ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Формула Ньютона-Лейбніца. Безпосереднє обчислення визначених інтегралів

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ – це число, яке позначають $\int_a^b f(x)\,dx$. Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $[a,b]$ – відрізок інтегрування; a та b – відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за *формулою Ньютона-Лейбніца*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Для знаходження первісної доцільно використати відповідний невизначений інтеграл – $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Властивості визначеного інтеграла: а) сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла; б) визначений інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів кожної з цих функцій.

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_1^2 x^2 dx$.

$\ulcorner$ З таблиці невизначених інтегралів $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \quad \lrcorner$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

$\ulcorner$ З таблиці невизначених інтегралів $\int \cos x\,dx = \sin x + C$. Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1. \quad \lrcorner$$

3. $\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 5x + 7)\,dx$.

$\ulcorner$ Знайшовши первісну підінтегральної функції та застосувавши формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 5x + 7)\,dx = \left(4\cdot\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} + 7x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 7x\right)\Bigg|_0^1 = \left(1^4 - 1^3 + \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 7\cdot 1\right) - \left(0^4 - 0^3 + \frac{5}{2}\cdot 0^2 + 7\cdot 0\right) =$$

$$= 1 - 1 + \frac{5}{2} + 7 - 0 = 2{,}5 + 7 = 9{,}5. \quad \lrcorner$$

4. $\int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - 1\right) dx$.

$$\ulcorner \int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - 1\right) dx = \int_1^2 \left(5\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot x^{-3} - 1\right) dx = \left(5\ln|x| + 2\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= (5\ln|x| - x^{-2} - x)\Big|_1^2 = \left(5\ln|x| - \frac{1}{x^2} - x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(5\ln 2 - \frac{1}{2^2} - 2\right) - \left(5\ln 1 - \frac{1}{1^2} - 1\right) = 5\ln 2 - \frac{1}{4} - 2 - 5\cdot 0 + 1 + 1 =$$

$$= 5\ln 2 - \frac{1}{4}. \quad \lrcorner$$

5. $\int\limits_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$.

$$\ulcorner \quad \int\limits_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left(5\cdot e^x - 10\cdot \frac{x^5}{5} + \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(5\cdot e^x - 2x^5 + \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = \left(5\cdot e^1 - 2\cdot 1^5 + \operatorname{arctg} 1\right) - \left(5\cdot e^0 - 2\cdot 0^5 + \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= 5e - 2 + \frac{\pi}{4} - (5 - 0 + 0) = 5e + \frac{\pi}{4} - 7. \quad \lrcorner$$

6. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$.

$$\ulcorner \quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 2\operatorname{tg} 0 - 2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 + 2 = 2. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити визначені інтеграли:

7. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

8. $\int\limits_0^1 \left(2x - 3x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$.

9. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x+1}$.

10. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin 2x\, dx$.

Відповіді:

7. 2.

8. $-\frac{1}{3}$.

9. $\ln 2$.

10. $-0,5$.

2. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо у визначеному інтегралі $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вводиться нова змінна $\begin{cases} t = t(x) \\ dt = t'(x)\,dx, \end{cases}$ то слід змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування t_1 визначається як значення введеної змінної в точці $x = a$, а верхня межа t_2 – в точці $x = b$, тобто $\begin{cases} t_1 = t(a) \\ t_2 = t(b). \end{cases}$

11. $\int\limits_0^2 \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

$\ulcorner$ Введемо нову змінну $t = x^2 + 1$. Тоді $dt = (x^2+1)'\,dx = 2x\,dx$. Обчислимо нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2 + 1 = 1 \\ t_2 = t(2) = 2^2 + 1 = 5. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^2 \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int\limits_1^5 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 - 0 = \ln 5. \quad \lrcorner$$

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx$.

⌐ Введемо нову змінну $t=\sin x$, тоді $dt=(\sin x)'dx=\cos x\,dx$. Нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1=t(0)=\sin 0=0 \\ t_2=t\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx=\int\limits_0^1 t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}. \;⌟$$

13. $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx$.

⌐ Нехай $t=x^2$. Тоді $dt=(x^2)'dx=2x\,dx$ або $x\,dx=\frac{1}{2}dt$, $\begin{cases} t_1=t(0)=0^2=0 \\ t_2=t(2)=2^2=4. \end{cases}$

Маємо $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx=\int\limits_0^2 e^{x^2}\cdot x\,dx=\int\limits_0^4 e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^t dt=\left.\frac{1}{2}e^t\right|_0^4=$

$$=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right). \;⌟$$

14. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^2dx}{x^6+1}$.

⌐ Нехай $t=x^3$. Тоді $dt=3x^2dx$ або $x^2dx=\frac{1}{3}dt$, $\begin{cases} t_1=t(-1)=(-1)^3=-1 \\ t_2=t(1)=1^3=1. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{x^2dx}{x^6+1}=\int\limits_{-1}^1 \frac{x^2dx}{(x^3)^2+1}=\int\limits_{-1}^1 \frac{\frac{1}{3}dt}{t^2+1}=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{t^2+1}dt=\left.\frac{1}{3}\operatorname{arctg}t\right|_{-1}^1=$$

$$=\left.\frac{1}{3}\operatorname{arctg}t\right|_{-1}^1=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}. \;⌟$$

Якщо у визначеному інтегралі робимо заміну: $\begin{cases} x=x(t) \\ dx=x'(t)\,dt, \end{cases}$ то для встановлення меж нової змінної t потрібно з рівняння $x=x(t)$ виразити $t=t(x)$. Тоді нові межі інтегрування $\begin{cases} t_1=t(a) \\ t_2=t(b). \end{cases}$

15. $\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$.

⌐ Покладемо $\sqrt{x}=t$. Тоді $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Межі інтегрування нової змінної: $\begin{cases} t_1=\sqrt{4}=2 \\ t_2=\sqrt{9}=3. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\limits_2^3 \frac{1}{t+1}2t\,dt=2\int\limits_2^3 \frac{t}{t+1}dx=2\int\limits_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dx=$$

$$=2\int\limits_2^3\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt==2\int\limits_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3=$$

$$=2\left(3-\ln|3+1|\right)-2\left(2-\ln|2+1|\right)==6-2\ln 4-4+2\ln 3=$$

$$=2+2\left(\ln 3-\ln 4\right)=2+2\ln\frac{3}{4}. \;⌟$$

16. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

⌐ Нехай $x=\sin t$, тоді $dx = (\sin t)'\,dt = \cos t\,dt$. Нові межі інтегрування знаходимо за формулою $t=\arcsin x$:

$$\begin{cases} t_1=\arcsin 0 = 0 \\ t_2 = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$ Маємо

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\cos t\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0+\frac{\sin 2\cdot 0}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 0}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

(в ході розв'язання скористались формулою $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$). ⌋

17. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$.

⌐ Для того щоб позбутися ірраціональності в підінтегральній функції, тобто кубічного і квадратного коренів, потрібно зробити підстановку $\sqrt[6]{x}=t$. Тоді $x=t^6$, $dx = (t^6)'\,dt = 6t^5 dt$. Межі інтегрування нової змінної:

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt[6]{0} = 0 \\ t_2 = \sqrt[6]{1} = 1. \end{cases}$$ Маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2+t^3}\cdot 6t^5 dt = 6\int\limits_0^1 \frac{t^5}{t^2+t^3}\,dt = 6\int\limits_0^1 \frac{t^3}{t+1}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} -\,t^3 & t+1 \\ \underline{\;t^3+t^2\;} & \overline{t^2-t+1} \\ \quad -\,-t^2 & \\ \quad \underline{\;-t^2-t\;} & \\ \qquad -\;t & \\ \qquad \underline{\;t+1\;} & \\ \qquad\; -1 & \end{array} \right| = 6\int\limits_0^1 \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 6\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+1-\ln|1+1|\right) - 6\left(\frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}+0-\ln|0+1|\right) =$$

$$= 6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right) - 6(0-0+0-\ln 1) = 2-3+6-6\ln 2+6\cdot 0 =$$

$$= 5-6\ln 2.$$

Зауважимо, що використаний у прикладі прийом виділення цілої частини раціонально дробу $\frac{t^3}{t+1}$ є стандартним. В даному прикладі це можна було б зробити ще й так:

$$\frac{t^3}{t+1} = \frac{t^3+1-1}{t+1} = \frac{t^3+1^3}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - \frac{1}{t+1} = t^2-t+1-\frac{1}{t+1}.$$ ⌋

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити визначені інтеграли:

18. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$.

19. $\int\limits_{4}^{9} \frac{2}{\sqrt{x}+3}dx$.

20. $\int\limits_{0}^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

21. $\int\limits_{1}^{e} \frac{4\ln^3 x}{x}dx$.

22. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+1}$.

Відповіді:

18. $\frac{1}{2}$. **19.** $4-\ln\frac{36}{25}$. **20.** $\frac{\pi}{12}$. **21.** 1. **22.** $\frac{\pi}{4}$.

3. Інтегрування частинами

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du\ .$$

23. $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

$\ulcorner$ Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = x\,'\,dx = 1\cdot dx = dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = x\cdot e^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 \ - e^x\Big|_0^1 = e - \ e^1 - e^0 \ =$$

$$= e - e + 1 = 1. \ \lrcorner$$

24. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

$\ulcorner$ Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = x'dx = dx \\ v = \int \cos x\,dx = \sin x. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0\right) + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 1 + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1. \ \lrcorner$$

25. $\int\limits_1^e x^2\ln x\,dx$.

$\ulcorner$ Нехай $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases}$. Тоді $\begin{cases} du = \ln x\,'\,dx \\ v = \int x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^3}{3}. \end{cases}$

$$\int\limits_1^e x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Bigg|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{e^3}{3}\ln e - \frac{1^3}{3}\ln 1\right) - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2 dx =$$

$$= \left(\frac{e^3}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}. \ \lrcorner$$

26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

⌜ Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases}$. Тоді $\begin{cases} du = \ x\ ' dx \\ v = \displaystyle\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \operatorname{tg} x. \end{cases}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = x\cdot\operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/4} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x\,dx = \left(\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 0\cdot\operatorname{tg}0\right) + \ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot 1 + \ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \ln\ \cos 0\ = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$ ⌟

27. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

⌜ Нехай: $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = \ \operatorname{arctg} x\ ' dx = \dfrac{1}{x^2+1}dx \\ v = \displaystyle\int dx = x. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1\frac{xdx}{x^2+1}\ .$$

Обчислимо інтеграл $\int\limits_0^1\frac{xdx}{x^2+1}$. Нехай $t = x^2+1$, тоді $dt = \ x^2+1\ ' dx = 2xdx$ або $xdx = \frac{1}{2}dt$. Нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t\ 0\ = 0^2+1 = 1 \\ t_2 = t\ 1\ = 1^2+1 = 2. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{x^2+1} = \int\limits_1^2\frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln\left|t\right|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Отже, $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$. ⌟

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити визначені інтеграли:

28. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ 2x+1\ \sin x\,dx$.

29. $\int\limits_0^1 \ 4x-2\ e^x dx$.

30. $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$.

31. $\int\limits_1^2 x^4\ln x\,dx$.

32. $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

Відповіді:

28. 3 .

29. 4 .

30. $\frac{\pi}{2} - 1$.

31. $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$.

32. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.