\,x|$, звідки знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння – $y=Cx$. ⌋

4. $\left(1+e^{2x}\right)y^2y'=e^x$.

⌈ Розв’яжемо задане рівняння відносно y':

$$y'=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y'=\frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на y^2dx:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2}, \quad y^2\,dy=\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$$

Звідси маємо

$\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$, $\int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2}$, $\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C$, $y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x + C$, звідки маємо загальний розв’язок $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x + C}$. ⌋

5. $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$, якщо $y\left(\sqrt{3}\right) = 0$.

⌈ Розв’яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dx$:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C, \text{ або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}. \qquad (*)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Тому, підставляючи вказані значення y та x у формулу ($*$), знаходимо сталу C:

$$\sqrt{1+0^2} = C - \sqrt{1+3}, \quad 1+2 = C, \quad C = 3.$$

Отже, частинний інтеграл заданого рівняння має вигляд $\sqrt{1+y^2} = 3 - \sqrt{1+x^2}$. ⌋

3. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $y' = f\left(x,\, y\right)$ називають *однорідним*, якщо функція $f\left(x,\, y\right)$ є *однорідною функцією нульового виміру*, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f\left(tx,\, ty\right) = f\left(x,\, y\right). \qquad (9)$$

Покладемо $t = \frac{1}{x}$: $f\left(tx,\, ty\right) = f\left(1,\, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$. Тоді, з урахуванням (9), рівняння (2) запишеться у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (10)$$

Для розв’язання рівняння (10) введемо допоміжну невідому функцію $u = u\left(x\right)$, поклавши

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або}$$

$$y = ux, \qquad (11)$$

і перетворимо однорідне рівняння у рівняння з відокремлюваними змінними. З (11) знаходимо $y' = u'x + u$. Тому рівняння (10) запишеться у вигляді

$$u + xu' = g\left(u\right), \quad \text{або} \quad x\frac{du}{dx} = g\left(u\right) - u.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{du}{g\left(u\right) - u} = \frac{dx}{x}. \qquad (12)$$

Проінтегрувавши рівняння (12), одержимо $\int \frac{du}{g\left(u\right)-u} = \ln\left|x\right| + C$. Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Розв’язати диференціальні рівняння:

6. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

$\ulcorner$ Права частина даного рівняння – функція $f(x,\, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2\left(x^2 + y^2\right)}{2t^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x,\, y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{x^2\left(1 + u^2\right)}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{1 + u^2}{2}, \quad u'x = \frac{1 + u^2}{2} - u, \qquad u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2},$$

$$u'x = \frac{(u-1)^2}{2},$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}. \qquad (*)$$

Диференціальне рівняння ($*$) – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \quad \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \dfrac{y}{x}$:

$\dfrac{-2}{\dfrac{y}{x} - 1} = \ln C|x|$, $\quad \dfrac{-2x}{y - x} = \ln C|x|$, звідки знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння – $y = x - \dfrac{2x}{\ln C|x|}$. $\lrcorner$

7. $\left(x^2 - xy\right)dy + y^2dx = 0$.

$\ulcorner$ $\left(x^2 - xy\right)dy = -y^2dx$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y^2}{x^2 - xy}$, $\quad y' = \dfrac{-y^2}{x^2 - xy}$.

Права частина рівняння – функція $f(x,\, y) = \dfrac{-y^2}{x^2 - xy}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{-(ty)^2}{(tx)^2 - txty} = \frac{-t^2y^2}{t^2\left(x^2 - y^2\right)} = \frac{-y^2}{x^2 - y^2} = f(x,\, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{-u^2x^2}{x^2 - x \cdot ux}, \qquad u'x + u = \frac{-u^2x^2}{x^2(1-u)}, \qquad u'x + u = \frac{-u^2}{1-u},$$

$$u'x = \frac{-u^2}{1-u} - u, \qquad u'x = \frac{-u^2 - u + u^2}{1-u}, \qquad u'x = \frac{-u}{1-u}, \qquad u'x = \frac{u}{u-1},$$

$$u' = \frac{u}{u-1} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{u-1}{u} \cdot du = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{u-1}{u} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad u - \ln|u| = \ln|x| + \ln C, \quad u = \ln C|x| + \ln|u|,$$

$$u = \ln\left(C|xu|\right), \quad \frac{y}{x} = \ln\left(C\left|x \cdot \frac{y}{x}\right|\right), \text{ звідки } \; y = x\ln C|y|. \quad \lrcorner$$

4. Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x), \qquad (13)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(a,\,b)$, називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

У випадку, коли $P(x)=\pm Q(x)$ або $Q(x)=0$, рівняння (13) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв’язання рівняння (13). Розглянемо один із них – *метод Бернуллі*. Розв’язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y=u\cdot v\,, \qquad (14)$$

де $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (13).

Знаходимо похідну функції y: $y'=u'v+uv'$. Підставляючи y та y' в рівняння (13), отримаємо

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x),$$

$$u'v+u\left(v'+P(x)v\right)=Q(x)\,. \qquad (15)$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v'+P(x)v=0\,. \qquad (16)$$

Знаходимо v з рівняння (16), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dv}{dx}=-P(x)v$, $\dfrac{dv}{v}=-P(x)dx$, звідки $\ln|v|=-\int P(x)dx$, або $v=e^{-\int P(x)dx}$. Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v, знаходимо u з рівняння $u'v=Q(x)$, яке випливає з (15) та (16):

$$v\frac{du}{dx}=Q(x), \qquad \frac{du}{dx}=\frac{Q(x)}{v}=Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\,, \qquad u=\int Q(x)e^{\int P(x)}dx+C\,.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (14) і отримуємо загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння:

$$y=u\cdot v=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right). \qquad (17)$$

При розв’язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (17).

Розв’язати диференціальні рівняння:

8. $y'-\dfrac{2}{x}y=2x^3$.

⌈ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв’язок шукаємо у вигляді $y=uv$ (див. формулу (14)). Тоді $y'=u'v+uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v+uv'-\frac{2uv}{x}=2x^3,$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=2x^3\,. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v'-\frac{2v}{x}=0\,. \qquad (**)$$

Знаходимо v:

$v'=\dfrac{2v}{x}$, $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v}{x}$, $\dfrac{dv}{v}=2\dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{dv}{v}=2\int\dfrac{dx}{x}$, $\ln|v|=2\ln|x|$, $\ln|v|=\ln x^2$, звідки $v=x^2$.

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв’язків рівняння ($**$), то тут і надалі у методі Бернуллі, після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v, покладаємо $C=0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\cdot x^2=2x^3$, $u'=\dfrac{2x^3}{x^2}$,

$$\frac{du}{dx}=2x\,, \quad du=2x\,dx\,, \quad \int du=\int 2x\,dx\,, \quad u=2\cdot\frac{x^2}{2}+C\,, \quad u=x^2+C\,.$$

За формулою (14) знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння – $y=uv=\left(x^2+C\right)x^2$. ⌋

9. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

$\ulcorner$ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,$$
$$u'v + u\left(v' + v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos^2 x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Знаходимо v:

$v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$, $\dfrac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x$, $\dfrac{dv}{v} = -\,\mathrm{tg}\,x\,dx$, $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx$, $\ln|v| = \ln|\cos x|$, звідки $v = \cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \cos x = \cos^2 x$, $u' = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$, $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $du = \cos x\,dx$, $\displaystyle\int du = \int \cos x\,dx$, звідки $u = \sin x + C$.

За формулою (14) маємо $y = uv = \left(\sin x + C\right)\cos x$. $\lrcorner$

10. $y' - \dfrac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y(0) = 2$.

$\ulcorner$ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2+1}uv = x\sqrt{x^2+1},$$
$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1}v\right) = x\sqrt{x^2+1}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \dfrac{2xv}{x^2+1} = 0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2xv}{x^2+1}$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2x}{x^2+1}dx$, $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$, $\ln|v| = \ln\left|x^2+1\right|$, $v = x^2+1$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\left(x^2+1\right) = x\sqrt{x^2+1}$,

$u' = x\sqrt{x^2+1} \cdot \dfrac{1}{x^2+1}$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\quad du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$,

$\displaystyle\int du = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $\quad u = \sqrt{x^2+1} + C$.

Отже, $y = uv = \left(\sqrt{x^2+1} + C\right) \cdot \left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 2$ при $x = 0$. Тоді отримаємо $2 = \left(1 + C\right) \cdot 1$, $C = 1$. Отже, частинний розв'язок

$y = \left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)\left(x^2+1\right)$, $\quad y = \left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1$,

або $y = \sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + x^2 + 1$. $\lrcorner$

5. Диференціальне рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^{\alpha} \text{ або } y' = -P(x)y + Q(x) \cdot y^{\alpha}, \qquad (18)$$

де функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b), $\alpha \in R$, причому $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*.

При $\alpha = 0$ рівняння (18) перетворюється в лінійне диференціальне рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$, розглянуте раніше, а при $\alpha = 1$ – в рівняння з відокремлюваними змінними $y' = \left(Q(x) - P(x)\right)y$.

Розв'язок рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді $y = u \cdot v$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

11. $x^2y^2\dfrac{dy}{dx} + xy^3 = a^2$ (a – стала).

⌈ $x^2y^2y' + xy^3 = a^2$, $y^2y' + \frac{xy^3}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}$, $y' + \frac{y}{x} = \frac{a^2}{x^2y^2}$. Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y = uv$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{a^2}{x^2u^2v^2},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{a^2}{x^2u^2v^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}$, $\ln|v| = -\ln|x|$, $v = \frac{1}{x}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x} = \frac{a^2}{x^2\cdot u^2\,\frac{1}{x^2}}$, $\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x} = \frac{a^2}{u^2}$,

$u^2du = a^2xdx$,

$\int u^2du = a^2\int x\,dx$, $\frac{u^3}{3} = a^2\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$, $u = \sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2} + C\right)}$.

$y = uv = \frac{1}{x}\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2} + C\right)}$, або $y^3 = \frac{3}{2}\frac{a^2}{x} + \frac{C}{x^3}$. ⌋

12. $y' + xy = 3xy^3$.

⌈ Це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + xuv = 3x\,(uv)^3,$$

$$u'v + u\,(v' + xv) = 3x\cdot(vu)^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + xv = 0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{dx} = -xv$, $\frac{dv}{v} = -xdx$, $\int\frac{dv}{v} = -\int xdx$, $\ln|v| = -\frac{x^2}{2}$, $v = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\,e^{\frac{-x^2}{2}} = 3xu^3\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^3$,

$\frac{du}{dx} = 3xe^{-x^2}u^3$;

$$\frac{du}{u^3} = 3xe^{-x^2}dx, \quad \int\frac{du}{u^3} = 3\int xe^{-x^2}dx.$$

1) $\int\frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = -\frac{u^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2u^2} + C$;

2) $\int xe^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int e^tdt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.

Отже, $\frac{1}{u^2} = \frac{3}{e^{x^2}} + C$, $\frac{1}{u^2} = 3e^{-x^2} + C$, $u^2 = \frac{e^{x^2}}{3 + Ce^{x^2}}$, $u = \pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}$.

$y = uv = \pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, або $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}$. ⌋

6. Класифікація диференціальних рівнянь першого порядку

При розв'язанні диференціальних рівнянь першого порядку найпершим (і принциповим) кроком є визначення типу рівняння. Від цього у великій мірі залежить можливість розв'язання диференціального рівняння. Тому слід запам'ятати основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, які класифіковано у наступній таблиці:

№ п/п	*Вид рівняння*	*Назва диференціального рівняння*

I	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
II	$y' = f(x) \cdot g(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
III	$y' = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру	Однорідне рівняння
IV	$y' = -P(x)y + Q(x)$	Лінійне рівняння
V	$y' = -P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$	Рівняння Бернуллі

Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до виду $y' = f(x, y)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Диференціальне рівняння може належати одночасно до кількох типів. Наприклад, рівняння $y' = \frac{y}{x}$ відноситься до усіх типів, крім першого. Але найпростіше його розв'язувати як диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.