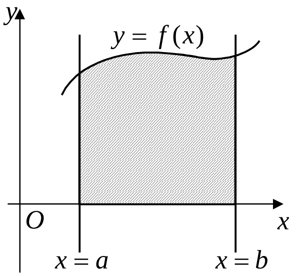
Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур

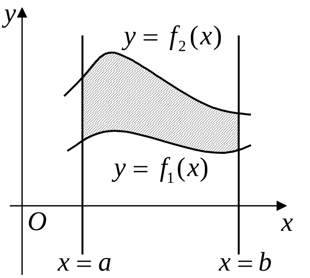
1. Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $y=f(x)$ неперервна і $f(x)\geq 0$, то площа *криволінійної трапеції* (рис. 1), обмеженої графіком функції $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ та віссю Ox, обчислюється за формулою



$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Рис. 1

2. Площа фігури (рис. 2), обмеженої знизу графіком функції $y=f_1(x)$, зверху – $y=f_2(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$, обчислюється за формулою



$$S=\int_a^b \left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx. \tag{8}$$

Рис. 2

Відрізки, які обмежують зліва та справа фігуру на рис. 2, можуть вироджуватись у точки.

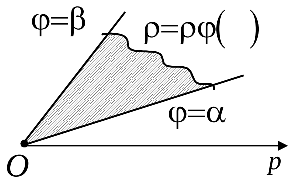
3. Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt \qquad (9)$$

де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \geq 0$.

4. Площа криволінійного сектора (рис. 3), обмеженого у полярній системі координат неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обчислюється за формулою



$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (10)$$

Рис. 3

71. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = \frac{1}{2}x^2$, прямими $x = 3$, $x = 6$ та віссю Ox.

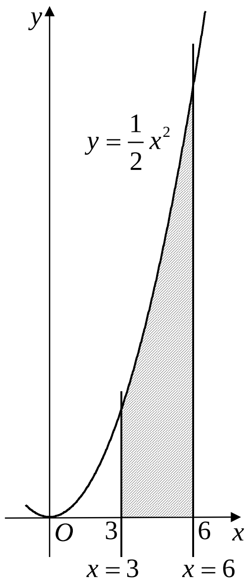


Рис. 4

⌈ Криволінійна трапеція позначена на рис. 4 штрихуванням.

Знайдемо її площу за формулою (7):

$$S = \int_3^6 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_3^6 =$$

$$= \frac{1}{6}(6^3 - 3^3) = \frac{1}{6}(216 - 27) =$$

$$= \frac{63}{2} = 31{,}5 \text{ (кв. од.).} \ ⌋$$

72. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, та віссю Ox.

Γ Криволінійна трапеція позначена на рис. 5 штрихуванням. Знайдемо її площу за формулою (7):

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} =$$

$= 1 + 1 = 2$ (кв. од.). $\lrcorner$

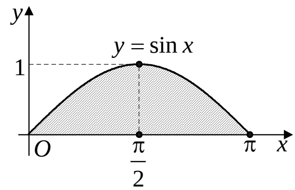


Рис. 5

73. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 6 - x^2$, $y = x$.

Γ $y = 6 - x^2$ – парабола, вітки якої направлені вниз. Заповнимо таблицю для зображення параболи:

x	0	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$
$y = 6 - x^2$	6	0	0

Для знаходження абсцис ($x_1 = a$, $x_2 = b$) точок перетину параболи з прямою розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = x,$$

або $x^2 + x - 6 = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$,

$$x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3,$$

$$x_2 = b = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2.$$

Шукана фігура (рис. 6) обмежена знизу прямою, а зверху – параболою.

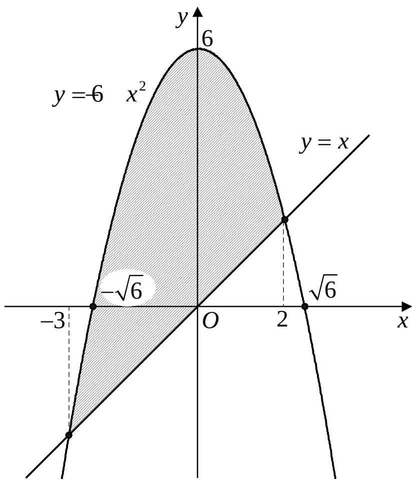


Рис. 6

Тому за формулою (8) отримаємо

$$S=\int\limits_{-3}^{2}\;6-x^2\;\;-x\;\;dx=\left(6x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{2}=$$

$$=\left(6\cdot 2-\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)-\left(6\cdot\;\;-3\;\;-\frac{-3\;\;^3}{3}-\frac{-3\;\;^2}{2}\right)=$$

$$=12-\frac{8}{3}-2+18-9+\frac{9}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ \text{(кв. од.).}\ \lrcorner$$

74. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{8x}$ та $y=\dfrac{x^2}{8}$.

$\ulcorner$ Для побудови ліній складемо таблиці:

x	0	2	8
$y=\sqrt{8x}$	0	4	8

;

x	0	4	8
$y=\dfrac{x^2}{8}$	0	2	8

.

Шукана фігура позначена на рис. 7 штрихуванням.

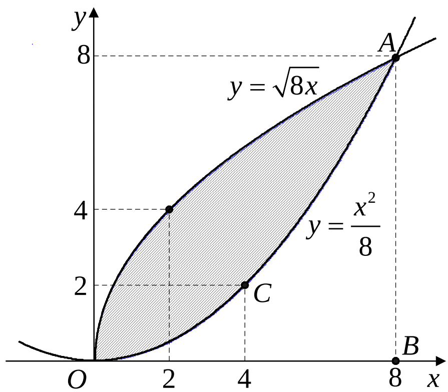


Рис. 7

За формулою (8)

$$S=\int\limits_0^8\left(\sqrt{8x}-\frac{x^2}{8}\right)dx=$$

$$=\left(\sqrt{8}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^8=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot\sqrt{x^3}-\frac{1}{24}x^3\right)\Bigg|_0^8=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot\sqrt{8^3}-\frac{1}{24}8^3=$$

$$\frac{2}{3}\cdot 8^2-\frac{8^2}{3}=\frac{128}{3}-\frac{64}{3}=\frac{64}{3}=21\frac{1}{3}\ \text{(кв. од.).}\ \lrcorner$$

75. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$ та $y = 2$.

⌈ Для побудови графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$ складаємо таблицю:

x	1	2	$\frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	2

.

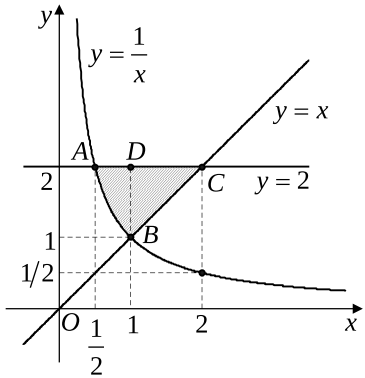


Рис. 8

Розіб'ємо прямою $x = 1$ область на дві частини ADB та BDC. Тоді шукана площа

$$S = S_{ADB} + S_{BDC}.$$

За формулою 8

$$S_{ADB} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= 2x - \ln x \Big|_{1/2}^{1} = 2 \cdot 1 - \ln 1 - \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} \right) = 2 - 1 + \ln \frac{1}{2} = 1 - \ln 2$$

.

За формулою 8 :

$$S_{BDC} = \int_1^2 2 - x \; dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = \left(2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right) - \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) = 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $S = S_{ADB} + S_{BDC} = 1 - \ln 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} - \ln 2$ (кв. од.). ⌋

76. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $y = 2 - x$.

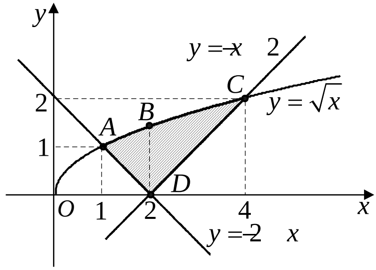


Рис. 9

⌈ Складаємо таблиці для побудови графіків:

x	0	1	4
$y = \sqrt{x}$	0	1	2

;

x	2	4
$y=x-2$	0	2

;

x	0	2
$y=2-x$	2	0

.

Штрихована область обмежена знизу двома лініями $y=2-x$ та $y=x-2$. Потрібно розбити область на два криволінійні трикутники ABD та DBC. Тоді

$$S=S_{ABD}+S_{DBC}.$$

За формулою 8

$$S_{ABD}=\int_1^2 \sqrt{x}-\ \ 2-x\ \ dx=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-2\cdot x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-2\cdot 2+\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3}-2\cdot 1+\frac{1^2}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{2}-4+2-\frac{2}{3}+2-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{6}.$$

За формулою 8

$$S_{DBC}=\int_2^4 \sqrt{x}-\ \ x-2\ \ dx=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_2^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_2^4=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-\frac{4^2}{2}+2\cdot 4\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)=\frac{16}{3}-8+8-\frac{4}{3}\sqrt{2}+2-4=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Отже, $S=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{6}+\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{13}{6}$ (кв. од.). ┘

77. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\frac{5}{x}$ та $y=6-x$.

┌ Для побудови графіків функцій складаємо таблиці:

x	1	5	2
$y=\frac{5}{x}$	5	1	$\frac{5}{2}$

;

x	0	6
$y=6-x$	6	0

.

Абсциси точок перетину ліній знайдемо із системи:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{5}{x} \\ y &= 6 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{5}{x} = 6 - x \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5 = 6x - x^2$

або $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$,

$x_1 = a = \dfrac{6-4}{2} = 1$, $x_2 = b = \dfrac{6+4}{2} = 5$.

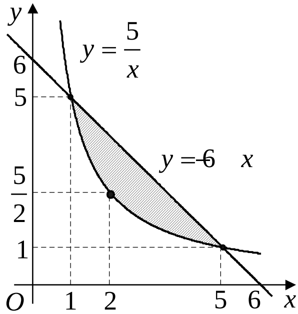


Рис. 10

За формулою 8

$$S = \int_1^5 \left(6 - x \;\; - \frac{5}{x} \right) dx = \left(6 \cdot x - \frac{x^2}{2} - 5 \ln x \right) \Bigg|_1^5 =$$

$$= \left(6 \cdot 5 - \frac{25}{2} - 5 \ln 5 \right) - \left(6 \cdot 1 - \frac{1}{2} - 5 \ln 1 \right) = 30 - \frac{25}{2} - 5 \ln 5 - 6 + \frac{1}{2} = 12 - 5 \ln 5 \quad \text{(кв. од.).} \quad \lrcorner$$

78. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{x^3}{8}$, $y = 1$, $x = 3$.

$\ulcorner$ Складаємо таблицю для побудови графіка функції $y = \dfrac{x^3}{8}$:

x	0	2	3
$y = \dfrac{x^3}{8}$	0	1	$3\dfrac{3}{8}$

.

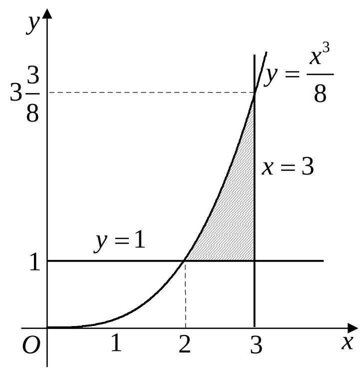


Рис. 11

За формулою 8

$$S = \int_2^3 \left(\frac{x^3}{8} - 1 \right) dx = \left(\frac{x^4}{32} - x \right) \Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{81}{32} - 3 - \frac{16}{32} + 2 = 1\frac{1}{32} \quad \text{(кв. од.).} \quad \lrcorner$$

79. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ та $y=0$.

$\ulcorner$ Фігуру зображено на рис. 12. Це необмежена область. Узагальнюючи формулу 7 , площу фігури обчислимо за формулою

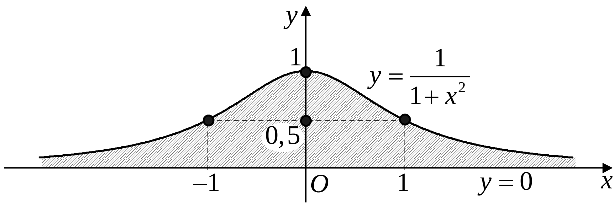


Рис. 12

$S=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$. Маємо невласний інтеграл першого роду (див. підрозділ 4). Тому

$$S=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\ \operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a\ +\lim_{b\to\infty}\ \operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0\ =0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-0=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\quad\text{(кв. од.)}.\ \lrcorner$$

80. Обчислити площу фігури, обмеженої аркою циклоїди $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$, $t\in\ 0,2\pi\ $, та віссю Ox.

$\ulcorner$ Складаємо таблицю для побудови графіка арки циклоїди:

t	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π
$x=t-\sin t$	0	$\dfrac{\pi}{2}-1$	π	2π
$y=1-\cos t$	0	1	2	0

Площу заштрихованої області обчислимо за формулою (9). Так як $x = t - \sin t$, то $x' = (t - \sin t)' = 1 - \cos t$. Тоді

$$S = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$= \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

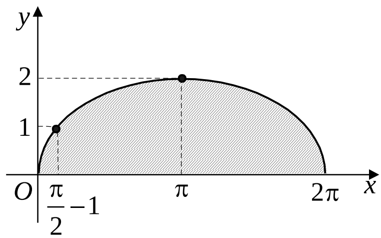


Рис. 13

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 0 - 2\sin 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) = 3\pi \quad \text{(кв. од.)}. \quad \lrcorner$$

81. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

$\ulcorner$ Для побудови астроїди у першій чверті складаємо таблицю:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x = \cos^3 t$	1	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$	0
$y = \sin^3 t$	0	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$	1

Фігура симетрична відносно осей Ox та Oy (рис. 14). Тому її площа $S = 4S_{AOB}$.

Так як $x = \cos^3 t$, то $x' = -3\cos^2 t \cdot \sin t$.

За формулою 9

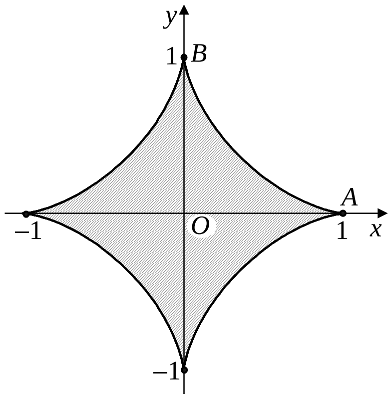


Рис. 14

$$S_{AOB} = -3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t \cdot \cos^2 t \cdot \sin t dt =$$

$$= 3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t \cdot \sin^2 t dt =$$

$$= 3\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{3}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \;\; 1-\cos 2t \;\; dt = \frac{3}{8}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot \cos 2t dt\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{3\pi}{32}$$

Отже, $S = 4\cdot\frac{3\pi}{32} = \frac{3\pi}{8}$ (кв. од). ⌋

82. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a \;\; 1-\cos\varphi$, де $a > 0$ ($\varphi;\rho$ – полярні координати точки на площині).

⌈ Складаємо таблицю для побудови графіка функції:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\rho = a \;\; 1-\cos\varphi$	0	$0{,}14a$	$a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0{,}3a$	a	$2a$	a	0

Фігура симетрична відносно осі Ox. Тому її площа $S = 2S_{AOB}$.

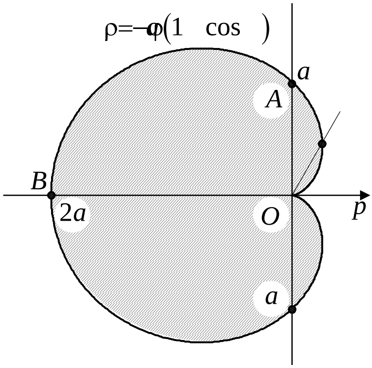


Рис. 15

За формулою 10

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2 \;\; 1-\cos\varphi \;\;^2 \, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} \;\; 1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi \;\; d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1}{2} \;\; 1+\cos 2\varphi \;\;\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{4}\pi a^2 .$$

Отже $S = 2\cdot\frac{3}{4}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$ (кв. од.). ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити площі плоских фігур, обмежених кривими:

83. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

84. $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

85. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, $x + 2y - 4 = 0$.

86. $y = 3 + 2x - x^2$, $y = x + 1$.

87. $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

88. $y = \sqrt{1-x}$, $y = x + 1$, $y = 0$.

89. $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

90. $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $x = 3$, $y = 0$.

91. $y = x^4 - 2x^2$, $y = 0$, $x \geq 0$.

92. Знайти площу еліпса за його параметричним рівнянням $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$ (a , b – півосі еліпса).

93. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = 1 + \sin\varphi$.

94. Знайти площу одного пелюстка фігури, обмеженої кривою $\rho = \sin 2\varphi$.

Відповіді:

83. $\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$.	**84.** $\frac{1}{2}$.	**85.** $\frac{1}{12}$.	**86.** $4{,}5$.
87. $\frac{32}{3}$.	**88.** $\frac{7}{6}$.	**89.** $\frac{4}{3}$.	**90.** $\frac{1}{3} + \ln 3$.
91. $\frac{8\sqrt{2}}{15}$.	**92.** πab .	**93.** $\frac{3}{2}\pi$.	**94.** $\frac{\pi}{8}$.

5.2. Довжина кривої

1. Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, то її довжина обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx . \qquad (11)$$

2. Якщо крива задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha,\beta]$, то її довжина

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt . \qquad (12)$$

3. Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1,\varphi_2]$, то

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi . \qquad (13)$$

95. Обчислити довжину відрізка прямої $y = 3x - 5$ від точки $A(2;1)$ до точки $B(4;7)$.

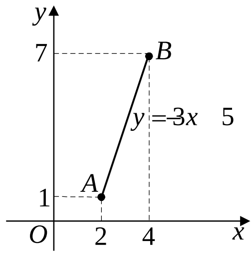


Рис. 16

Γ За формулою (11) знаходимо

$$l = \int_2^4 \sqrt{1 + \left((3x-5)'\right)^2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{1 + (3)^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{10}\int_2^4 dx = \sqrt{10}\cdot x\Big|_2^4 = \sqrt{10}\,(4-2) =$$

$$= 2\sqrt{10} \text{ (лін. од.).} \quad \lrcorner$$

96. Обчислити довжину кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ від точки з абсцисою $x = 3$ до точки з абсцисою $x = 8$.

Γ За формулою (11) $l = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)'\right)^2}\,dx$. Обчислимо окремо

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)' = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

Тому $l = \int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3\Big|_3^8 = \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{9}\right)^3 - \left(\sqrt{4}\right)^3\right) =$

$$= \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3} \text{ (лін. од.).} \quad \lrcorner$$

97. Обчислити довжину кривої $y = e^x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;e)$.

Γ Згідно з формулою (11)

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \left((e^x)'\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (e^x)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx.$$

Для обчислення цього інтеграла виконаємо заміну змінної у визначеному інтегралі (див. підрозділ 2). Нехай

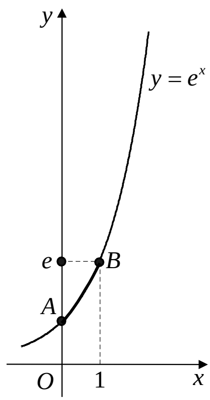


Рис. 17

$\sqrt{1+e^{2x}}=t$. Звідси $e^{2x}=t^2-1$, $2x=\ln(t^2-1)$, $x=\dfrac{1}{2}\ln(t^2-1)$ і

$$dx=\left(\frac{1}{2}\ln(t^2-1)\right)'dt=\frac{t}{t^2-1}dt.$$

Нові межі інтегрування $t(0)=\sqrt{2}$, $t(1)=\sqrt{1+e^2}$.

Тому $l=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} t\cdot\frac{t}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{t^2-1}{t^2-1}dt+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{dt}{t^2-1}=t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}=$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\approx 0{,}99 \text{ (лін. од.).} \quad \lrcorner$$

98. Обчислити довжину арки циклоїди $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ де $t\in[0,2\pi]$.

$\ulcorner$ Арка циклоїди зображена на рис. 13. Згідно з формулою (12) знайдемо підкореневий вираз:

$$(x'(t))^2+(y'(t))^2=(1-\cos t)^2+(\sin t)^2=1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t=$$

$$=2(1-\cos t)=2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}=4\sin^2\frac{t}{2}.$$

Тоді за формулою (12)

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=2\cdot\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-4\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4\left(\cos\frac{2\pi}{2}-\cos 0\right)=-4(-1-1)=8 \text{ (лін. од.).} \quad \lrcorner$$

99. Обчислити довжину дуги астроїди $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$.

$\ulcorner$ Астроїду зображено на рис. 14. Фігура симетрична відносно осей Ox та Oy. Тому $l=4l_1$, де l_1 – дуга AB. Згідно з формулою (12) знайдемо похідні та підкореневий вираз:

$$x'=(\cos^3 t)'=3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-3\cos^2 t\sin t,$$

$y' = 3\sin^2 t \cdot \cos t = 3\sin^2 t \cos t$,

$$x'^{\,2} + y'^{\,2} = \left((\cos^3 t)' \right)^2 + \left((\sin^3 t)' \right)^2 =$$

$$= 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t = 9\cos^2 t \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) =$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{4} \cdot (4\cos^2 t \sin^2 t) = \frac{9}{4}\sin^2 2t .$$

За формулою (12)

$$l_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{9}{4}\sin^2 2t}\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}\left(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) =$$

$$= -\frac{3}{4}(-1-1) = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} .$$

Отже, $l = 4l_1 = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ (лін. од.). ⌟

100. Обчислити довжину кардіоїди $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ $(a > 0)$.

⌜ Кардіоїду зображено на рис. 15. Крива симетрична відносно осі Ox. Тому $l = 2l_1$, де l_1 – дуга OAB. Згідно з формулою (13) знайдемо підкореневий вираз. Так як $\rho'(\varphi) = (a(1 - \cos\varphi))' = a \cdot \sin\varphi$, то

$$(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2 = (a(1 - \cos\varphi))^2 + (a\sin\varphi)^2 =$$

$$= a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a^2(2 - 2\cos\varphi) = a^2 \cdot 2 \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

(врахували, що $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$).

За формулою (13)

$$l_1 = \int_0^{\pi} \sqrt{4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2a\left(-2\cos\frac{\varphi}{2} \right)\Big|_0^{\pi} = -4a\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) =$$

$$= -4a(0 - 1) = 4a .$$

Отже, $l = 2 \cdot 4a = 8a$ (лін. од.). ⌟

101. Знайти довжину логарифмічної спіралі $\rho = e^{\varphi}$, де $\varphi \in [0, 2\pi]$.

⌜ Крива задана в полярній системі координат. Тому за формулою (13)

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(e^{\varphi}\right)^2+\left(\left(e^{\varphi}\right)'\right)^2}\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{e^{2\varphi}+e^{2\varphi}}\,d\varphi=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}e^{\varphi}d\varphi=\sqrt{2}e^{\varphi}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-e^{0}\right)=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-1\right)\quad\text{(лін. од.).}\quad\rfloor$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити довжину кривої:

102. $y=5x-1$, від точки $A(0;1)$ до точки $B(3;14)$.

103. $y^2=(x+1)^3$, що відтинається прямою $x=4$.

104. $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

105. $\rho=6\cos^3\frac{\varphi}{3}$, де $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

106. $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

107. $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$, $t\in[0,1]$.

108. $\begin{cases}x=\sqrt{3}t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$.

Відповіді:

102. $3\sqrt{26}$. **103.** $\frac{670}{27}$. **104.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **105.** $\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{4}$.

106. 24. **107.** $\sqrt{2}(e-1)$. **108.** 4.

5.3. Обчислення об'ємів тіл обертання

Якщо навколо осі Ox обертається криволінійна трапеція, що обмежена графіком функції $y=f(x)$, віссю Ox та прямими $x=a$, $x=b$, то об'єм *тіла обертання* знаходиться за формулою

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (14)$$

Якщо криволінійна трапеція, обмежена лініями $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ та віссю Oy, обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi\int_c^d f^2(y)\,dy. \qquad (15)$$

109. Обчислити об'єм параболоїда, який утворений обертанням параболи $y=\sqrt{8x}$ навколо осі Ox і який обмежений площиною $x=10$.

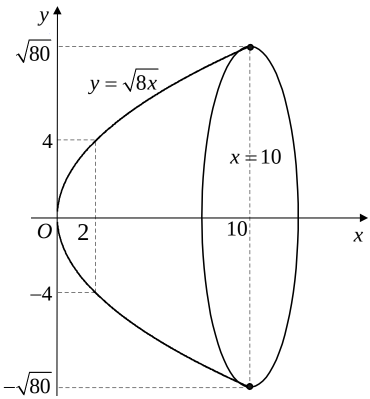


Рис. 18

$\ulcorner$ Тіло обертання зображене на рис 18. За формулою (14)

$$V=\pi\int_0^{10} 8x\,dx = 8\pi\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{10} =$$

$$= 4\pi\cdot 10^2 = 400\pi \ \text{(куб. од.)}. \ \lrcorner$$

110. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y=\dfrac{4}{x}$, $x=1$, $x=4$ та віссю Ox.

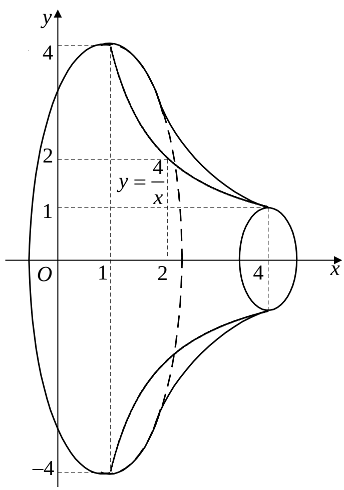


Рис. 19

$\ulcorner$ Тіло обертання зображене на рис. 19.

За формулою (14)

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int_1^4 x^{-2}dx =$$

$$= -16\pi\cdot\left.\frac{1}{x}\right|_1^4 = -4\pi+16\pi = 12\pi$$

(куб. од.). $\lrcorner$

111. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y = \frac{x}{2}$, $x = 4$, $x = 6$, $y = 0$.

┌ За формулою 14

$$V = \pi \int_4^6 \left(\frac{x}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_4^6 x^2 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_4^6 = \frac{\pi}{12} \; 6^3 - 4^3 \; =$$

$$= \frac{\pi}{12} \; 216 - 64 \; = 12\frac{2}{3} \text{ (куб. од.).} \quad ┘$$

112. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ та віссю Ox.

┌

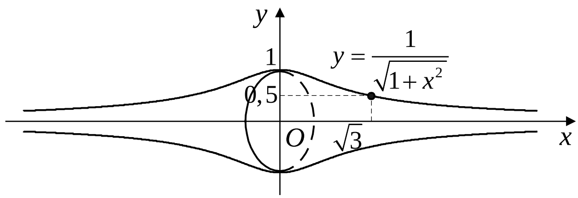


Рис. 20

У
загал
ьнюючи формулу 14, знаходимо

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi^2$$ (куб. од.) (див. приклад **79**). ┘

113. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 1$, $y = 5$ та віссю Oy.

┌ Тіло обертання зображене на рис. 21.

Застосуємо формулу 15. Якщо $y = \frac{x^2}{4}$, то $x = 2\sqrt{y}$ при $x \geq 0$. Тому

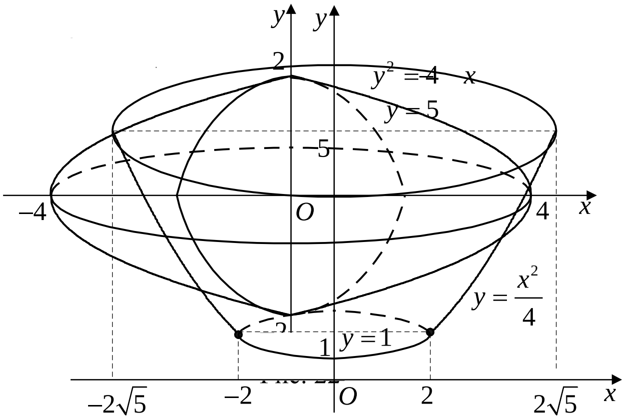


Рис. 21

$$V=\pi\int_1^5 \;2\sqrt{y}\;\;^2\,dy=4\pi\int_1^5 y\,dy=4\pi\left.\frac{y^2}{2}\right|_1^5=2\pi y^2\Big|_1^5=$$

$$=2\pi\;\;25-1\;\;=2\pi\cdot 24=48\pi\quad\text{(куб. од.).}\quad\rfloor$$

114. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лінією $y^2=4-x$ та віссю Oy.

$\ulcorner$ Так як $y^2=4-x$, то $x=4-y^2$. Тому за формулою 15

$$V=\pi\int_0^2 \;4-y^2\;\;^2\,dy=\pi\int_0^2 \;16-8y^2+y^4\;\;dy=\pi\left.\left(16y-8\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right)\right|_0^2=$$

$$=\pi\left(16\cdot 2-8\cdot\frac{2^3}{3}+\frac{2^5}{5}\right)=\frac{256}{15}\pi=17\frac{1}{15}\pi\quad\text{(куб. од.).}\quad\rfloor$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вказаної осі фігури, що обмежена лініями:

115. $y=x^2-2x$ та $y=0$, вісь Ox.

116. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, вісь Ox.

117. $y=x^3$, $x=0$, $y=8$, вісь Oy.

118. $y = x^2$ **,** $y = \sqrt{x}$, вісь Ox .

119. $y = 2 - x^2$ та $y = x^2$, вісь Ox .

Відповіді:

115. $\frac{16}{15}\pi$. **116.** $\frac{\pi}{2}\ e^2 - 1$. **117.** $\frac{96\pi}{5}$.

118. $\frac{3\pi}{10}$. **119.** $\frac{8\pi}{3}$.