Розділ 7. Диференціальні рівняння

Основні поняття

О.1. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке пов’язує незалежну змінну, функцію та її похідні.

Якщо невідома функція є функцією однієї змінної $y = y(x)$, то диференціальне рівняння називається *звичайним* диференціальним рівнннням; якщо ж невідома функція – функція багатьох змінних, то диференціальне рівняння у *частинних* похідних.

$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ (1) – звичайне диференціальне рівняння, невідома функція $y = y(x)$,

$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, ..., \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0$ – диференціальне рівняння у частинних похідних, невідома функція $z = z(x, y)$.

Надалі будемо розглядати звичайні диференціальні рівняння.

О.2. *Порядком* диференціальних рівнянь називається найвищий з порядків похідних, присутніх в рівнянні.

Приклад 1. Визначити порядок диференціального рівняння.

$y'' + (y')^3 + x = 0$ -- диференціальне рівняння 2-го порядку.

О.3. *Розв’язком* диференціального рівняння називається функція, яка при підставленні в рівняння обертає його в тотожність.

Приклад 2. Для даного рівняння 1-го порядку підібрати розв’язок.

Диференціальне рівняння: $y' = x^2$.

Розв’язання: $y = \frac{x^3}{3} + C,\ C$ - довільна стала.

Перевіряється безпосередньо підстановкою:

$y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$.

Підставимо в рівняння $x^2 = x^2$.

<u>Приклад 3</u>. Для даного рівняння 2-го порядку підібрати розв'язок.

Диференціальне рівняння $y'' + y = 0$.

<u>Розв'язання</u>:

$y_1 = \cos x$, а також $y_1 = C_1 \cos x$, C_1 - довільна стала

$y_2 = \sin x$, а також $y_2 = C_2 \sin x$, C_2 - довільна стала.

Перевіряється безпосередньо. Наприклад,

$y_1 = C_1 \cos x$; $y_1' = -C_1 \sin x$; $y_1'' = -C_1 \cos x$.

Підставляємо в диференціальне рівняння:

$-C_1 \cos x + C_1 \cos x = 0$

$$0 = 0$$ - вірно.

Доводиться також, що розв'язком є

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де C_1, C_2 - довільні сталі.

В подальшому буде доведено, що для диференціального рівняння І-го порядку в розв'язку одна довільна стала, для диференціального рівняння ІІ-го порядку – дві довільні сталі.

<u>Тема 7.1. Диференціальні рівняння І-го порядку</u>

<u>Основні поняття</u>

1. *Означення. Задача Коші.*

<u>О.</u> Диференціальним рівнянням І-го порядку називається рівняння вигляду:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо це рівняння розв'язане відносно y', то воно приймає вигляд:

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Задача Коші для диференціального рівняння (1) ставиться так.

Знайти розв'язок рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

який задовольняє початкову умову:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad (2) \quad (\text{або так } y(x_0) = y_0).$$

2. *Загальний та частинний розв'язки.* *Загальним* розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ (1) називається функція $y = y(x, C)$, де C - довільна стала, яка задовольняє умови:

1) задовольняє рівняння (1) при $\forall$ значеннях C;
2) для $\forall$ початкової умови $y\big|_{x=x_0} = y_0$ (2), $\exists$ таке значення $C = C_0$, що функція $y = y(x, C_0)$ задовольняє цю початкову умову.

Якщо розв'язок рівняння (1) представлено в неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то цей розв'язок називається загальним інтегралом.

0.2. *Частинним* («частным» - рос.) розв'язком диференціального рівняння (1) називається розв'язок, який отримується з загального при деякому значенні $C = C_0$.

Вигляд частинного розв'язку: $y = y(x, C_0)$.

Частинний інтеграл: $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

Геометрично: *загальний* розв'язок $y = y(x, C)$ є сім'єю кривих на площині xOy, яка залежить від одного параметра C. Ці криві називаються *інтегральними*.

Частинний розв'язок є однією з сім'ї інтегральних кривих, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Враховуючи дані поняття маємо, що з погляду геометрії <u>розв'язати задачу Коші</u> означає *виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку* $M_0(x_0, y_0)$.

<u>**Приклад**</u>. Для заданого диференціального рівняння $y' = x$ знайти:

1. Загальний розв'язок (підібрати);
2. Зобразити сім'ю інтегральних кривих графічно;
3. Частинний розв'язок, який задовольняє умову: $y\big|_{x=1} = \dfrac{1}{2}$;
4. Виділити з сім'ї інтегральних кривих криву, яка відповідає частинному розв'язку, а також проходить через точку $M_0\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

<u>Розв'язання</u>.

1) $y=\frac{x^2}{2}+C$ - загальний розв'язок (перевіряється безпосередньо).

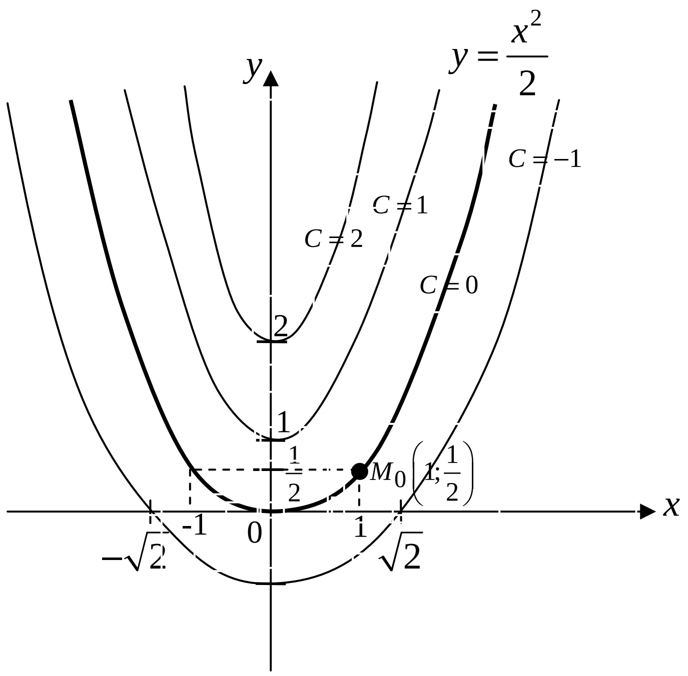
2) Зображуємо сім'ю інтегральних кривих на площині, задаючи значення C:

$C=0 \quad y=\frac{x^2}{2}$

$C=1 \quad y=\frac{x^2}{2}+1$

$C=-1 \quad y=\frac{x^2}{2}-1$ і т.д.

Маємо сім'ю парабол:



3) Знаходимо частинний розв'язок, що задовольняє умову $y\big|_{x=1}=\frac{1}{2}$. Підставимо в загальний розв'язок $x=1$ і врахуємо початкову умову.

$y\big|_{x=1}=\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=0$.

Отже, частинний розв'язок: $y=\frac{x^2}{2}$ (одна парабола з сім'ї парабол).

4) На графіку виділяємо інтегральну криву $y=\frac{x^2}{2}$, яка проходить через точку $M_0\left(1,\frac{1}{2}\right)$ згідно з початковою умовою.

3. *Геометричний зміст заданого диференціального рівняння.*

Нехай задано диференціальне рівняння

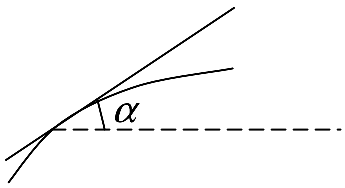
$$y' = f(x,y). \quad (1)$$

Врахуємо геометричний зміст похідної y'

$y' = tg\alpha$ (1') – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = y(x)$, що є розв'язком рівняння (1).

Порівняємо ліву та праву частини (1) та (1').

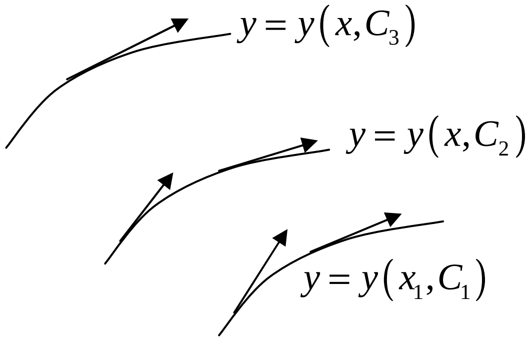
Маємо: $tg\alpha = f(x,y)$.



Кажуть, що диференціальне рівняння (1) задає *поле напрямів*.

Виходить, що сама інтегральна крива $y = y(x)$ невідома, але відомі кутові коефіцієнти дотичних до шуканої кривої.

Враховуючи, що загальний розв'язок $y = y(x,C)$, маємо геометричну інтерпретацію (стрілками зображено поле напрямів)



4. *Теорема про існування і єдинність розв'язку.*

<u>Т</u>. Нехай функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $f'_y(x,y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0, y_0) \in G$.

Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $y' = f(x,y)$, який задовольняє початкову умову $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Згідно цієї теореми через кожну точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива.

Точки, в яких не виконуються умови теореми (наприклад $f(x,y)$ або $f'_y(x,y)$ розривні) називають *особливими*. Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих, або жодної.

<u>**Класифікація диференціальних рівнянь І-го порядку та методи їх розв'язання**</u>

<u>**Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.**</u>

Вигляд рівняння

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy. \quad (1)$$

Маємо рівність диференціалів. Відомо, що $\int dF(x) = F(x) + C$, отже інтеграли від лівої та правої частини (1) відрізняються на довільну сталу.

Інтегруємо ліву та праву частини (1):

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy$$

$F_1(x) = F_2(y) + C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння.

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(x+3)dx = \frac{dy}{y}.$$

<u>Розв'язання</u>.

Інтегруємо ліву та праву частини:

$$\int (x+3)dx = \int \frac{dy}{y}$$

$\frac{x^2}{2} + 3x = \ln|y| + C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння.

<u>Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними</u>

Вигляд рівняння:

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)dy. \quad (2)$$

Це рівняння зводиться до типу (1).

Ділимо ліву та праву частини на $f_2(y) \cdot \varphi_1(x) \neq 0$:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy.$$

Інтегруємо ліву та праву частини:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy$$

$F_1(x) = F_2(y) + C$ - загальний інтеграл рівняння (2).

Зауважимо, що при діленні на добуток функцій $f_2(y)\cdot\varphi_1(x)$ можна загубити розв'язки, які відповідають розв'язкам рівнянь $f_2(y)=0$ та $\varphi_1(x)=0$.

Якщо ці розв'язки не отримуються з загального рівняння при деяких чисельних значеннях C, то їх треба приєднувати до загального розв'язку.

<u>Приклад</u>. Розв'язати рівняння

$$5\sqrt{y}dx=dy.$$

<u>Розв'язання</u>. Ділимо ліву та праву частини рівняння на $\sqrt{y}\neq 0$:

$$5dx=\frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Інтегруємо:

$$\int 5dx=\int\frac{dy}{\sqrt{y}};\quad 5x=\int y^{-\frac{1}{2}}dy;\quad 5x=2y^{\frac{1}{2}}+C;\quad y^{\frac{1}{2}}=\frac{5x-C}{2};$$

$y=\left(\frac{5x-C}{2}\right)^2$ - загальний розв'язок.

Дослідимо втрату розв'язків:

$\sqrt{y}=0\Rightarrow y=0$

а) є розв'язком диференціального рівняння. Підставимо в рівняння $y=0,\ dy=0$. Маємо $0=0$;

б) в загальний розв'язок підставимо $y=0$:

$0=\left(\frac{5x-C}{2}\right)^2\Rightarrow 0=5x-C\Rightarrow C=5x$ - не є числом.

Це означає, що розв'язок $y=0$ не є частинним, бо не отримується з загального ні при якому чисельному C.

Такий розв'зок називається <u>особливим</u>. Він під'єднується до загального.

<u>Відповідь</u>: $y=\left(\frac{5x-C}{2}\right)^2$, $y=0.$

<u>Диференціальні рівняння I-го порядку, однорідні відносно змінних</u>

<u>О.</u> Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією* n*-го виміру* відносно змінних x та y, якщо виконується умова:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y),$$

для будь-якого значення λ.

Наприклад:

- функція $f(x,y)=x^2+y^2$ - однорідна функція *другого виміру,* бо

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda y)^2=\lambda^2\left(x^2+y^2\right)=\lambda^2 f(x,y);$$

- функція $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ - однорідна функція *нульового виміру*, бо

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}=\frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}=f(x,y)=\lambda^0 f(x,y).$$

Отже, якщо для функції $f(x,y)$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0 f(x,y)=f(x,y),$$

то функція $f(x,y)$ є *однорідною функцією нульового виміру*.

<u>О.</u> Диференціальне рівняння

$$y'=f(x,y) \quad (1)$$

називається *однорідним відносно змінних* x *та* y, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y),\ \ \forall\lambda. \quad (2)$$

Нехай задано рівняння (1), для якого виконується (2).

Доведемо, що рівняння (1) зводиться до рівняння з відокремленими змінними підстановкою

$$y=u\cdot x,$$

де $u=u(x)$ - невідома функція.

<u>Д</u>. Умова (2) виконується для $\forall\lambda$. Запишемо (2) у вигляді: $f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)$ і покладемо $\lambda=\dfrac{1}{x}$.

$$f(x,y)=f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Підставимо отриманий вираз для $f(x,y)$ у рівняння (1):

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

Покладемо $\frac{y}{x}=u$.

Тоді $y=u\cdot x$ (4), $u=u(x)$ - невідома функція

$y'=u'\cdot x+u$ (5).

Підставимо (4), (5) в (3): $u'\cdot x+u=\varphi(u)$.

Врахуємо $u'=\frac{du}{dx}$; тоді $\frac{du}{dx}\cdot x=\varphi(u)-u \Rightarrow xdu=\left[\varphi(u)-u\right]dx$ (6) – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Вказане твердження доведено.

Далі розв'язуємо рівняння (6).

Ділимо ліву та праву частини (6) на $x\left[\varphi(u)-u\right]\neq 0$

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|xC|\Rightarrow xC=e^{\int\frac{du}{\varphi(u)-u}}.$$

Після взяття інтеграла справа, треба, враховуючи, що $y=u\cdot x$, покласти $u=\frac{y}{x}$.

Треба досліджувати і втрату розв'язків.

Приклад. Розв'язати рівняння: $y'=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$. (1)

<u>Розв'язання:</u>

1) диференціальне рівняння задано в стандартній формі (1);
2) перевіряємо виконання умови (2) $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$:

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2x^2};\; f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2}=\frac{\cancel{\lambda^2}\left(x^2+y^2\right)}{2\cancel{\lambda^2}x^2}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}=f(x,y)$$

3) підстановка:

$$\begin{cases} y=u\cdot x & ,u=u(x)-\text{ невідома функція} \\ y'=u'\cdot x+u \end{cases}$$

в диференціальне рівняння (1)

$$u'x+u=\frac{x^2+u^2x^2}{2x^2}=\frac{x^2\left(1+u^2\right)}{2x^2}=\frac{1+u^2}{2}$$

$$u'x=\frac{1+u^2}{2}-u$$

$$u'x=\frac{1+u^2-2u}{2}\Rightarrow u'x=\frac{(1-u)^2}{2} \quad (*)$$

$$u'=\frac{du}{dx}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{(1-u)^2}{2}\Rightarrow 2xdu=(1-u)^2\,dx \qquad /:x(1-u)^2\neq 0$$

$$\int\frac{2}{(1-u)^2}du=\int\frac{dx}{x}$$

$$-2\int(1-u)^{-2}\,d(1-u)=\ln|x|$$

$$-2\frac{(1-u)^{-1}}{-1}=\ln|x|+\ln|C|$$

$$\frac{2}{1-u}=\ln|x\cdot C|$$ - загальний інтеграл рівняння (*);

4) повертаємось до змінної y. Покладемо $u=\frac{y}{x}$, що отримано з $y=u\cdot x$:

$$\frac{2}{1-\frac{y}{x}}=\ln|x\cdot C|;\quad \frac{2x}{x-y}=\ln|x\cdot C|\Rightarrow Cx=e^{\frac{2x}{x-y}}$$ (3) – загальний інтеграл рівняння (1);

5) *втрата розв'язків*: $x(1-u)^2=0,\; x=0$ - не входить в область визначення $f(x,y)$.

$1-u=0\Rightarrow 1-\frac{y}{x}=0\Rightarrow \frac{y}{x}=1\Rightarrow y=x$ - є розв'язком рівняння (1).

Не входить в (3) ні при якому чисельному значенні C; $y = x$ під'єднується до (3).

Відповідь: $Cx = e^{\frac{2x}{x-y}}$, $y = x$.

Лінійні диференціальні рівняння I-го порядку

О. *Лінійним* диференціальним рівнянням I-го порядку називається рівняння вигляду:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1)$$

де $p(x), q(x)$ - задані функції.

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що функція y та похідна y' входить до рівняння у першому степені.

Якщо $q(x) = 0$, то рівняння (1) приймає вигляд:

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2)$$

і називається *однорідним*.

В противному випадку, коли $q(x) \neq 0$, рівняння (1) називається неоднорідним.

Розв'язання лінійного однорідного рівняння I-го порядку

$$y' + p(x)y = 0. \quad (2)$$

Розв'язання виглядає так:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

$dy = -p(x)ydx$ - диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Ділимо ліву та праву частини на $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Втрата розв'язків: $y = 0$ - розв'язок рівняння (2)

$y = 0$ входить в загальний розв'язок при $C = 0$.

Розв'язання лінійного неоднорідного рівняння I-го порядку

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (1)$$

Існує декілька методів. Розглядаємо *метод Бернуллі*.

Суть методу.

Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$y = u \cdot v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$ - невідомі функції.

Отже, підставляємо в (1):

$$\begin{cases} y = u \cdot v, & (2) \\ y' = u' \cdot v + u \cdot v'. & (3) \end{cases}$$

$$u' \cdot v + \underbrace{u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v}_{\text{групуємо}} = q(x) \Rightarrow u' \cdot v + u\left[v' + p(x) \cdot v\right] = q(x). \quad (*)$$

Вимагатимемо, щоб вираз у квадратних дужках дорівнював нулю.

$$v' + p(x) \cdot v = 0.$$

Тоді з (*)

$$u' \cdot v = q(x).$$

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0, & (I) \\ u' \cdot v = q(x). & (II) \end{cases}$$

З (I) $\Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C|$

$\dfrac{v}{c} = e^{-\int p(x)dx}$; $v = Ce^{-\int p(x)dx}$, $\quad v = e^{-\int p(x)dx}$. (4)

Поклали $C = 1$, бо шукаємо одну функцію, тобто за v приймаємо частинний розв'язок.

В (II) підставляємо $v = e^{-\int p(x)dx}$, та $u' = \dfrac{du}{dx}$.

$\dfrac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$. Множимо ліву та праву частини на $e^{\int p(x)dx}$.

$$\frac{du}{dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\int du = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$$

$$u=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C. \quad (5)$$

Згідно (2) загальний розв'язок рівняння (1):

$$y=u\cdot v=\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}. \quad (6)$$

На практиці готовою формулою (6) не користуються, а розв'язують рівняння за вказаним алгоритмом.

<u>Приклад</u>. Знайти розв'язок рівняння

$$y'+2xy=2x, \quad (1)$$

який задовольняє умову:

$$y\big|_{x=0}=2. \quad (2)$$

<u>Розв'язання:</u>

1) рівняння записано в стандартній формі.
2) підстановка:

$$\begin{cases} y=u\cdot v & ,u=u(x),\ v=v(x) \\ y'=u'\cdot v+u\cdot v' \end{cases}$$

$$u'\cdot v+u\cdot v'+2x\cdot u\cdot v=2x \Rightarrow u'\cdot v+u\left(\underbrace{v'+2x\cdot v}_{=0}\right)=2x$$

$$\begin{cases} v'+2x\cdot v=0, & (I) \\ u'\cdot v=2x. & (II) \end{cases}$$

3) (I) $v'+2xv=0\Rightarrow \dfrac{dv}{dx}=-2xv\Rightarrow dv=-2xvdx \;/:v\neq 0$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int 2xdx\Rightarrow \ln|v|=-2\frac{x^2}{2}\Rightarrow \underline{v=e^{-x^2}}.$$

4) (II) $u'\cdot v=2x\Rightarrow \dfrac{du}{dx}\cdot e^{-x^2}=2x\Rightarrow du\cdot e^{-x^2}=2xdx\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int du=\int e^{x^2}\cdot\underbrace{2xdx}_{d(x^2)}\Rightarrow u=\int e^{x^2}\cdot d\left(x^2\right)=e^{x^2}+C.$$

$$\underline{u=e^{x^2}+C}.$$

5) $y=u\cdot v=\left(e^{x^2}+C\right)e^{-x^2}=Ce^{-x^2}+1.$ (*)

6) врахуємо початкову умову:

$y(0)=2$

$2=C\cdot e^{-0}+1;\ \ 2-1=C;\ C=1.$

Частинний розв'язок: $y=e^{-x^2}+1$.

Безпосередньою підстановкою в (1) можна впевнитись, що це розв'язок.

$y=e^{-x^2}+1,\ y'=e^{-x^2}\cdot(-2x)$.

Підставимо в (1)

$e^{-x^2}(-2x)+2x\cdot\left(e^{-x^2}+1\right)=2x$

$-2xe^{-x^2}+2xe^{-x^2}+2x=2x \Rightarrow\ 2x=2x \Rightarrow\ 0=0$ - вірно.

Диференціальне рівняння I-го порядку Бернуллі

О. *Рівнянням Бернуллі* називається рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=y^{\alpha}q(x),$$

де $p(x),\ q(x)$ - задані функції, $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$, бо при $\alpha=0$ це рівняння лінійне, $\alpha\neq 1$, бо при $\alpha=1$ це рівняння з відокремлюваними змінними.

Доведено, що заміна $z=y^{1-\alpha}$ зводить знову до лінійного рівняння.

На практиці, враховуючи вказаний факт, шукають розв'язок методом Бернуллі, поклавши $y=u\cdot v$, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

Зазначимо, що при $\alpha>0$, крім розв'язку $y=u\cdot v\neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y=0$.

Тема 7.2. Диференціальні рівняння вищих порядків

Основні поняття

Загальний вигляд рівняння:

$$F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0.$$

Розв’язавши це рівняння відносно $y^{(n)}$, маємо:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \quad (1)$$

Задача Коші для рівняння (1) формулюється так:

Знайти розв’язок диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \quad (1)$$

який задовольняє наступні початкові умови:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\Big|_{x=x_0} = y_0', \; , y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Тут $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ - задані числа.

При $\underline{n=2}$ задача Коші ставиться так:

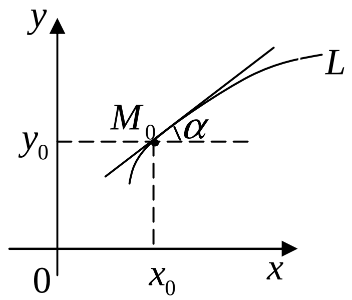
Знайти розв’язок диференціального рівняння

$$y'' = f\left(x, y, y'\right), \quad (1')$$

який задовольняє наступні початкові умови:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\Big|_{x=x_0} = y_0'. \quad (2')$$

Геометрично задача Коші (1'), (2') означає, що в сім’ї інтегральних кривих слід знайти криву L, яка проходить через т. $M_0\left(x_0, y_0\right)$ і таку, що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої L, проведеної в цій точці, дорівнює y_0', бо $y_0' = tg\alpha$.



<u>О.</u> *Загальним* розв’язком диференціального рівняння (1) називається функція $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$ (3), де C_i, $i = \overline{1,n}$ - довільні сталі, яка задовольняє такі умови:

1) функція (3) задовольняє диференціальне рівняння (1) при будь-яких значеннях C_i;

2) за будь-яких початкових умов (2), існують такі значення $C_i = C_i^{(0)}$, $i = \overline{1,n}$, що функція $y = \varphi\left(x, C_1^{(0)}, ..., C_n^{(0)}\right)$ задовольняє ці початкові умови.

Розв’язок, що отримується з загального при заданих чисельних значеннях C_i, називається *частинним*.

Геометрично загальний розв’язок є сім’єю інтегральних кривих на площині xOy, залежних від параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$, частинний розв’язок - одна крива з цієї сім’ї.

Розв’язати диференціальне рівняння n-го порядку означає:

1) знайти його загальний розв’язок;
2) із загального розв’язку виділити частинний розв’язок, який задовольняє початкові умови, якщо такі умови задані.

Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають пониження порядку

1. $y^{(n)} = f(x)$.   (1)

Рівняння (1) розв’язується з використанням n послідовних інтегрувань:

$$\int y^{(n)} dx = \int f(x) dx$$

$$y^{(n-1)} = f_1(x) + C_1$$

$$\int y^{(n-1)} dx = \int \left(f_1(x) + C_1 \right) dx$$

$$y^{(n-2)} = f_2(x) + C_1 x + C_2$$

по аналогії:

$$y^{(n-3)} = f_3(x) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

- -

$$y = f_n(x) + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n .$$

Тут $C_1, C_2, .., C_n$ - довільні сталі.

Приклад. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' = \cos 2x .$$

Розв’язання. Послідовно інтегруючи ліву та праву частини двічі, отримаємо:

$$\int y'' dx = \int \cos 2x dx$$

$$y' = \frac{1}{2}\int \cos 2x d\left(2x\right) = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x + C_1\right) xd = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x d\left(2x\right) + C_1 x = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2 .$$

<u>2.</u> Задано диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0 . \quad (2)$$

Ліва частина рівняння не містить явно шуканої функції $y = y\left(x\right); \quad 1 \le k \le \left(n-1\right)$.

Порядок такого рівняння можна понизити, якщо ввести заміну:

$$\begin{cases} y^{(k)} = z, \quad z = z\left(x\right) \ -\text{невідома функція} \\ y^{(k+1)} = z' \\ -------- \\ y^{(n)} = z^{(n-k)} \end{cases} \quad (3)$$

Підставимо (3) в (2):

$$F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0 . \quad (4)$$

Отримали диференціальне рівняння $\left(n-k\right)$-го порядку відносно невідомої функції $z = z\left(x\right)$.

Загальний інтеграл цього рівняння:

$$\Phi\left(x, z, C_1, ..., C_{n-k}\right) = 0 , \quad (5)$$

але $z = y^{(k)}$. Підставимо в (5).

Тоді маємо рівняння k-го порядку відносно шуканої функції $y = y\left(x\right)$:

$$\Phi\left(x, y^{(k)}, C_1, ..., C_{n-k}\right) = 0 . \quad (6)$$

Розв’язавши (6), отримаємо загальний інтеграл рівняння (2):

$$\Phi_1\left(x, y, C_1, C_2 ..., C_n\right) = 0 . \quad (7)$$

Окремим випадком рівняння (2) є рівняння:

$$F\left(x, y', y''\right) = 0 . \quad (2')$$

Виконується заміна:

$$\left.\begin{matrix} y' = z \\ y'' = z' \end{matrix}\right\} \quad (3') \qquad z = z\left(x\right) \text{ - невідома функція.}$$

В результаті (2') зводиться до рівняння I-го порядку:

$$F\left(x,z,z'\right)=0. \quad (4')$$

Розв'язок цього рівняння:

$$z=z\left(x,C_1\right), \quad (5')$$

але

$$z=y'.$$

Маємо рівняння: $$y'=z\left(x,C_1\right). \quad (6')$$

Інтегруємо ліву та праву частини:

$$\int y'dx=\int z\left(x,C_1\right)dx$$

$$y=\int z\left(x,C_1\right)dx+C_2.$$

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy''+y'=0$.

<u>Розв'язання</u>. Маємо рівняння типу:

$$F\left(x,y',y''\right)=0, \quad y \text{ - не входить явно в рівняння.}$$

$$\begin{cases} y'=z, \quad z=z\left(x\right) \\ y''=z'. \end{cases}$$

$x\cdot z'+z=0$ - диференціальне рівняння I-го порядку з відокремлюваними змінними.

$xz'=-z$

$x\dfrac{dz}{dx}=-z \Rightarrow xdz=-zdx \quad /:z\cdot x\neq 0$

$\displaystyle\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|z|=-\ln|x|+\ln|C_1|.$

$\ln|z|=\ln\left|\dfrac{C_1}{x}\right|\Rightarrow z=\dfrac{C_1}{x}. \quad (*)$

Врахуємо, що $y'=z$. Підставимо в (*).

$y'=\dfrac{C_1}{x} \;\Rightarrow\; y=\displaystyle\int\frac{C_1}{x}dx=C_1\ln|x|+C_2.$

<u>3.</u> Диференціальне рівняння вигляду:

$$F\left(y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0, \quad (1)$$

яке явно не містить незалежної змінної x.

Заміна:

$y' = p, \quad p = p(y)$ - невідома функція.

Тоді

$y'' = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p$

(похідна взята як похідна від складної функції $p = p(y)$, а $y = y(x)$),

$$y''' = p''_{yy} \cdot y'_x \cdot p + p'_y \cdot p'_y \cdot y'_x = p''_{yy} \cdot p^2 + p'^2_y \cdot p$$

(y''' взято як від добутку: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$),

і т. д.

Підставивши $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в рівняння (1), отримаємо рівняння $(n-1)$-го порядку відносно невідомої функції $p = p(y)$

$$F_1\left(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, маємо загальний інтеграл:

$$\Phi(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0.$$

Але $p = y'$. Підставимо:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0.$$

Ці рівняння I-го порядку відносно функції $y = y(x)$.

Розв'язавши його, отримаємо:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$ - загальний інтеграл рівняння (1).

Окремим випадком рівняння (1) є рівняння

$$F(y, y', y'') = 0,$$

яке підстановкою

$$y' = p, \; p = p(y)$$

$$y'' = p'_y \cdot y'_x = p' \cdot p$$

зводиться до диференціального рівняння I-го порядку відносно функції $p = p(y)$

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy} \cdot p\right) = 0.$$

<u>Приклад</u>. Розв’язати рівняння

$$y \cdot y'' - 2\left(y'\right)^2 = 0. \quad (1)$$

<u>Розв’язання</u>. Маємо рівняння вигляду:

$$F\left(y, y', y''\right) = 0.$$

Заміна

$$\begin{cases} y' = p & , p = p(y) - \text{невідома функція;} \\ y'' = p'_y \cdot y'_x = p' \cdot p. \end{cases}$$

Підставимо в задане рівняння:

$$y \cdot p' \cdot p - 2p^2 = 0 \;\Rightarrow\; p\left(y \cdot \frac{dp}{dy} - 2p\right) = 0$$

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$$

$$y\frac{dp}{dy} - 2p = 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} = 2p \Rightarrow ydp = 2pdy \qquad / : p \cdot y \neq 0$$

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|p| = 2\ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow \ln|p| = \ln|y|^2 + \ln C_1,\ \ln|p| = \ln\left|y^2 \cdot C_1\right|,\ p = C_1 y^2.$$

Оскільки $p = y'$, то $y' = C_1 y^2$, $\dfrac{dy}{dx} = C_1 y^2$, $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int C_1 dx$,

$$\frac{y^{-1}}{-1} = C_1 x + C_2,\ \frac{-1}{y} = C_1 x + C_2,\ y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Отже задане рівняння має розв’язок

$$y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Розв’язок $y = C$ не під’єднується, бо $y = C = -\dfrac{1}{C_2}$ отримується з загального при $C_1 = 0$.

<u>Зауваження загального характеру.</u>

<u>Поняття лінійної залежності та лінійної незалежності функцій</u>

Вказані в заголовку поняття є важливими та основоположними для лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. Введемо ці поняття для двох функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$.

<u>О.1.</u> Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються <u>лінійно залежними</u> на проміжку (a,b), якщо існують такі числа α_1 та α_2, не всі рівні нулю, що виконується рівність:

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)=0, \quad (1) \quad \forall x\in(a,b).$$

Якщо ж рівність (1) має місце тільки тоді, коли $\alpha_1=0,\ \alpha_2=0$, то функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ *лінійно незалежні* на проміжку (a,b).

<u>Т.1.</u> Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежними на проміжку (a,b), то

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\lambda,\ \lambda=const.$$

<u>Д</u>. Нехай функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежними на проміжку (a,b).

Тоді (1) має місце, коли не всі з чисел α_1 , α_2 нулі.

Нехай $\alpha_1\neq 0$, тоді з (1) $\Rightarrow$

$$\alpha_1 y_1(x)=-\alpha_2 y_2(x)$$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Позначимо $-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}=\lambda$, тоді $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\lambda,\ \ \lambda=const$.

<u>**Приклад**</u>.

1) Нехай $y_1(x)=x,\quad y_2(x)=2x$.

Ці функції лінійно залежні, бо $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}=const$.

2) Нехай $y_1(x)=x,\quad y_2(x)=x^2$.

Ці функції лінійно незалежні, бо $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}\neq const$.

<u>О.1.</u> Визначник вигляду $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

називається *визначником Вронського* або *вронськіаном* функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ і позначається $W(y_1, y_2)$ або $W(x)$.

Отже, за означенням:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

<u>Т.2.</u> Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ диференційовні і лінійно залежні на проміжку (a,b), то визначник Вронського $W(y_1, y_2) = 0$ на цьому проміжку.

<u>Д</u>. За умовою для лінійно залежних функцій має місце рівність

$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$, (1)

коли не всі з чисел α_1, α_2 рівні нулю. Нехай $\alpha_1 \neq 0$. Тоді

$$y_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2(x); \quad y_1'(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2'(x).$$

Складемо визначник Вронського:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

два стовпця пропорціональні

<u>Наслідок</u>. Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежними на (a,b), якщо $W(y_1, y_2) \neq 0$ хоча б в одній точці $x \in (a,b)$.

Вказана теорія розповсюджується на довільну кількість функцій: $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, для яких визначник Вронського:

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Приклади лінійно незалежних функцій:

1. $y_1 = 1, \quad y_2 = x$

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{1}{x} \neq const \Rightarrow$ функції лінійно незалежні на $\forall$ проміжку (a,b);

2. $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, $k_1 \neq k_2$

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const \Rightarrow$ функції лінійно незалежні на $\forall$ проміжку (a,b);

3. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = ctgx \neq const \Rightarrow$ функції лінійно незалежні на $\forall$ проміжку (a,b).

Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

1. Основні поняття

О.1. Рівняння вигляду

$$\alpha_0(x)y^{(n)} + \alpha_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n(x)y = F(x), \quad (1')$$

називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Тут $\alpha_i(x)$, $i = \overline{0,n}$, $F(x)$ - задані функції, $\alpha_0(x) \neq 0$.

Розділивши ліву та праву частини (1') на $\alpha_0(x) \neq 0$, отримаємо:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x). \quad (1)$$

Надалі будемо розглядати рівняння виду (1).

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається лінійним *однорідним* і має вигляд:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \quad (2)$$

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (1) *неоднорідне*.

Коротко: лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР);

лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР).

Введемо *диференціальний оператор* $L[y]$.

$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y$.

Тоді $L[y] = 0$ (2) – ЛОДР

$L[y] = f(x)$ (1) – ЛНДР.

Мають місце *властивості*:

1^0. $L[Cy] = CL[y]$, $C = const$

2^0. $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$

3^0. $L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i\right]=\sum_{i=1}^{n} C_i L[y_i],\ C_i = const$.

Ці властивості випливають з того, що оператор є диференціальним і мають місце ті ж властивості, що й для похідних

$$(cu)' = cu';\ (u+v)' = u'+v';\ \left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i'.$$

2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) ІІ-го порядку

Вигляд рівняння:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (1)$$

або

$$L[y]=0. \quad (1)$$

Т.1. Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ розв'язки рівняння (1), то функція

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad (2)$$

також розв'язок цього рівняння.

Д. Дано: $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - розв'язки рівняння (1), отже $L[y_1]=0$ (3), $L[y_2]=0$ (4).

Довести: y - розв'язок рівняння (1), тобто $L[y]=0$ (5).

Виписуємо ліву частину (5):

$$L[y] = L[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)] \underset{\text{вл. }3^o}{=} C_1L[y_1]+C_2L[y_2] \underset{\text{ф. (3), (4)}}{=} C_1\cdot 0 + C_2\cdot 0 = 0,$$

що й треба було довести.

Т.2. Якщо рівняння $L[y]=0$ (1) з дійсними коефіцієнтами має своїм розв'язком комплексну функцію дійсної змінної $y = u(x)+iv(x)$, то функції $u(x)$ та $v(x)$ також є розв'язками цього рівняння.

Д. Дано: $L[y] = L[u(x)+iv(x)] = 0$.

Довести: $L[u(x)]=0$, $L[v(x)]=0$.

Скористаємось властивістю 3^0 оператора $L[y]$:

$$L[y]=L\left[u(x)+iv(x)\right]\underset{\text{вл. }3^\circ}{=}L\left[u(x)\right]+iL\left[v(x)\right]=0\Rightarrow L\left[u(x)\right]=0,\ L\left[v(x)\right]=0.$$

Т.3. Для того, щоб функції $y_1(x),\ y_2(x)$, що є розв'язками рівняння $L[y]=0$ (1), були лінійно незалежні на проміжку (a,b), необхідно та достатньо, щоб визначник Вронського $W(y_1,y_2)\neq 0$ на цьому проміжку.

Без доведення.

Пояснення. При доведенні враховується, що $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - розв'язки рівняння (1), та теорема 2 і її наслідок з попереднього пункту.

О. Сукупність лінійно незалежних розв'язків $y_1(x),\ y_2(x)$ диференціального рівняння $L[y]=0$ на проміжку (a,b), називається **фундаментальною системою розв'язків** цього рівняння на цьому проміжку.

Коротко: Ф.С.Р.

Т.4. (структура загального розв'язку ЛОДР II-го порядку).

Якщо $y_1(x),\ y_2(x)$ - Ф.С.Р. рівняння $L[y]=0$, то

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),\ \text{(де } C_1,C_2 \text{ - довільні сталі)}$$

є загальним розв'язком цього рівняння.

Без доведення.

Пояснення. При доведенні перевіряється, чи виконуються умови 1, 2 для загального розв'язку (див. означення).

Виконання умови 1 виконується згідно з теоремою 1 даного пункту.

Т.4. – основна теорема для формування загального розв'язку.

3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Вигляд рівняння:

$$y''+p_1y'+p_2y=0, \quad (1)$$

де $p_1 p_2$ - задані числа.

Розглядаємо метод Ейлера (метод характеристичних рівнянь), який дозволяє знаходити загальний розв'язок для вказаного рівняння, не використовуючи інтегрування.

Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді:

$$y = e^{kx}, \quad (2)$$

де k - стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти.

Отже, $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ підставляємо в диференціальне рівняння (1) (одразу виносимо e^{kx} за дужки):

$$e^{kx}\left(k^2 + p_1 k + p_2\right) = 0 \quad / : e^{kx} \neq 0$$

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0 . \quad (3)$$

Квадратне рівняння (3) називається характеристичним рівнянням для диференціального рівняння (1).

Якщо k - є коренем рівняння (3), то $y = e^{kx}$ - розв’язок рівняння (1).

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1, k_2.

Можливі наступні *три випадки*:

1. k_1, k_2 - дійсні, різні: $k_1 \neq k_2$
2. k_1, k_2 - комплексно-спряжені: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta$
3. k_1, k_2 - дійсні, рівні: $k_1 = k_2$.

Розглянемо кожний з вказаних типів за такою схемою:

1) знаходимо Ф.С.Р. (2 лінійно незалежних розв’язки y_1 та y_2)
2) записуємо загальний розв’язок диференціального рівняння (1) за формулою (за теоремою про структуру загального розв’язку)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 .$$

<u>1</u>. k_1, k_2 - дійсні, різні, $k_1 \neq k_2$

Ф.С.Р.: $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ - функції лінійно незалежні, бо

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const, \; k_1 \neq k_2 .$$

Загальний розв’язок: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

<u>2</u>. k_1, k_2 - комплексно-спряжені, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Тоді $\tilde{y}_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$, $\tilde{y}_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$.

Далі виконаємо перетворення, використовуючи формулу Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Отже, $\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot \underbrace{e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x)}_{\text{формула Ейлера}} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ розв'язком є дійсна частина і уявна (теорема 2 попереднього пункту).

Ф.С.Р.: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ - функції лінійно незалежні, бо

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\cancel{e^{\alpha x}}\cos\beta x}{\cancel{e^{\alpha x}}\sin\beta x} = ctg\beta x \neq const.$$

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Зауважимо, що аналогічні перетворення виконуються і над $\tilde{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ і тут отримуємо розв'язки $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = -e^{\alpha x}\sin\beta x$,

але вони є лінійно залежними з попередньою парою функцій, тому їх відкидаємо.

<u>3</u>. k_1, k_2 - дійсні, рівні: $k_1 = k_2$.

Якщо покласти $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, то в силу того, що $k_1 = k_2$ ці функції лінійно залежні:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_1 x}} = 1 = const.$$

Тому покладають:

Ф.С.Р.: $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = xe^{k_1 x}$ - функції лінійно незалежні, бо $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{xe^{k_1 x}} = \frac{1}{x} \neq const$;

y_1 задовольняє диференціальне рівняння, бо шукали розв'язок саме в такому вигляді, y_2 теж задовольняє, що перевіряється безпосередньою підстановкою в диференціальне рівняння. Існує доведення в загальному вигляді, що функція y_2 береться саме в такому вигляді. Відповідне доведення опускається.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 xe^{k_1 x}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Покладаємо $y = e^{kx}$. Складаємо характеристичне рівняння:

$k^2 - 5k + 6 = 0$

$D = 25 - 24 = 1,\ k_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2},\ k_1 = 3,\ k_2 = 2 \Rightarrow k_1 \neq k_2$.

Ф.С.Р. $y_1 = e^{3x}$; $y_2 = e^{2x}$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.

Зауважимо, що характеристичне рівняння можна записувати формально, записавши замість $y'' - k^2$

$y' - k^1 = k$

$y - k^0 = 1$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Розв'язання. Покладаємо $y = e^{kx}$. Складаємо характеристичне рівняння:

$k^2 + 4k + 13 = 0$

$D = 16 - 52 = -36$

$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6\sqrt{-1} = 6i$,

$k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$ - корені комплексно-спряжені.

$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i = -2 \pm 3i$

$\alpha = -2,\ \beta = 3$.

Ф.С.Р. $y_1 = e^{-2x}\cos 3x$; $y_2 = e^{-2x}\sin 3x$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-2x}\cos 3x + C_2 e^{-2x}\sin 3x$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0,$$

який задовольняє початкові умови $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.

Розв'язання. Покладаємо $y = e^{kx}$. Складаємо характеристичне рівняння:

$k^2 + 6k + 9 = 0$

$D = 36 - 36 = 0$, $k_{1,2} = -3$, $k_1 = k_2$.

Ф.С.Р. $y_1 = e^{-3x}$; $y_2 = xe^{-3x}$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 xe^{-3x}$.

Знаходимо частинний розв'язок, що задовольняє умови $y(0)=0,\ y'(0)=2$:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} \\ y' = -3C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x} + C_2 x \cdot e^{-3x} \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = -3 \cdot C_1 + C_2 + 0 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{C_1 = 1} \\ -3 + C_2 = 2,\ \ \underline{C_2 = 5}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок: $y = e^{-3x} + 5xe^{-3x}$.

4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) ІІ –го порядку

Вигляд рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

або

$$L[y] = f(x). \quad (1)$$

Відповідне йому однорідне рівняння:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (2)$$

або

$$L[y] = 0. \quad (2)$$

Теорема (структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння).

Загальний розв'язок ЛНДР $L[y] = f(x)$ (1) представляється у вигляді суми загального розв'язку y^* відповідного ЛОДР $L[y]=0$ (2) та деякого частинного розв'язку $\tilde{y}$ ЛНДР $L[y] = f(x)$ (1), тобто

$$y = y^* + \tilde{y}. \quad (3)$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}. \quad (4)$$

Тут $y_1(x), y_2(x)$ - Ф.С.Р., C_1, C_2 - довільні сталі.

Без доведення.

Пояснення: доводиться, що (3) є *загальним* розв'язком, виходячи з означенням загального розв'язку. Тобто послідовно доводяться виконання вимог 1, 2 для загального розв'язку.

Доведемо виконання вимоги 1, що (3) – *розв'язок* при $\forall C_1, C_2$.

Дано: $L\left[y^*\right]=0$, $L\left[\tilde{y}\right]=f\left(x\right)$.

Довести, що $L\left[y\right]=f\left(x\right)$.

$L\left[y\right]=L\left[y^*+\tilde{y}\right]=\underbrace{L\left[y^*\right]}_{0}+\underbrace{L\left[\tilde{y}\right]}_{f(x)}=0$ - незалежно від C_1, C_2.

Доведено.

Теорема важлива для практики.

Все зазначене справедливе для диференціального рівняння n-го порядку.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) зі сталими коефіцієнтами

Рівняння зі спеціальною правою частиною

Вигляд рівняння:

$$y''+p_1y'+p_2y=f\left(x\right), \quad (1)$$

де p_1, p_2 - задані числа, $f\left(x\right)$ - задана функція, $f\left(x\right)\neq 0$.

Згідно з теорією, загальний розв'язок цього рівняння

$$y=y^*+\tilde{y},$$

де y^* - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y''+p_1y'+p_2y=0,$$

$\tilde{y}$ - частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1).

Для знаходження y^* виписуємо характеристичне рівняння:

$$k^2+p_1k+p_2=0.$$

Знаходимо його корені k_1, k_2.

Записуємо Ф.С.Р.: y_1, y_2.

Загальний розв'язок: $y^*=C_1y_1+C_2y_2$.

Для знаходження частинного розв'язку $\tilde{y}$ використовується *метод підбору* вигляду частинного розв'язку за виглядом правої частини $f(x)$. Метод дає частинний розв'язок без операції інтегрування.

Розглядаються 2 спеціальні вигляди правої частини.

І тип правої частини. У рівнянні $y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x)$ (1) права частина має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, де α - задане дійсне число, $P_n(x)$ - многочлен степеня n, $P_n(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n$, де B_i - задані числа.

Вважаємо, що α - контрольне число, яке будемо порівнювати з коренями характеристичного рівняння k_1, k_2:

а) $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, тобто контрольне число α не є коренем характеристичного рівняння. Тоді диференціальне рівняння

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = e^{\alpha x} P_n(x) \quad (1)$$

має частинний розв'язок вигляду:

$$\tilde{y} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \quad (2)$$

де $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$,

де $A_0, A_1, \ldots, A_n$ - невизначені коефіцієнти, які підлягають знаходженню.

Доведемо, що ці коефіцієнти можна знайти, а отже знайти і частинний розв'язок (2), виходячи з умови задовільнення цього розв'язку диференціального рівняння.

Знаходимо $\tilde{y}', \tilde{y}''$.

$$\tilde{y} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \;\; \tilde{y}' = Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} + \alpha Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\left(Q_n'(x) + \alpha Q_n(x)\right)$$

$$\tilde{y}'' = e^{\alpha x} \alpha \left(Q_n'(x) + \alpha Q_n(x)\right) + e^{\alpha x}\left(Q_n''(x) + \alpha Q_n'(x)\right) =$$

$$= e^{\alpha x}\left(Q_n''(x) + 2\alpha Q_n'(x) + \alpha^2 Q_n(x)\right).$$

Підставимо в (1).

$$e^{\alpha x}\left[Q_n''(x) + 2\alpha Q_n'(x) + \alpha^2 Q_n(x) + p_1\left(Q_n'(x) + \alpha Q_n(x)\right) + \right.$$

$$\left. + p_2 Q_n(x)\right] = e^{\alpha x} \cdot P_n(x).$$

Звівши подібні, отримаємо:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p_1) Q_n'(x) + \left(\alpha^2 + p_1 \alpha\right) Q_n(x) = P_n(x). \quad (3)$$

Аналізуємо (3):

зліва $Q_n''(x)$ - многочлен степеня $(n-2)$

$Q_n'(x)$ - многочлен степеня $(n-1)$

$Q_n(x)$ - многочлен степеня n.

Отже, зліва – многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами;

справа $P_n(x)$ - многочлен степеня n з відомими коефіцієнтами.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо систему,з якої визначаємо невідомі коефіцієнти $A_0, A_1, ..., A_n$, а отже і частинний розв'язок (2).

Не зупиняючись далі на доведеннях відмітимо випадки б), в).

б) $\alpha = k_1,\ \ \alpha \neq k_2$ або $\alpha = k_2,\ \ \alpha \neq k_1$, тобто контрольне число α дорівнює одному з коренів характеристичного рівняння (α є однократним коренем характеристичного рівняння).

Частинний розв'язок треба шукати у вигляді:

$$\tilde{y} = xQ_n(x) \cdot e^{\alpha x}. \quad (3)$$

в) $\alpha = k_1 = k_2$, тобто контрольне число α є двократним коренем характеристичного рівняння.

Частинний розв'язок треба шукати у вигляді:

$$\tilde{y} = x^2 Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}. \quad (4)$$

Узагальнюючи сказане, маємо:

$$\tilde{y} = x^r Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \ (5)$$

де $Q_n(x)$ - многочлен з невизначеними коефіцієнтами того ж степеня, що і $P_n(x)$, r - число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α.

Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймаємо $r = 0$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв'язок рівняння, використовуючи метод підбору вигляду частинного розв'язку.

$y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x} \quad (1)$

$y = y^* + \tilde{y}$.

1) Знаходимо y^* - загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$

$k^2 - 3k + 2 = 0$ - характеристичне рівняння.

$\sqrt{D}=\sqrt{9-8}=1$; $k_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}$; $k_1=2,\ \ k_2=1$.

Ф.С.Р.: $y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{x}$.

Загальний розв’язок: $y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$.

2) Знаходимо $\tilde{y}$ - частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

$\tilde{y}=x^rQ_n(x)e^{\alpha x},\quad n=0\quad Q_0(x)=A,\ \alpha=3\neq k_1\neq k_2\Rightarrow r=0,$

$\tilde{y}=Ae^{3x}$.

Знаходимо: $\tilde{y}'=3Ae^{3x}$

$\tilde{y}''=9Ae^{3x}$.

Підставимо в (1): $e^{3x}\left(9A-9A+2A\right)=8e^{3x}$

$2A=8\Rightarrow A=4$.

$\tilde{y}=4e^{3x}$.

3) Знаходимо y - загальний розв’язок неоднорідного рівняння:

$y=y^*+\tilde{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+4e^{3x}$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти загальний розв’язок рівняння, використовуючи метод підбору вигляду частинного розв’язку.

$y''-2y'=2x+3$

$y=y^*+\tilde{y}$.

1) Знаходимо y^* - загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння.

$y''-2y'=0$

$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$. $\underline{k_1=0},\ \ k-2=0\Rightarrow \underline{k_2=2}$.

Ф.С.Р.: $y_1=e^{0\cdot x}=1$, $y_2=e^{2x}$.

Загальний розв’язок: $y^*=C_1+C_2e^{2x}$.

2) Знаходимо $\tilde{y}$.

$\tilde{y}=x^rQ_n(x)e^{\alpha x}\Rightarrow n=1\quad Q_1(x)=Ax+B;\ \alpha=0=k_1\neq k_2\Rightarrow r=1$

$\underline{\tilde{y}=x(Ax+B)=Ax^2+Bx}$.

Знаходимо: $\tilde{y}' = 2Ax + B$

$\tilde{y}'' = 2A$.

Підставимо в диференціальне рівняння:

$$2A - 2(2Ax + B) = 2x + 3$$

$$2A - 2B - 4Ax = 2x + 3$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\begin{array}{l|l} x & -4A = 2 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2} \\ x^0 & 2A - 2B = 3 \Rightarrow 2B = 2A - 3 \Rightarrow B = \dfrac{2A-3}{2} = A - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = -2. \end{array}$$

$$A = -\frac{1}{2},\ \ B = -2$$

$$\tilde{y} = x\left(-\frac{1}{2}x - 2\right) = -x\left(\frac{1}{2}x + 2\right).$$

3) Знаходимо y.

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 2\right).$$

II тип правої частини. У рівнянні $y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x)$ (1) права частина має вигляд: $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_s(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$, (2)

де $P_s(x), Q_m(x)$ - многочлени з заданими коефіцієнтами степенів s та m відповідно, α, β - дійсні числа, $\max(s,m) = n$.

Без доведення відмічаємо: частинний розв'язок слід шукати у вигляді:

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\left(u_n(x)\cos\beta x + v_n(x)\sin\beta x\right), \quad (3)$$

де $u_n(x), v_n(x)$ - многочлени степеня n з невідомими коефіцієнтами, де $n = \max(s,m)$, r - числа коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha \pm \beta i$.

Отже, тут контрольне число $\alpha \pm \beta i$.

Якщо $\alpha \pm \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$.

Якщо $\alpha \pm \beta i$ є коренем характеристичного рівняння, то $r = 1$.

Зауважимо, що якщо $f\left(x\right)=e^{\alpha x}P_s\left(x\right)\cos\beta x$ або $f\left(x\right)=e^{\alpha x}Q_m\left(x\right)\sin\beta x$, тобто присутні тільки $\cos\beta x$ чи $\sin\beta x$, то, не дивлячись на це, частинний розв'язок відшукується все одно у вигляді (3) (це випливає з теорії, яка тут не наведена).

<u>Приклад 3</u>. Знайти загальний розв'язок рівняння, використовуючи метод підбору вигляду частинного розв'язку.

$y''-4y'=3\cos x$ (1)

$y=y^{*}+\tilde{y}$.

1) Знаходимо y^{*} - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

$y''-4y'=0$

$k^2-4k=0$, $k\left(k-4\right)=0$. $\underline{k_1=0}$, $k-4=0$, $\underline{k_2=4}$.

Ф.С.Р.: $y_1=1,\ y_2=e^{4x}$.

Загальний розв'язок: $y^{*}=C_1+C_2e^{4x}$.

2) Знаходимо $\tilde{y}$.

$\tilde{y}=x^re^{\alpha x}\left(u_n\left(x\right)\cos\beta x+v_n\left(x\right)\sin\beta x\right);\quad n=0,\ u_0\left(x\right)=A,\ v_0\left(x\right)=B$

контрольне число - $\alpha\pm i\beta=\pm i\neq k_1\neq k_2\Rightarrow r=0$

$\alpha=0,\ \ \beta=1$

$\tilde{y}=A\cos x+B\sin x$.

$\tilde{y}'=-A\sin x+B\cos x$

$\tilde{y}''=-A\cos x-B\sin x$.

Підставимо в (1): $-A\cos x-B\sin x+4A\sin x-4B\cos x=3\cos x$

$$\cos x\left(-A-4B\right)+\sin x\left(4A-B\right)=3\cos x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$.

$$\begin{array}{l|l}\cos x & -A-4B=3\\ \sin x & 4A-B=0\end{array}\Rightarrow\begin{cases}A=-3-4B\\ B=4A\end{cases}\quad\begin{cases}A=-3-16A\\ 17A=-3\Rightarrow A=-\dfrac{3}{17}\\ B=-\dfrac{12}{17}\end{cases}$$

$A = -\frac{3}{17}, \quad B = -\frac{12}{17}.$

$\tilde{y} = -\frac{3}{17}\cos x - \frac{12}{17}\sin x.$

3) Знаходимо y.

$y == C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{3}{17}\cos x - \frac{12}{17}\sin x.$

Принцип суперпозиції розв'язків

Т. Якщо диференціальне рівняння має вигляд:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \quad (1)$$

де $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ і $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками рівнянь

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f_1(x) \quad (2)$$

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f_2(x), \quad (3)$$

то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ (4) є розв'язком рівняння (1).

Доведення проводиться безпосередньо підстановкою (4) в рівняння (1), з урахуванням того, що має місце (2), (3).

Теорема важлива в тому сенсі, що якщо відомі розв'язки рівнянь (2) та (3), то розв'язок (1) записується у вигляді $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 9y = x + e^x. \quad (1)$$

1) Знаходимо y^* - загальний розв'язок однорідного рівняння (2)

$$y'' + 9y = 0 \quad (2)$$

$$k^2 + 9 = 0 \quad k^2 = -9 \quad \underline{k_{1,2} = \pm 3i} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \alpha = 0, \ \beta = 3.$$

$$y^* = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

2) Знаходимо частинний розв'язок диференціального рівняння (1)

$f(x) = x + e^x$

$$\tilde{y} = y_1 + y_2 = \underbrace{Ax + B}_{\alpha=0\neq k_{1,2}} + \underbrace{Ce^x}_{\alpha=1\neq k_{1,2}}$$

$$\tilde{y}' = A + Ce^x$$

$$\tilde{y}'' = Ce^x.$$

Підставляємо $\tilde{y}, \tilde{y}''$ в (1)

$$Ce^x + 9\left(Ax + B + Ce^x\right) = x + e^x$$

$$9Ax + 9B + 10Ce^x = x + e^x$$

$$\begin{array}{r|l} x & 9A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{9} \\ x^0 & \qquad\quad B = 0 \\ e^x & 10C = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{10} \end{array}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{9}x + \frac{1}{10}e^x.$$

3) Знаходимо загальний розв’язок

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{10}e^x.$$

Метод варіації довільних сталих

Введений раніше метод підбору частинного розв’язку можна застосувати тільки для рівнянь зі спеціальною правою частиною вказаних двох типів.

В інших випадках частинний розв’язок знаходиться методом варіації довільних сталих.

Суть методу.

Розглядаємо рівняння:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \quad (1)$$

Відповідне лінійне однорідне рівняння $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ (2).

Загальний розв’язок рівняння (2).

$$y^* = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (3)$$

Розв’язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (4)$$

де $C_1(x)$ та C_2 - дві невідомі функції, які підлягають знаходженню.

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) =$$

$$= \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)}_{=0} + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x). \quad (*)$$

Покладемо: $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$ (5) – така умова накладається на $C_1(x)$ та $C_2(x)$.

Тоді з (*) $y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$ (6).

Знаходимо $y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$ (7)

Підставимо y, y' та y'' за формулами (4), (6), (7) у рівняння (1). Тобто, вимагаємо, щоб (4) задовольняло диференціальне рівняння.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y =$$

$$= C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_2''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)\times$$

$$\times\left(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\right) + p_2(x)\cdot\left(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\right) = f(x).$$

Виконаємо перегрупування членів:

$$C_1(x)\left[y_1''(x) + p_1(x)\cdot y_1'(x) + p_2(x)\cdot y_1(x)\right] + C_2(x)\times$$

$$\times\left[y_2''(x) + p_1(x)\cdot y_2'(x) + p_2(x)\cdot y_2(x)\right] + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Оскільки $y_1(x),\ y_2(x)$ - розв’язки однорідного рівняння (2), то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю.

Отже, маємо:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \quad (8)$$

Об’єднуємо (5) і (8) в систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (9)$$

Функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольняють систему (9), саме тоді розв’язок, що визначається співвідношенням

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (4)$$

є загальним розв’язком рівняння (1).

Визначник цієї системи є визначником Вронського для лінійно незалежних розв'язків $y_1(x),\, y_2(x)$ рівняння (2):

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тоді система (9) має єдиний розв'язок.

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi(x), \\ C_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \quad (10)$$

Проінтегруємо ліву та праву частини:

$$\begin{cases} \int C_1'(x) = \int \varphi(x)\,dx \\ \int C_2'(x) = \int \psi(x)\,dx \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} C_1(x) = \varphi(x) + \overline{C}_1 \\ C_2(x) = \psi(x) + \overline{C}_2 \end{cases}, \quad (12)$$

тут $\overline{C}_1,\, \overline{C}_2$ - довільні сталі.

Підставивши (12) в (4), отримаємо загальний розв'язок рівняння (1):

$$y = \left(\varphi_1(x) + \overline{C}_1\right) y_1(x) + \left(\psi_1(x) + \overline{C}_2\right) y_2(x) =$$

$$= \underbrace{\overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x)}_{\substack{\text{загальний розв'язок } y^* \\ \text{однорідного рівняння (2)}}} + \underbrace{\varphi_1(x) y_1(x) + \psi_1(x) y_2(x)}_{\substack{\text{частинний розв'язок } \tilde{y} \\ \text{неоднорідного рівняння (1)}}}. \quad (13)$$

Тобто отримали представлення

$$y = y^* + \tilde{y}. \quad (14)$$

Якщо в (12) покласти довільні сталі $\overline{C}_1 = 0$, $\overline{C}_2 = 0$, то будемо мати частинний розв'язок диференціального рівняння (1):

$$\tilde{y} = \varphi_1(x) y_1(x) + \psi_1(x) y_2(x).$$

Отже, метод варіації довільних сталих дає і частинний розв'язок диференціального рівняння (1) і загальний розв'язок.

Алгоритм розв'язання.

Дано: $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x)$ (1).

Знайти: загальний розв'язок y рівняння (1).

1) Знаходимо загальний розв'язок y^* однорідного рівняння:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (2)$$

$$y^* = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (3)$$

2) Шукаємо частинний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$y = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x). \quad (4)$$

Для цього розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Знаходимо $C_1'(x),\ C_2'(x)$.

Проінтегрувавши, знаходимо:

$$C_1(x) = \varphi_1(x),\ C_2(x) = \varphi_2(x).$$

Записуємо частинний розв'язок:

$$y^* = \varphi_1(x)\,y_1(x) + \varphi_2(x)\,y_2(x).$$

3) Знаходимо загальний розв'язок:

$$y = y^* + \tilde{y}.$$

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}. \quad (1)$$

1) Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y = 0$$

$$k^2 + 4 = 0$$

$$k^2 = -4$$

$$k_{1,2} = \pm 2i = \alpha \pm \beta i \Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 2$$

$$y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \quad (3)$$

2) Знаходимо частинний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$\tilde{y} = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}.$$

Розв’язуємо систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & \cos 2x \end{vmatrix} = -tg\,2x;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1.$$

$$C_1'(x) = -\frac{tg\,2x}{2}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2}.$$

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int tg\,2x\,dx = -\frac{1}{4}\int tg\,2x\,d(2x) = -\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right|$$

табличний

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x.$$

Частинний розв’язок: $\tilde{y} = -\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right| \cdot \cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x$.

3) Загальний розв’язок:

$$y = y^* + \tilde{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right| \cdot \cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

Тема 7.3. Системи диференціальних рівнянь

Основні поняття

О.1. Системою диференціальних рівнянь називається система, яка пов’язує незалежну змінну, невідомі функції та їх похідні.

Вигляд системи:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \\ ---------------- \\ F_n(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \end{cases}. \quad (1)$$

<u>О.2.</u> Нормальною системою диференціального рівняння І-го порядку називається система вигляду:

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \\ ------------ \\ y_n' = f_n\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \end{cases}. \quad (2)$$

Відмітимо 3 моменти.

1) Для систем диференціальних рівнянь вводиться поняття загального розв'язку, який містить n довільних сталих і має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = y_1\left(x, C_1, \ldots, C_n\right) \\ ------------ \\ y_n = y_n\left(x, C_1, \ldots, C_n\right) \end{cases}. \quad (3)$$

2) Ставиться також задача Коші.

Знайти розв'язок системи (2), який задовольняє початкові умові:

$$y_1\left(x_0\right) = y_1^{(0)}, y_2\left(x_0\right) = y_2^{(0)}, \ldots, y_n\left(x_0\right) = y_n^{(0)}. \quad (4)$$

3) Доводиться, що диференціальне рівняння n-го порядку зводиться до системи диференціальних рівнянь і навпаки, система диференціальних рівнянь зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку.

4) На останньому засновано метод виключення для розв'язання системи диференціальних рівнянь, який розглянемо на прикладі.

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом виключення.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 & (1) \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 & (2) \end{cases}.$$

<u>Розв'язання.</u> Зведемо розв'язання системи до розв'язання одного диференціального рівняння ІІ-го порядку. Тут невідомі функції $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$.

З рівняння (1) $\Rightarrow$ $y_2 = y_1' - 2y_1$ (3)

Тоді $y_2' = y_1'' - 2y_1'$ (4).

Підставимо (3), (4) в (2)

$$y_1'' - 2y_1' = 3y_1 + 4\left(y_1' - 2y_1\right)$$

$$y_1'' - 2y_1' - 3y_1 - 4y_1' + 8y_1 = 0.$$

Отримали диференціальне рівняння ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0$$

$$y_1 = e^{kx};\ k^2 - 6k + 5 = 0$$

$$k_1 = 5,\quad k_2 = 1.$$

$\underline{y_1 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x}}$ (5)

Знаходимо $y_1' = 5C_1 e^{5x} + C_2 e^{x}$. (6)

Підставимо (5), (6) в (3):

$$y_2 = 5C_1 e^{5x} + C_2 e^{x} - 2\left(C_1 e^{5x} + C_2 e^{x}\right) = \underline{3C_1 e^{5x} - C_2 e^{x}}\ .$$

Відповідь: $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x} \\ y_2 = 3C_1 e^{5x} - C_2 e^{x} \end{cases}$.