ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7
УХВАЛЕННЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

Мета работи:

Ознайомиться з методами ухвалення рішень в умовах ризику.

Вирішити задачу прийняття рішень в умовах ризику, використовуючи критерій “очікуване значення – дисперсія” для конкретного прикладу.

7.1. Основні теоретичні відомості

Якщо в процесі ухвалення рішень є декілька результатів і у ЛПР є повна інформація про ступінь можливості результатів операції для кожного вирішення у вигляді імовірнісного розподілу на множині можливих результатів, то завдання називається стохастично (частково) невизначеним. Передбачається, що невідомі чинники статистично стійкі і тому є звичайними об'єктами теорії ймовірності – випадковими величинами (або випадковими функціями, подіями і так далі). При цьому мають бути відомі або визначені при постановці завдання всі необхідні статистичні характеристики (закони розподілу і їх параметри). Цей проміжний випадок (часткової невизначеності) відповідає ситуації ризику. Ухвалення рішень в умовах ризику може бути засноване на одному з наступних критеріїв:

- Критерій очікуваного значення;
- Критерій "очікуваного значення – дисперсія";
- Критерій граничного рівня;
- Критерій найбільш вірогідного результату.

Розглянемо застосування цих критеріїв.

7.1.1. Критерій очікуваного значення

Використання критерію очікуваного значення обумовлене прагненням максимізувати очікуваний прибуток (або мінімізувати очікувані витрати) за наявності даних про ймовірність отриманого результату при тому або іншому рішенні. Як критерій очікуваного значення використовуються вибіркові середні значення $\bar{x}$ випадкової величини (в.в.) X. Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значення випадкової величини X, то їх вибіркове середнє (середнє арифметичне) значення має вигляд

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + \mathrm{x_n}), \tag{7.1}$$

де n – число доданків (число елементів вибірки).

Вибіркове середнє використовується для оцінки невідомого математичного очікування M(X). Як міра розкиду в.в., тобто її відхилення від M(x), використовується дисперсія випадкової величини D(X)

$$D(\tilde{O}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \tag{7.2}$$

Точність оцінки $\bar{x}$ можна виразити через дисперсію середньо арифметичного

$$D(\bar{x}) = \frac{D(\tilde{O})}{n} . \tag{7.3}$$

При $n \to \infty$ отримуємо $D(\bar{x}) \to 0$ и $\bar{x} \to$ M. Звідси видно, що при досить великому об'ємі вибірки різниця між середнім арифметичним і математичним очікуванням прагне до нуля (так звана гранична теорема теорії ймовірності) і те, що використання критерію очікуваного значення справедливе тільки у випадках, коли одне і теж рішення доводиться застосовувати досить велике число разів. І використання критерію очікуваного значення приводитиме до невірних результатів, для рішень, які приймаються невелике число разів.

7.1.2. Критерій "очікуване значення – дисперсія"

Критерій очікуваного значення можна модифікувати так, що його можна буде застосувати і для ситуацій, що рідко повторюються. Це можна зробити якщо застосовувати комбінацію критерію очікуваного значення і дисперсію середнього арифметичного $D(\bar{x})$. Критерієм в цьому випадку є мінімум наступного виразу у разі витрат і максимум у разі оцінки прибутку:

$$\bar{x} \pm kD(\bar{x}), \tag{7.4}$$

де k – задана постійна (що визначає рівень схильності до ризику).

Знак "мінус" ставиться у разі оцінки прибутку, знак "плюс" - у разі оцінки витрат.

На практиці результати аналізу наочніші, якщо показник розкиду випадкової величини виражається в тих же одиницях вимірювання, що і сама випадкова величина. Для цього використовується середньоквадратичне відхилення результату (вибіркового середнього) $s(\bar{x})$, яке з урахуванням виразу (7.3) і формули Бесселя для середньоквадратичного відхилення вибірки можна записати у вигляді:

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \,. \qquad (7.5)$$

В цьому випадку перепишемо вираз (7.4) у вигляді:

$$\bar{x} \pm k_s s(\bar{x}) \,. \qquad (7.6)$$

З цього виразу видно, що точність прогнозу результату підвищується за рахунок урахування можливого розкиду значень $\bar{x}$, тобто введення своєрідної "страховки". При цьому ступінь урахування цієї страховки регулюється коефіцієнтом показника ризику k_s. Коефіцієнт k_s залежно від допустимої ймовірності ризику і числа елементів вибірки може набувати значення від 1 до 10 і орієнтовно визначається, використовуючи квантилі розподілу Стьюдента.

7.1.7. Критерій граничного рівня

Критерій граничного рівня не має чітко вираженого математичного формулювання і заснований в значній мірі на інтуїції і досвіді ЛПР. При цьому ЛПР на підставі суб'єктивних міркувань визначає найбільш прийнятний спосіб дій. Критерій граничного рівня не дає оптимального рішення, що максимізувало, наприклад, прибуток або що мінімізує витрати. Швидше він відповідає визначенню прийнятного способу дій.

Критерій граничного рівня зазвичай не використовується, коли немає повного уявлення про множину можливих альтернатив. Урахування ситуації ризику при цьому може проводитися за рахунок введення законів розподілів випадкових факторів для відомих альтернатив.

Незважаючи на відсутність формалізації, критерієм граничного рівня користуються досить часто, задаючись його значеннями на підставі експертних або дослідних даних.

Як приклад використання критерію граничного рівня розглянемо наступну ситуацію. Припустимо, що величина попиту х в одиницю часу (інтенсивність попиту) на деякий товар задається безперервною функцією розподілу f(x). Якщо запаси в початковий момент невеликі, надалі можливий дефіцит товару. Інакше до кінця даного періоду запаси нереалізованого товару можуть виявитися великими . У обох випадках можливі втрати.

Оскільки визначити втрати від дефіциту дуже важко, ЛПР може встановити необхідний рівень запасів так, щоб величина очікуваного дефіциту не перевищувала A_1 одиниць, а величина очікуваних надлишків не перевищувала A_2 одиниць. Іншими словами, нехай I – шуканий рівень запасів. Тоді

$$\text{очікуваний дефіцит} = \int_I^{\infty}(x-I)f(x)dx \le A_1\,, \tag{7.7}$$

$$\text{очікувані надлишки} = \int_0^{I}(I-x)f(x)dx \le A_2\,. \tag{7.8}$$

При довільному виборі A_1 и A_2 вказані умови можуть виявитися суперечливими. В цьому випадку необхідно ослабити одне з обмежень, щоб забезпечити допустимість.

Нехай, наприклад

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{x^2}, \text{ если } 10 \le x \le 20, \\ \\ 0, \text{ если } \ x < 10 \ \textit{или} \ x > 20. \end{cases} \tag{7.9}$$

Тоді

$$\int_I^{20}(x-I)f(x)dx = \int_I^{20}(x-I)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln\frac{20}{I} + \frac{I}{20} - 1)$$

(7.10)

$$\int_{10}^{I}(I-x)f(x)dx = \int_{10}^{I}(I-x)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln\frac{10}{I} + \frac{I}{10} - 1)$$

Застосування критерію граничного рівня приводить до нерівностей

$$\ln I - \frac{I}{20} \geq \ln 20 - \frac{A_1}{20} - 1 = 1.996 - \frac{A_1}{20} \tag{7.11}$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \geq \ln 10 - \frac{A_2}{20} - 1 = 1.302 - \frac{A_2}{20}$$

Граничні значення A_1 і A_2 мають бути вибрані так, що б обидві нерівності виконувалися хоча би для одного значення I.

Наприклад, якщо $A_1 = 2$ і $A_2 = 4$, нерівності набирають вигляду

$$\ln I - \frac{I}{20} \geq 1.896 \tag{7.12}$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \geq 1.102$$

Значення I повинно знаходитися між 10 і 20, оскільки саме в цих межах змінюється попит. З табл. 7.1. видно, що обидві умови виконуються для I з інтервалу (13, 17). Будь-яке з цих значень задовольняє умовам задачі.

Таблиця 7.1

I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\ln I - \frac{I}{20}$	1.8	1.84	1.88	1.91	1.94	1.96	1.97	1.98	1.99	1.99	1.99
$\ln I - \frac{I}{10}$	1.3	1.29	1.28	1.26	1.24	1.21	1.17	1.13	1.09	1.04	0.99

7.1.4. Критерій найбільш вірогідного результату

Критерій найбільш вірогідного результату припускає заміну випадковій ситуації на детерміновану шляхом заміни випадкової величини прибутку (або витрат) єдиним значенням, що має найбільшу ймовірність реалізації. Використання даного критерію, також як і у попередньому випадку, значною мірою спирається на досвід і інтуїцію.

Як приклад використання критерію найбільш вірогідного результату розглянемо наступну ситуацію. Дохід від деякого виробу представляє дискретну випадкову величину С(ω) з множиною можливих значень $\{\tilde{N}_k\}_{k=1}^{N}$. В цьому випадку величина, така, що

$$P[C(\omega) = C_*] = \max_{k=\overline{1,N}} P[C(\omega) = C_k], \tag{7.13}$$

може розглядатися як детерміноване значення доходу від виробу.

При використанні критерію найбільш вірогідного результату необхідно враховувати дві обставини, що утрудняють застосуванння цього критерію:

- критерій не можна використовувати, якщо найбільша ймовірність події неприпустимо мала;
- застосування критерію неможливе, якщо декілька значень ймовірності можливого результату рівні між собою.

7.1.5. Приклад застосування критерію очікуване значення – дисперсія

Розглянемо детальніше прийняття рішень в умовах ризику на основі використання критерію очікуване значення – дисперсія.

Потрібно прийняти рішення про те, коли необхідно проводити профілактичний ремонт персональних ЕОМ (ПЕОМ), щоб мінімізувати втрати із-за несправності. У випадку якщо ремонт проводитиметься дуже часто, витрати на обслуговування будуть великими при малих втратах із-за випадкових поломок.

Оскільки неможливо передбачити заздалегідь, коли виникне несправність, необхідно знайти вірогідність того, що ПЕОМ вийде з ладу в період часу *t*. У цьому і полягає елемент ризику.

Математично це виглядає так: ПЕОМ ремонтується індивідуально, якщо вона зупинилася через поломку. Через T інтервалів часу виконується профілактичний ремонт всіх n ПЕОМ. Необхідно визначити оптимальне значення T, при якому мінімізуються загальні витрати на ремонт несправних ПЕОМ і проведення профілактичного ремонту з розрахунку на один інтервал часу.

Нехай p_t – ймовірність виходу з ладу однієї ПЕОМ в момент *t*, а n_t – випадкова величина, рівна числу всіх ПЕОМ, що вийшли з ладу, в той же момент. Нехай далі C_1 – витрати при ремонті несправної ПЕОМ і C_2 – витрати на профілактичне обслуговування однієї машини.

Спочатку розглянемо застосування критерія очікуваного значення без урахування розкиду результату.

Очікувані витрати (ОВ) на один інтервал складуть

$$\text{ОВ} = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T}, \qquad (7.14)$$

де $M(n_t)$ – математичне очікування числа ПЕОМ, що вийшли з ладу, у момент *t*. Оскільки n_t має біноміальний розподіл з параметрами (n, p_t), то $M(n_t) = np_t$. Таким чином

$$\text{ОВ} = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T} \qquad (7.15)$$

Необхідні умови оптимальності T^* мають вигляд:

$$\text{ОВ}(T^*-1) \geq \text{ОВ}(T^*), \qquad (7.16)$$

$$\text{ОВ}(T^*+1) \geq \text{ОВ}(T^*).$$

Отже, починаючи з малого значення T, обчислюють ОВ(T), поки не будуть задоволені необхідні умови оптимальності.

Нехай вартість витрат складе в умовних одиницях складуть $C_1 = 110$; $C_2 = 10$ і число в організації ПЕОМ $n = 40$. Значення p_t приведені в таблиці. 7.2. Необхідно визначити оптимальний період профілактичного обслуговування, при якому загальні витрати будуть мінімальні.

Таблиця 7.2

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	ОВ(T)
1	0.05	0	400
2	0.07	0.05	310
3	0.10	0.12	309.3
4	0.13	0.22	342
5	0.18	0.35	388

З табл. 7.2 видно, що $T^* = 3$, $\text{ОВ}(T^*) = 309.3$. Отже профілактичний ремонт при використанні критерію очікуваного значення необхідно робити через $T^*=3$ інтервалу часу.

Розглянемо можливість зниження ризику прийняття рішення при урахуванні можливого розкиду значень $\bar{x}$ у вигляді середньоквадратичного відхилення результату, тобто застосуємо критерій очікуване значення – дисперсія. Для цього необхідно знайти дисперсію витрат за один інтервал часу, тобто дисперсію виразу

$$в_T = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T} \tag{7.17}$$

Оскільки n_t, $t = \overline{1, T-1}$ – в.в., то $в_T$ також в.в. В.в. n_t має біноміальний розподіл з $M(n_t) = np_t$ і $D(n_t) = np_t(1-p_t)$. Отже з урахуванням (7.3)

$$D(\hat{A}_{\grave{O}}) = \frac{D}{n}\left(\frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}\right) = \left(\frac{C_1}{T\sqrt{n}}\right)^2 D\left(\sum_{t=1}^{T-1} n_t\right) = \left(\frac{C_1}{T\sqrt{n}}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t =$$

$$= \left(\frac{\tilde{N}_1}{T\sqrt{n}}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \left(\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\right), \tag{7.18}$$

де $C_2 n = const$.

Середньоквадратичне відхилення $\sigma(В_T)$ з урахуванням виразу (7.5) має вигляд

$$\sigma(\hat{A}_T) \approx \frac{C_1}{T}\sqrt{\frac{n-1}{n}\left(\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\right)} \tag{7.19}$$

Таким чином критерій очікуване значення – дисперсія для даного прикладу можна записати як мінімум вирази

$$ОВ\ (T) + k_s\,\sigma(В_T) \tag{7.20}$$

У розгорнутому вигляді вираз (7.20) запишемо так:

$$\hat{I}\hat{A}\ (\grave{O}) + \sigma(\hat{A}_{\grave{O}}) = \frac{C_1\left(n\sum_{t=1}^{T-1} p_t + k_s\sqrt{\frac{n-1}{n}\left(\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\right)}\right) + nC_2}{T}. \tag{7.21}$$

Приймемо k_s рівним 3 і за даними прикладу складемо табл. 7.7.

Таблиця 7.3

	p_t	p_t^2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$OB(T)+k_s\sigma(B_T)$
1	0.05	0.0025	0	0	400.0
2	0.07	0.0049	0.05	0.0025	345.5
3	0.10	0.0100	0.12	0.0074	345.8
4	0.13	0.0169	0.22	0.0174	378.7
5	0.18	0.0324	0.35	0.0343	424.6

З табл. 7.3 видно, що профілактичний ремонт при використанні критерію очікуване значення – дисперсія необхідно робити протягом кожного 2-го інтервалу $T^*=2$.

7.2. Порядок виконання лабораторної роботи

1. Відповідно до варіанту завдання з табл 7.4. визначити оптимальний період профілактичного обслуговування всіх ПЕОМ в організації, при якому загальні витрати будуть мінімальні, при їх кількості n, вартості витрат ремонту несправної ПЕОМ C_1, вартості витрат на профілактичне обслуговування однієї машини C_2 і ймовірності виходу з ладу однієї ПЕОМ p_t, залежно від тривалості періоду роботи T. Знаходження оптимального періоду провести по двох критеріях – по критерію «очікуване значення» і критерію «очікуване значення – дисперсія».

2. Скласти таблиці по обох критеріях.

7. Порівняти отримані результати по двох критеріях і зробити висновки.

Таблиця 7.4

Nв	n	C_1	C_2	p_t (T=1)	p_t (T=2)	p_t (T=3)	p_t (T=4)	p_t (T=5)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	30	160	12	0.06	0.08	0.11	0.15	0.19
2	50	300	20	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08
3	45	200	20	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08
4	62	120	12	0,04	0,06	0,08	0,11	0,15
5	40	150	12	0,07	0,1	0,13	0,16	0,20
6	54	180	14	0,04	0,06	0,09	0,12	0,15
7	70	200	10	0,03	0,05	0,07	0,1	0,14
8	35	140	10	0,07	0,1	0,14	0,19	0,23
9	68	170	12	0,05	0,07	0,10	0,13	0,18

Продовження таблиці 7.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	44	160	12	0,07	0,1	0,14	0,18	0,22
11	32	300	20	0,06	0,09	0,12	0,16	0,2
12	50	165	12	0,04	0,06	0,08	0,11	0,15
13	65	210	14	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08
14	68	150	12	0,04	0,06	0,08	0,11	0,15
15	60	200	10	0,02	0,04	0,06	0,09	0,12
16	38	180	12	0,04	0,06	0,08	0,11	0,15
17	42	140	10	0,06	0,09	0,11	0,14	0,19
18	34	160	11	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08
19	24	150	10	0,04	0,06	0,08	0,11	0,15
20	27	300	20	0,03	0,06	0,09	0,12	0,16
21	41	200	12	0,04	0,07	0,10	0,14	0,18
22	21	180	11	0,04	0,06	0,08	0,11	0,15
23	36	150	12	0,05	0,08	0,11	0,14	0,18
24	23	180	14	0,06	0,09	0,12	0,15	0,19
25	20	200	14	0,07	0,1	0,14	0,18	0,22

7.7. Контрольні запитання

1. Які критерії застосовуються при прийнятті рішень в умовах ризику?

2. У яких випадках застосовують критерій очікуваного значення?

7. У яких випадках застосовують критерій очікуване значення – дисперсія?

4. Як визначається точність оцінки середньоарифметичного значення?

5. Чому в критерії «очікуване значення – дисперсія» бажана заміна дисперсії на середньоквадратичне відхилення результату?

6. Як регулюється допустима вірогідність ризику в критерії «очікуване значення – дисперсія»?

7. Чому дорівнює математичне очікування і дисперсія при біноміальному розподілі?