Геометричні застосування визначеного інтеграла

Основними геометричними застосуваннями визначеного інтеграла є: обчислення площі плоскої фігури, обчислення об'ємів тіл обертання навколо осей координат і обчислення довжини дуги плоскої кривої.

Обчислення площ плоских фігур у декартових координатах

Площа плоскої фігури, обмеженої неперервною на відрізку $\left[a;b\right]$ кривою $y=f\left(x\right)$, віссю Ox, а також вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$ (площа криволінійної трапеції – Рис. 12), визначається за формулою:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо графік функції $y=f\left(x\right)$ розташовано нижче осі Ox (Рис. 13), то площа фігури визначається за формулою:

$$S=-\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

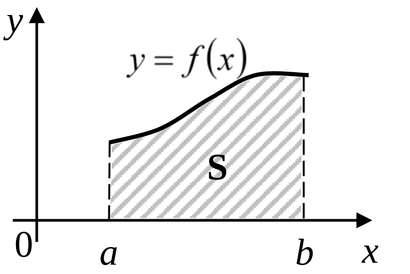

Рис.12

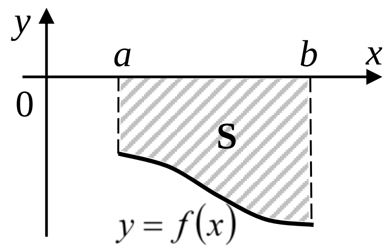

Рис. 13

Площа фігури, обмеженої кривими $y=f_1\left(x\right)$ і $y=f_2\left(x\right)$, прямими $x=a$ і $x=b$, за умови, що $f_2\left(x\right)\geq f_1\left(x\right)$ (Рис. 14), визначається за формулою:

$$S=\int_a^b\left[f_2\left(x\right)-f_1\left(x\right)\right]dx.$$

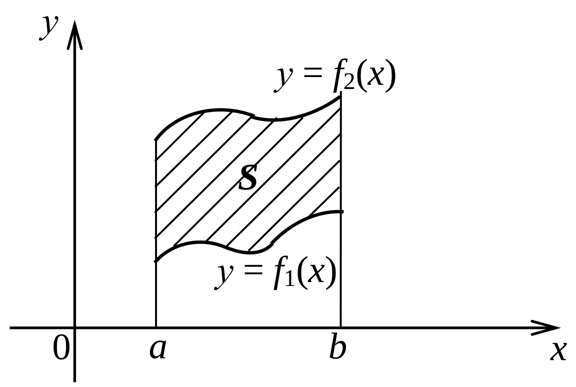

Рис. 14

Зауваження: Якщо плоска фігура має складну форму, то прямими, паралельними осі Oy , її варто розбити на частині таким чином, щоб можна було застосовувати вже відомі формули.

Приклад 43.

Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2 - 2x;\ \ y = 0;\ \ x = 0;\ \ x = 3$; б) $y = x^2 - 4$; $2x + y + 1 = 0$.

Розв'язок.

а) $y = x^2 - 2x;\ \ y = 0;\ \ x = 0;\ \ x = 3$

Фігура обмежена віссю $Ox\,(\,y = 0\,)$ і параболою $y = x^2 - 2x$ на відрізку $[0;\,3]$.

Побудуємо параболу. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ox. Для цього дорівняємо $y = 0$:

$y = x^2 - 2x = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x \cdot (x - 2) = 0$; $x_1 = 0,\ x_2 = 2$.

Знайдемо координати вершини параболи:

$$x_{вер} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y_{вер} = y(x_{вер}) = y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1.$$

Парабола $y = x^2 - 2x$ має вершину в точці з координатами $(1;\,-1)$ і гілки її спрямовано вгору.

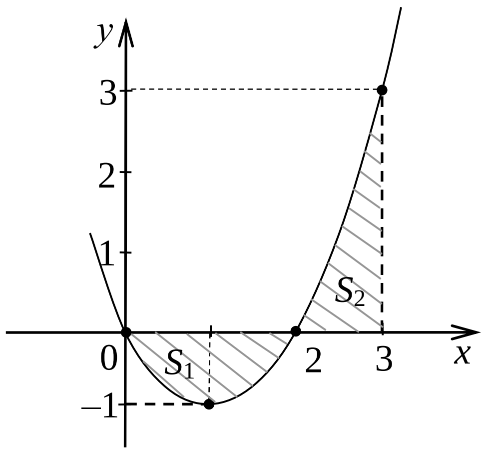

Рис. 15

Фігура, обмежена заданими лініями зображена на рис. 15.

Площа шуканої фігури дорівнює сумі площ двох криволінійних трапецій:

$$S = S_1 + S_2\,.$$

Знайдемо площу:

$$S_1 = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 == -\left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) + 0 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}\ \text{(од.}^2\text{)}$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) = 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}\text{(од.}^2\text{)}$$

Тоді площа заданої плоскої фігури дорівнює:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (од.}^2\text{)}.$$

б) $y = x^2 - 4$; $2x + y + 1 = 0$

Фігура обмежена параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $2x + y + 1 = 0$.

Побудуємо дані параболу і пряму (рис. 16).

Знайдемо межі інтегрування, тобто точки перетину прямої і параболи. Для цього розв'яжемо систему, складену з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases};$$

$$x^2 - 4 = -2x - 1;$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$(x+3)(x-1) = 0;$$

$$x_1 = -3, \; x_2 = 1.$$

Отже, парабола і пряма перетинаються в точках з абсцисами $x_1 = -3$ і $x_2 = 1$.

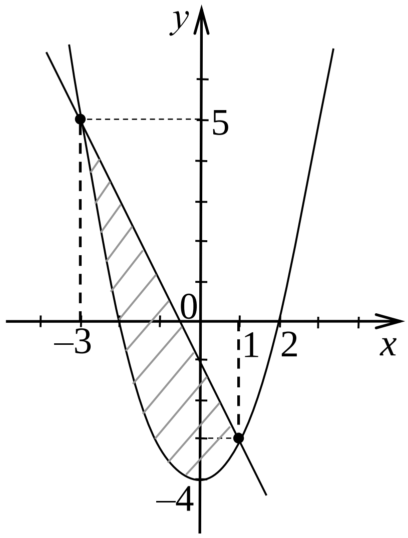

Рис. 16

Площу фігури визначаємо за формулою:

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx,$$

де лінією $y = f_2(x)$ є пряма $y = -2x - 1$ (обмежує фігуру зверху), а лінією $y = f_1(x)$ є парабола $y = x^2 - 4$ (обмежує фігуру знизу).

$$S = \int_{-3}^{1} \left(-2x - 1 - \left(x^2 - 4 \right) \right) dx = \int_{-3}^{1} \left(-x^2 - 2x + 3 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x \right) \Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-\left(-\frac{-27}{3}-9-9\right)=1\frac{2}{3}+9=10\frac{2}{3}\ (\text{од.}^2).$$

Обчислення об'єму тіла обертання

Тілом обертання навколо осі Ox називається фігура, отримана від обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ кривої $y=f(x)$ і прямими $y=0$, $x=a$ і $x=b$ (Рис.17).

Об'єм тіла обертання навколо осі Ox визначається за формулою:

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

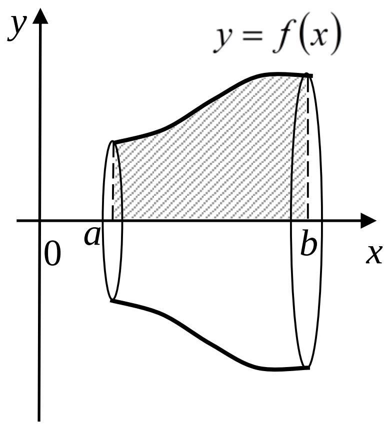

Рис. 17

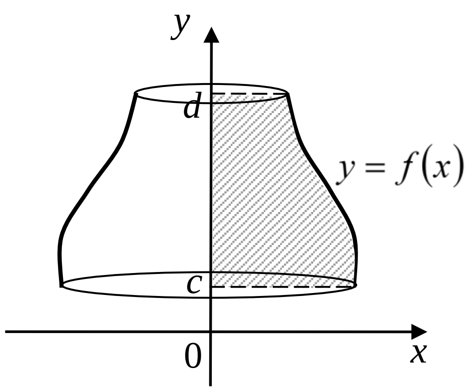

Рис. 18

Тілом обертання навколо осі Oy називається фігура, отримана від обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ кривої $y=f(x)$ і прямими $x=0$, $y=c$ і $y=d$ (рис.18).

Об'єм тіла обертання навколо осі Oy визначається за формулою:

$$V_y=\pi\int_c^d x^2(y)dy.$$

Приклад 44.

Обчислити об’єм тіла обертання.

а) Обчислити об’єм тіла утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2=4x;\ x=1;\ x=3$.

Розв’язок.

Побудуємо плоску фігуру, обмежену параболою $y^2=4x$ (гілки спрямовані вправо) і вертикальними прямими $x=1;\ x=3$, а також тіло, утворене обертанням навколо осі Ox цієї плоскої фігури (рис. 19).

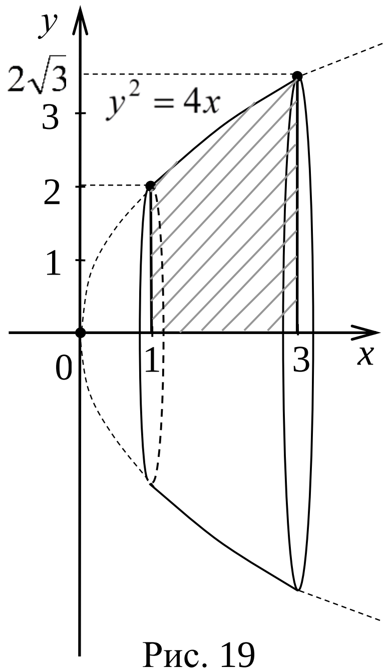

Рис. 19

Визначимо об'єм тіла обертання, підставивши функцію $y^2 = 4x$ у формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Ox:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_1^3 4x dx = 4\pi\int_1^3 x dx = 4\pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 2\pi x^2\Big|_1^3 = 2\pi\cdot(9-1) = 16\pi \text{ (од.}^{3)}.$$

б) Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \frac{4}{x}$; $y = 1$; $y = 4$.

Рішення.

Побудуємо плоску фігуру, обмежену гіперболою $y = \frac{4}{x}$ і горизонтальними прямими $y = 1$; $y = 4$, а також тіло, утворене обертанням навколо осі Oy цієї плоскої фігури (рис. 20).

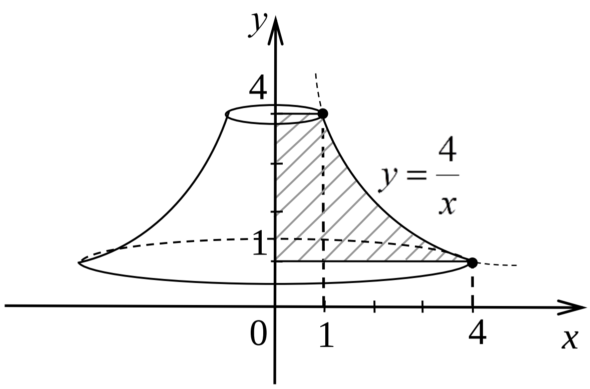

Рис. 20

Визначимо об'єм тіла обертання, підставивши функцію $x = \frac{4}{y}$ у формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Oy:

$$V_y=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{y}\right)^2dy=\pi\int_1^4\frac{16}{y^2}dy=16\pi\left(\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^4=-16\pi\left(\frac{1}{y}\right)\Bigg|_1^4=-16\pi\left(\frac{1}{4}-1\right)=12\pi\,(\text{од.}^{3)}.$$

Обчислення довжини дуги кривої

Якщо функція $y=f(x)$ і її похідна y' неперервні на відрізку $[a;b]$, то довжина дуги кривої на відрізку $[a;b]$ визначається за формулою:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Приклад 45.

Обчислити довжину дуги кривої $y=e^x+1$ від $x=\ln\sqrt{8}$ до $x=\ln\sqrt{15}$.

Розв'язок.

Знайдемо похідну заданої функції: $y'=\left(e^x+1\right)'=e^x$. Підставимо похідну у формулу для обчислення дуги кривої. Межі проміжку інтегрування дорівнюють: $a=\ln\sqrt{8}$; $b=\ln\sqrt{15}$.

$$l=\int_{\ln\sqrt{8}}^{\ln\sqrt{15}}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\left[\begin{array}{l}\sqrt{1+e^{2x}}=t;\ e^{2x}=t^2-1;\ x=\dfrac{\ln(t^2-1)}{2};\ dx=\dfrac{tdt}{t^2-1}\\ x_1=\ln\sqrt{8}\ \Rightarrow\ t_1=\sqrt{1+e^{2\ln\sqrt{8}}}=\sqrt{1+8}=3\\ x_2=\ln\sqrt{15}\ \Rightarrow\ t_2=\sqrt{1+e^{2\ln\sqrt{15}}}=\sqrt{1+15}=4\end{array}\right]=$$

$$=\int_3^4 t\cdot\frac{tdt}{t^2-1}=\int_3^4\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_3^4\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=\int_3^4\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_3^4=$$

$$=4+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}-\left(3+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{4}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}\ (\text{од.}).$$

3.2.6. Питання для самоперевірки

1. Що називається інтегральною сумою?
2. Що називається визначеним інтегралом функції на відрізку?
3. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?
4. Перелічити основні властивості визначеного інтеграла.
5. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
6. У чому полягає інтегрування методом підстановки визначеного інтеграла?

7. У чому полягає метод інтегрування частинами визначеного інтеграла?
8. Запишіть формулу інтегрування частинами.
9. Що називається невласними інтегралами?
10. Які бувають види невласних інтегралів?
11. Які існують геометричні застосування визначеного інтеграла?
12. Як обчислити площу плоскої фігури, обмеженої заданими лініями?
13. Як обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями, навколо координатної осі?
14. Як обчислити довжину дуги плоскої кривої?