Невласні інтеграли

4.1. Невласні інтеграли I роду

За означенням *невласні інтеграли I роду* обчислюються за формулами:

1) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx\,;$ $\quad (1)$

2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx\,;$ $\quad (2)$

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx\,.$ $\quad (3)$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають *збіжними*.

Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох границь), то відповідні невласні інтеграли називають *розбіжними*.

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

33. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx\,.$

⌜ Згідно з формулою (1) маємо

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-4}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\Bigg|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3\cdot1^3}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}\right)+\frac{1}{3} = 0+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,.$$ ⌟

34. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,.$

⌜ $$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\,\Big|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\sqrt{1}\right).$$

Так як $\lim\limits_{b\to+\infty}\sqrt{b} = +\infty$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) = +\infty$ (див. розділ 4).

Отже, заданий інтеграл розбіжний. ⌟

35. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx\,.$

⌜ $$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b xe^{-x^2}dx = \left|\begin{array}{l} t=-x^2 \\ dt=\left(-x^2\right)'dx=-2xdx \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \\ \textit{межі}: \\ t_1=-0^2=0 \\ t_2=-b^2 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{-b^2}\left(-\frac{1}{2}e^t\right)dt = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{-b^2}e^t dt\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^t\,\Big|_0^{-b^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2}-e^0\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{b^2}}-1\right) = -\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}}-1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(0-1\right) = \frac{1}{2}\,.$$ ⌟

36. $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}\,.$

$$\ulcorner\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\left|\begin{array}{l}t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\\ \text{межі}:\\ t_1=\ln 2,\ t_2=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t}dt=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|\ln b|-\ln|\ln 2|\right).$$

Так як $\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln|\ln b|-\ln\ln|2|\right)=+\infty$ (див. розділ 4).

Отже, заданий інтеграл розбіжний. $\lrcorner$

37. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

$$\ulcorner\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}dx=\left|\begin{array}{l}t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\\ \text{межі}:\\ t_1=\ln 2\\ t_2=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^2}dt=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}t^{-2}dt==\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{t}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}\right)+\frac{1}{\ln 2}=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}.\ \lrcorner$$

38. $\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx$.

$\ulcorner\ \int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\cos x\,dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\sin b-\sin 0\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$. Отримана границя не існує (див. розділ 4, рис. 4).

Отже, заданий невласний інтеграл I роду розбіжний. $\lrcorner$

39. $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{x\,dx}{x^4+1}$.

$\ulcorner$ Відповідно до формули (2) маємо

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{x\,dx}{x^4+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{x\,dx}{\left(x^2\right)^2+1}=\left|\begin{array}{l}t=x^2,\ dt=2x\,dx,\\ x\,dx=\frac{1}{2}dt\\ \text{межі}:\\ t_1=a^2,\ t_2=1^2=1\end{array}\right|=\lim_{a\to-\infty}\int_{a^2}^{1}\frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+1}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{a^2}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}t\Big|_{a^2}^{1}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}a^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}a^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{8},$$

оскільки $\lim\limits_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a^2=\frac{\pi}{2}$ (див. розділ 4, рис. 5). $\lrcorner$

40. $\int\limits_{-\infty}^{0}xe^x dx$.

$\ulcorner$ Використаємо формулу інтегрування частинами

$\int\limits_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du$. Нехай $\begin{cases}u=x\\ dv=e^x dx.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}du=dx\\ v=\int e^x dx=e^x.\end{cases}$

Маємо $\int\limits_{-\infty}^{0}xe^x dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(xe^x\Big|_a^0-\int\limits_a^0 e^x dx\right)=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(0\cdot e^0-a\cdot e^a-e^x\Big|_a^0\right)=$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - \left(e^0 - e^a\right)\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 + e^a\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 0$ (див. розділ 4, рис. 2) то потрібно обчислити границю $\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{-a}{e^{-a}}$. Так як $\begin{cases}\lim\limits_{a\to-\infty}(-a) = +\infty \\ \lim\limits_{a\to-\infty} e^{-a} = +\infty\end{cases}$ (див. розділ 4, рис. 2), то для обчислення цієї границі можна скористатися правилом Лопіталя (див. розділ 5):

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{-a}{e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty}\frac{(-a)'_a}{(e^{-a})'_a} = \lim_{a\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty} e^a = 0.$$

Отже, $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 + e^a\right) = 0 - 1 + 0 = -1.$ ⌟

41. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$.

⌜ Згідно з формулою 3 маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+1}dx + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{1}{x^2+1}dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_a^0\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^b\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Тут $\begin{cases}\lim\limits_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a = -\dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ (див. розділ 4, рис. 5). ⌟

42. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

⌜ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^x dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^x dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} e^x\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - e^0\right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(1 - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - 1\right) = +\infty,$$

так як перша границя дорівнює 1, а друга – ($+\infty$).

Отже, заданий інтеграл є розбіжним. ⌟

43. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{1+x^4}dx$.

⌜ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{1+x^4}dx = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x^3}{1+x^4}dx + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^3}{1+x^4}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{x^3}{1+x^4}dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{x^3}{1+x^4}dx = \left|\begin{array}{l} t = 1+x^4, \\ dt = 4x^3dx, \\ x^3dx = \dfrac{1}{4}dt \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{1+a^4}^{1}\frac{\frac{1}{4}dt}{t} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{1+b^4}\frac{\frac{1}{4}dt}{t} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}\int\limits_{1+a^4}^{1}\frac{1}{t}dt + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\int\limits_{1}^{1+b^4}\frac{1}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(\ln|t|\Big|_{1+a^4}^{1}\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|t|\Big|_{1}^{1+b^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(\ln 1 - \ln\left|1+a^4\right|\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|1+b^4\right| - \ln 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(0 - \ln\left(1+a^4\right)\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left(1+b^4\right) - 0\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\ln\left(1+a^4\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\ln\left(1+b^4\right).$$

Оскільки $\begin{cases}\lim\limits_{a\to-\infty}\ln\left(1+a^4\right) = +\infty \\ \lim\limits_{b\to+\infty}\ln\left(1+b^4\right) = +\infty\end{cases}$, то заданий інтеграл є розбіжним. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити невласні інтеграли I роду або довести їх розбіжність:

44. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{4}{x^5}dx$.

45. $\int\limits_1^{+\infty}\left(2x+1\right)dx$.

46. $\int\limits_{-\infty}^{1}e^x dx$.

47. $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx$.

48. $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x}dx$.

49. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^8+1}$.

50. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^5dx}{x^6+2}$.

51. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx$.

52. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$.

53. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}dx$.

Відповіді:

44. 1.

45. Розбіжний.

46. e.

47. 1.

48. 1.

49. $\frac{\pi}{4}$.

50. Розбіжний.

51. $\frac{1}{2\ln^2 2}$.

52. $\frac{\pi^3}{12}$.

53. $-\frac{\pi^2}{8}$.

4.2. Невласні інтеграли II роду

Невласний інтеграл II роду є узагальненням визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ на випадок, коли підінтегральна функція $f\left(x\right)$ необмежена на відрізку $\left[a,b\right]$.

Розрізняють три випадки:

1) $f\left(x\right)$ необмежена у точці $x=a$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f\left(x\right)=\infty$). Тоді

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f\left(x\right)dx. \tag{4}$$

Тут і далі $\varepsilon>0$, тобто ε прямує до нуля справа.

2) $f\left(x\right)$ необмежена у точці $x=b$ ($\lim\limits_{x\to b-0} f\left(x\right)=\infty$). Тоді

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f\left(x\right)dx \quad \left(\varepsilon>0\right). \tag{5}$$

3) $f\left(x\right)$ необмежена у точці $c\in\left(a,b\right)$ ($\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)=\infty$). Тоді

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_a^c f\left(x\right)dx + \int\limits_c^b f\left(x\right)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f\left(x\right)dx + \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f\left(x\right)dx \quad \left(\varepsilon>0\right). \tag{6}$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають *збіжними*. Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох), то відповідні невласні інтеграли називають *розбіжними*.

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

54. $\int\limits_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx$.

⌈ Оскільки $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ (див. розділ 4), то підінтегральна функція необмежена у точці $x=2$. Згідно з формулою (4) дістанемо

$$\int\limits_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{(x-2)^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{2+\varepsilon}^3=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{x-2}\right)\Bigg|_{2+\varepsilon}^3=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{3-2}-\frac{-1}{2+\varepsilon-2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Так як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}=\infty$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty$.

Отже, заданий невласний інтеграл ІІ роду розбіжний. ⌋

55. $\int\limits_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx$.

⌈ Підінтегральна функція необмежена у точці $x=3$. Знаходимо

$$\int\limits_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{3+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x-3}\right)\Big|_{3+\varepsilon}^4=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{4-3}-2\sqrt{3+\varepsilon-3}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\cdot 1-2\cdot\sqrt{\varepsilon}\right)=2-0=2 .$$ ⌋

56. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

⌈ Підінтегральна функція необмежена у точці $x=1$. Відповідно до формули (5) дістанемо

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right)=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2} .$$ ⌋

57. $\int\limits_3^5 \frac{1}{x-5}dx$.

⌈ Підінтегральна функція необмежена у точці $x=5$. Знаходимо

$$\int\limits_3^5 \frac{1}{x-5}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_3^{5-\varepsilon} \frac{1}{x-5}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x-5|\Big|_3^{5-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|5-\varepsilon-5|-\ln|3-5|\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon-\ln 2\right)=-\infty$$

(див. розділ 4, рис. 3). Отже, заданий інтеграл розбіжний. ⌋

58. $\int\limits_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}dx$.

⌈ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3}=\infty$ (див. розділ 4), тобто підінтегральна функція необмежена у точці $x=2$. Згідно з формулою (6) дістанемо

$$\int\limits_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}dx=\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-2)^3}dx+\int\limits_2^3 \frac{1}{(x-2)^3}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)^3}dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^3}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_1^{2-\varepsilon} (x-2)^{-3}dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-3}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(x-2)^{-2}}{-2}\right|_1^{2-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(x-2)^{-2}}{-2}\right|_{2+\varepsilon}^{3}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{-1}{2(x-2)^2}\right|_1^{2-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{-1}{2(x-2)^2}\right|_{2+\varepsilon}^{3}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2(2-\varepsilon-2)^2}-\frac{-1}{2(1-2)^2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2(3-2)^2}-\frac{-1}{2(2+\varepsilon-2)^2}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\right).$$

Так як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}=\infty$, то заданий інтеграл є розбіжним. ⌋

59. $\int\limits_1^2\frac{1}{x\ln x}dx$.

Γ Так як $\ln 1=0$, то підінтегральна функція необмежена у точці $x=1$.

$$\int\limits_1^2\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2\frac{1}{x\ln x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=(\ln x)'\,dx=\frac{1}{x}dx\\ \textit{межі}\ \ t_1=\ln 2\\ \qquad\quad t_2=\ln(1+\varepsilon)\end{array}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2}\frac{1}{t}dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|t|\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 2-\ln\ln(1+\varepsilon)\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\ln(1+\varepsilon)=-\infty$, то заданий інтеграл розбіжний. ⌋

60. $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Γ Аналогічно попередньому прикладу маємо

$$\int\limits_1^2\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2\frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{array}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{t}\,\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2}\right)=2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}\right)=2\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(1+\varepsilon)}\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\ln 1}\right)=2\sqrt{\ln 2}.$$ ⌋

61. $\int\limits_0^1\ln x\,dx$.

Γ Оскільки $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$ (див. розділ 4, рис. 3а), то підінтегральна функція необмежена у точці $x=0$. Перш, ніж застосувати формулу (4), обчислимо інтеграл ($\varepsilon\in(0,1)$):

$$\int\limits_\varepsilon^1\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ dv=dx\\ du=\frac{1}{x}dx,\ v=x\end{array}\right|=\ln x\cdot x\Big|_\varepsilon^1-\int\limits_\varepsilon^1 x\frac{1}{x}dx=\varepsilon\ln\varepsilon-\ln 1-x\Big|_\varepsilon^1=$$

$$=\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon.$$

За формулою (4) дістанемо

$$\int\limits_0^1\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon-1.$$

Маємо границю з невизначеністю $(0\cdot\infty)$. Звівши дану невизначеність до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$, використаємо правило Лопіталя:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=0.$$

Остаточно маємо $\int\limits_0^1 \ln x\,dx = 0 - 1 = -1$. $\rfloor$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити невласні інтеграли II роду або довести їх розбіжність:

62. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

63. $\int\limits_1^2 \frac{2}{x\ln^3 x}\,dx$.

64. $\int\limits_{-1}^0 \frac{3}{(x+1)^4}\,dx$.

65. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)}\,dx$.

66. $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

67. $\int\limits_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$.

68. $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$.

69. $\int\limits_1^2 \frac{3}{x\sqrt[4]{\ln x}}\,dx$.

70. $\int\limits_2^3 \frac{4}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx$.

Відповіді:

62. Розбіжний.

63. Розбіжний.

64. Розбіжний.

65. Розбіжний.

66. 2.

67. Розбіжний.

68. $-1{,}5$.

69. $4\sqrt[4]{\ln^3 2}$.

70. 5.