Невизначений інтеграл.

Задача інтегрального числення. Первісна.

Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця інтегралів.

Заміна змінних та інтегрування по частинах у невизначеному інтегралі.

Невизначений інтеграл

1. Первісна функція, невизначений інтеграл

Основна задача диференціального числення – це знаходження похідної або диференціала заданої функції. Сформулюємо обернену задачу по заданій похідній або диференціалу деякої невідомої функції потрібно знайти цю функцію. Інакше кажучи, маючи $dF(x) = f(x)dx$ або $F'(x) = f(x)$, потрібно знайти невідому функцію $F(x)$. Це – основна задача інтегрального числення.

Первісною функцією для даної функції $f(x)$ на даному проміжку називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$ на розглядуваному проміжку.

Наприклад, однією з первісних для функції $5x^4$ є функція x^5, оскільки $(x^5)' = 5x^4$.Іншою первісною для цієї ж функції є функція $x^5 + 20$. Має місце

Теорема. Дві різні первісні однієї й тієї ж функції, визначеної в деякому проміжку, відрізняються між собою в цьому проміжку на один і той же сталий доданок.

Дійсно, нехай $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – різні первісні для функції $f(x)$, визначеної в деякому проміжку, так що $F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(x)$ в цьому проміжку. Але якщо дві функції $F_1(x)$ мають рівні похідні $(F_1'(x) = F_2'(x))$, то вони розрізняються між собою на сталий доданок:

$F_1(x) - F_2(x) = c \quad (c - const)$,

що і потрібно було довести.

Геометрично це означає, що коли $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – дві первісні однієї й тієї ж функції, то дотичні до їх графіків при кожному значенні x з даного проміжку паралельні між собою. Таким чином, віддаль між $F_1(x)$ та $F_2(x)$ вздовж осі oy залишається сталою: $F_1(x) - F_2(x) = c$ (рис. 1).

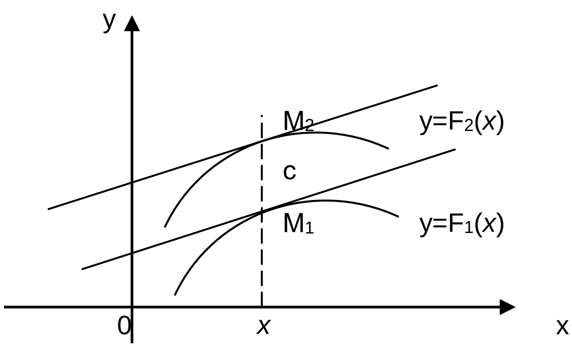

Рис. 1. $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – первісні функції $f(x)$.

Отже, знайшовши одну яку-небудь первісну $F(x)$ для даної функції $f(x)$ та додаючи до неї всі можливі сталі c, одержуємо всі первісні для функції $f(x)$.

Спільний вираз для всіх первісних даної неперервної функції $f(x)$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ або від диференціального виразу $f(x)dx$ і позначається так: $\int f(x)dx$ (тут $f(x)$ – підінтегральна функція, а $f(x)dx$ – підінтегральний вираз).

Згідно з доведеним, $\int f(x)dx = F(x)+c,$ де $F'(x)= f(x),$ а c – довільна стала.

Геометрично невизначений інтеграл – це сімейство "паралельних" кривих $F(x)+c$ (Рис. 2)

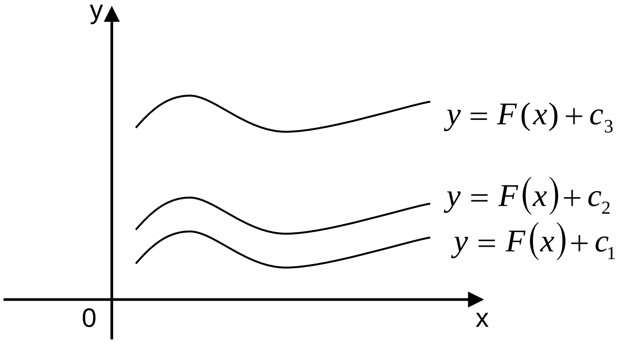

Рис. 2. Геометрична ілюстрація невизначеного інтеграла.

2. Основні властивості невизначеного інтеграла

Враховуючи означення невизначеного інтеграла

$$\int f(x)dx = F(x)+c,$$

можна легко довести основні його властивості

1) Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна – підінтегральній функції:

$d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2) Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційованої функції дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданка:

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x)+c.$$

Зауважимо, що в підкреслених виразах знаки d і $\int$ взаємно знищують один одного. У цьому розумінні, як вже згадувалося, диференціювання та інтегрування є <u>взаємно оберненими</u> математичними операціями.

3) Відмінний від нуля сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

Дійсно: $A\int f(x)dx = A(F(x)+c) = AF(x)+c_1 \quad (c_1 = AC)$.

При цьому $AF(x)$ – первісна для Af, оскільки $(AF)' = AF' = Af$.

4) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа неперервних функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі невизначених інтегралів цих функцій.

Нехай, наприклад, f, g, h – неперервні функції в проміжку (a,b). Тоді має місце рівність:

$\int (f(x)tg(x) - h(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx, \quad x \in (a,b)$.

Дійсно: $\int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx = (F(x)+c_1) + (\xi(x)+c_2) - (H(x)+c_3) =$

$(F(x)+\xi(x)-H(x))+c, \quad c = c_1 + c_2 - c_3$. Функція $F(x)+\xi(x)-H(x)$ – первісна для функції $f(x)+g(x)-h(x)$., оскільки $(F(x)+\xi(x)-H(x))' = f(x)+g(x)-h(x)$.. Отже,

$\int (f(x)+g(x)-h(x))dx = F(x)+\xi(x)-H(x)+c.$

3. Таблиця найпростіших інтегралів

Безпосереднім диференціюванням перевіряється справедливість наступних табличних формул.

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$.
3. $\int e^x dx = e^x + c.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + c.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c.$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$
12. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1} + c.\right|$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + c \quad (\alpha \neq 0)$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c.$
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c.$
16. $\int \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$
17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$

4. Незалежність виду невизначеного інтеграла від вибору аргументу

Має місце незалежність невизначеного інтеграла від вибору аргументу, так що таблиця інтегралів вірна не тільки тоді, коли x – незалежна змінна, але і у випадку, коли замість x фігурує неперервно диференційована функція $u = \varphi(x)$. Таким чином, якщо $\int f(x)dx = F(x) + c,$ то $\int f(u)du = F(u) + c,$ що перевіряється безпосереднім диференціюванням.

На підставі цієї властивості одержується узагальнена таблиця найпростіших інтегралів, в якій, скажімо, перша формула має вигляд

1. $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1),$

де u – будь-яка неперервно диференційована функція від незалежної змінної.

<u>Наприклад.</u>

№1. $\int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + c.$

Тут $u = \ln x,$ і ми користуємося "табличною" формулою $\int u du = \frac{u^2}{2} + c.$

№2. $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$

Відзначимо такі корисні для інтегрування властивості диференціала

1)	$dx = d(x+b), b - const$	2)	$dx = \frac{1}{a}d(ax), a \neq 0$
3)	$dx = \frac{1}{2}d(ax+b), (a \neq 0)$	4)	$xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$
5)	$\sin x dx = -d(\cos x)$	6)	$\cos x dx = d(\sin x)$

Наведемо ще деякі <u>приклади.</u>

№3 $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$.

№4 $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$

№5. $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + c$.

№6 $\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c.$

№7. $\int tgx dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c.$

5. Інтегрування методом заміни змінної (способом підстановки) та по частинах

Існує два основних методи інтегрування – метод заміни змінних (спосіб підстановки) а) та метод інтегрування по частинах б).

а) Нехай потрібно знайти $\int f(x)dx,$ який не є табличним інтегралом (але відомо, що існує). Виконаємо в підінтегральному виразі заміну: $x=\varphi(t)$ (тут $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні функції, причому існує обернена функція $\varphi^{-1}(t)$).

Доведемо, що

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Для цього покажемо, що похідні зліва і справа рівні між собою.

Похідна зліва: $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$

Похідна справа: $\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot\dfrac{1}{\varphi'(t)}= f(\varphi(t))= f(x).$

Формула доведена. Зауважимо, що функція $x=\varphi(t)$ може бути задана неявно і що замість t, звичайно, можна використовувати іншу букву – y,z і т.п.

<u>Наприклад.</u>

№1. $\int ctgxdx=\left|\begin{matrix}\sin x=y\\ \cos xdx=dy\end{matrix}\right|=\int\dfrac{dy}{y}=\ln|y|+c=\ln|\sin x|+c.$

№2. $\int\dfrac{x^2dx}{x^3+2}=\left|\begin{matrix}y=x^3+2\\ dy=3x^2dx\end{matrix}\right|=\int\dfrac{\frac{1}{3}dy}{y}=\dfrac{1}{3}\ln(y)+c=\dfrac{1}{3}\ln\left|x^3+2\right|+c.$

б) Нехай $u(x),$ $v(x)$ – неперервно диференційовані функції. Тоді, як відомо, $d(uv)=udv+vdu,$ або $udv=d(uv)-vdu.$ Інтегруючи цю рівність, одержуємо:

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu=uv-\int vdu.$$

Ми одержали <u>формулу інтегрування по частинах:</u> $\int udv=uv-\int vdu.$

<u>Наприклад.</u>

№1. $\int x\sin xdx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin xdx & v=-\cos x\end{matrix}\right|=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+c.$

№2. $\int\ln xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+c.$

Зауважимо, що як правило, функції $\ln x,\log_a x,\arccos x,\arcsin x,arctgx,$ та $arcctgx$ входять до складу функції $u(x)$ при інтегруванні по частинах.

Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів

Найпростіші дроби та їх інтегрування.

Інтегрування правильних і неправильних раціональних дробів.

Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів.

Інтегрування тригонометричних функцій.

1. Інтегрування раціональних дробів

1. Розкладання многочленів на множники.

Нагадуємо, що функція $P(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n,$ де n – ціле додатне число, називається <u>многочленом (поліномом)</u> або <u>цілою раціональною функцією від x</u>.

Число n називається степенем многочлена. При цьому $A_0, A_1, ..., A_n$ – дійсні або комплексні сталі числа, x – дійсна або комплексна змінна.

Рівняння виду $P(x)=0$, де $P(x)$ – многочлен n - го степеня, називається <u>алгебраїчним рівнянням n -го степеня.</u>

Основна теорема алгебри стверджує, що всяке алгебраїчне рівняння степеня n >0 має хоча б один корінь, дійсний або комплексний.

Представимо $P(x)$ у вигляді

$P(x)=(x-x_1)Q(x)+R(x).$

(тут $Q(x)$ многочлен, а $R(x)$ – залишок від ділення $P(x)$ на $(x-x_1)$). При $x=x_1$ виконується умова: $P(x_1)=R(x_1).$ Таким чином, залишок від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $x-x_1$ при $x=x_1$ дорівнює значенню цього многочлена $P(x_1)$ (теорема Безу).

Якщо $P(x_1)=0,$ тобто x_1 є коренем многочлена, то $R(x_1)=0,$ і $P(x)=(x-x_1)Q(x).$ Тут $Q(x)$ – многочлен степеня $n-1,$ старший коефіцієнт якого дорівнює A_0. Якщо цей многочлен не є тотожно сталою, то до нього можна знову застосувати основну теорему алгебри. Якщо x_2 – корінь рівняння $Q(x)=0,$ то $P(x)=(x-x_1)(x-_2)Q_1(x).$ Продовжуючи цей процес, одержуємо: $P(x)=A_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n).$ Якщо кратність кореня $x_1-k_1,$ кореня $x_2-k_2,...,$ кореня x_r-k_r, то $P(x)=A_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r}.\quad (k_1+k_2+...+k_r=n).$

Отже, алгебраїчне рівняння n - го степеня має n коренів (якщо кожен корінь рахувати стільки разів, яка його кратність).

Якщо коефіцієнти многочлена $A_0, A_1, ..., A_n$ – дійсні числа і комплексне число $\alpha+\beta i$ є коренем многочлена $P(x)=0$, то спряжене йому, число $\alpha-\beta i$ також є коренем многочлена. Зауважимо, що зручно об’єднувати співмножники виду

$(x-(\alpha+\beta i))(x-(\alpha-\beta i))$:

$(x-(\alpha+\beta i))(x-(\alpha-\beta i))=((x-\alpha)-\beta i)((x-\alpha)+\beta i)=(x-\alpha)^2\beta^2=(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2).$

Таким чином, многочлен $P(x)$ можна розкласти на лінійні та квадратичні співмножники:

$$P(x)=A_0(x-x_1)^{k_1}...(x^2+px+q')^{l_1}...(k_1+...+l_1+...=n)$$

Якщо два многочлена рівні один одному при будь-яких значеннях x, то рівня їх степені та рівні між собою коефіцієнти при однакових степенях: якщо

$a_0x^n+a_1x^{n-1}...+a_n\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m$,

то $n=m, a_0=b_0, a_1=b_1, ..., a_n=b_n.$

<u>Зауваження.</u> Для випадків, коли $n=1, n=2$ рівняння $P(x)=0$ розв’язуються за формулами, відомими з шкільного курсу математики. При $n=3$ та $n=4$ також існують загальні формули розв’язування таких рівнянь – формули Кардано і Феррарі. Доведено, що при $n\geq 5$ не існує формул для розв’язування рівнянь $P(x)=0$ в радикалах.

2. Розкладання раціональних дробів на найпростіші

Нехай многочлени $Q(x)$ та $f(x)$ не мають спільних коренів. Раціональним дробом називається відношення двох многочленів $\dfrac{Q(x)}{f(x)}=\dfrac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+...+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n}$.

Якщо степінь чисельника менше степені знаменника, тобто $m<n,$ то дріб називається правильним, якщо ж $m\geq n$ – неправильним.

У випадку неправильного дробу чисельник ділять на знаменник та представляють даний дріб у вигляді суми многочлена та деякого правильного дробу: $\dfrac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\dfrac{F(x)}{f(x)}$

Після цього правильний нескоротний дріб $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ розкладають на найпростіші раціональні дроби.

Правильні раціональні дроби виду

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ($k\geq 2, k-$ ціле число);

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}\left(\dfrac{p^2}{4}-q<0\right)$;

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ $k\geq 2,$ $\dfrac{p^2}{4}-q<0$ називається найпростішими дробами I, II, III, IV типів.

Має місце

Теорема 1. Нехай $x=a$ корінь знаменника кратності k, тобто $f(x)=(x-a)^k f_1(x),$ де $f_1(a)\neq 0.$

Тоді даний правильний нескоротний дріб $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ можна представити у вигляді суми двох інших правильних дробів в такий спосіб:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)},$$

де A – відмінне від нуля стале число, а $F_1(x)$ – многочлен, степінь якого менше степеня знаменника $(x-a)^{k-1}f_1(x)$.

Для доведення теореми 1 представимо дріб

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\left(\frac{F(x)}{f(x)}-\frac{A}{(x-a)^k}\right)=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F(x)-Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)}.$$

Підберемо А так, щоб різниця $F(x)-Af_1(x)$ ділилася на $(x-a)$. Згідно з теоремою Безу, для цього необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$F(a)-Af_1(a)=0.$$

Звідси визначаємо: $A=\dfrac{F(a)}{f_1(a)}$. Значить, саме при такому значенні А будемо мати: $F(x)-Af_1(x)=(x-a)F_1(x)$. Це і доводить теорему 1.

Цю ж саму теорему 1 можна застосувати до виразу $\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}$. Оскільки $(x=a)$ – корінь кратності k, одержимо:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$ де $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ – правильний нескоротний дріб. Має місце

Теорема 2. Якщо $f(x)=\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\varphi_1(x)$, причому $\varphi_1(x)$ не ділиться на x^2+px+q, то правильний раціональний дріб $\frac{F(x)}{f(x)}$ можна представити у вигляді суми двох інших правильних дробів у такий спосіб:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}}+\frac{\phi_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}\varphi_1(x)},$$

де $\phi_1(x)$ – многочлен, степінь якого менше степеня многочлена $\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}\varphi_1(x)$, а M і N – сталі.

Із теореми 1 і 2 випливає такий важливий для практичних застосувань

Висновок. Якщо $f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\ldots\left(x^2+lx+s\right)^{\nu}$, то дріб $\frac{F(x)}{f(x)}$ можна представити у вигляді

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-c)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-c)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+$$

$$\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}}+\frac{M1x+N1}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}}+\ldots.+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{Px+Q}{\left(x^2+lx+s\right)^{\nu}}+\frac{P_1x+Q1}{\left(x^2+lx+s\right)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.$$

Для визначення невизначених коефіцієнтів вираз справа зводять до спільного знаменника, після чого (в чисельниках) прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа. Одержується система для визначення невідомих сталих.

Наприклад. Представити дріб $\frac{x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}$ у вигляді суми найпростіших дробів.

Розв'язування. Згідно з висновком з теорем 1 і 2, маємо:

$$\frac{x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}.$$

Звідси одержуємо:

$$x = Ax^2 + A + Bx^3 + Bx - Bx^2 - B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при x^3, x^2, x та вільні члени зліва і справа одержуємо:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A - B - 2C + D = 0 \\ B + C - 2D = 1 \\ A - B + D = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, маємо:

$$A = \frac{1}{2}, B = 0, C = 0, D = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\dfrac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \dfrac{1}{2(x-1)^2} - \dfrac{1}{2(x^2+1)}.$

<u>Зауваження</u>. Для того, щоб одержати систему для визначення $A, B, C, D,$ можна скористатися методом коллокації, який полягає в тому, який полягає в тому, що рівняння

$$x = A(x-1)^2 B(x-1)(x^2+1)(Cx+D)(x-1)^2$$

розписують при чотирьох (по кількості невідомих фіксованих) значеннях змінної x (наприклад, при $x = 0, x = 1, x = -1, x = 2$):

$$\begin{cases} A - B + D = 0 \\ 2A = 1 \\ 2A - 4B + 4(D - C) = -1 \\ 5A + 5B + (2C + D) = 2 \end{cases}.$$

Розвязуючм систему, одержуємо такий самий розв'язок, як і раніше.

3. Інтегрування дробів

Для інтегрування раціональних дробів перш за все перевіряють, правильний дріб чи ні. Якщо дріб неправильний, потрібно виділити цілу частину та правильний дріб, шляхом ділення чисельника на знаменник. Ціла частина – це многочлен, який легко інтегрується. Дробову ж частину записують у вигляді суми найпростіших раціональних дробів і інтегрують.

Зупинимося детально на інтегруванні дробів 1- го, 2- го, 3- го та 4- го типів

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c;$

II. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c;$

III. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} +$$
$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{y^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

IV. Покажемо, як можна зменшити k на одиницю при інтегруванні виразів виду

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2 px+q\right)^k}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{AP}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx.$$

Останній інтеграл представимо як суму двох інтегралів: $\frac{1}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ та $\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$. В першому інтегралі слід виконати заміну змінних $z = x^2+px+q;$ при цьому інтеграл зводиться до табличного $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^k}$ і легко інтегрується. В другому інтегралі слід виділити повний квадрат в знаменнику: $\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k} = \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$, де $t = x+\frac{p}{2}, m^2 = q-\frac{p^2}{4}$.

Перетворюємо останній інтеграл:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{m^2 dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{\left(m^2+t^2-t^2\right)dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} - \int \frac{t^2 dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}.$$

В передостанньому інтегралі знаменник містить $\left(t^2+m^2\right)^{k-1}$, тобто показник степеня зменшився на одиницю. Останній інтеграл доцільно інтегрувати по частинах:

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \int \frac{t\cdot t\cdot dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int t\frac{d\left(t^2+m^2\right)}{\left(t^2+m^2\right)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\int td\left(\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right).$$ Інтегруючи по частинах, маємо:

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left(\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right).$$

Отже, показник степеня в знаменнику ми зменшили на одиницю. Таким способом можна зменшити його аж до одиниці та одержати табличний інтеграл.

Розглянемо приклади на інтегрування раціональних дробів.

<u>Приклад №1</u>. Знайти $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+4}dx.$

<u>Розвязування</u>. Оскільки дріб неправильний, поділимо чисельник на знаменник; таким чином,

$$\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+4}dx = \int\left(x^3-3x+\frac{12x-1}{x^2+4}\right)dx = \int x^3 dx - 3\int xdx + \int \frac{12x-1}{x^2+4}dx =$$

$$\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 6\ln\left(x^2 4\right) - \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + c.$$

<u>Приклад №2</u>. Знайти $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)}$.

<u>Розв'язування</u>. Представимо правильний підінтегральний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$. Маємо:

$$x = Ax + 2A + Bx^2 - 2B + Bx + Cx^2 - 2Cx + C$$

Система для визначення A, B, C:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + B - 2C = 1 \\ 2A - 2B + C = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуючи її, одержуємо: $A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{9}, C = -\frac{2}{9}$.

Отже, $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)} = \int \frac{\frac{1}{3}dx}{(x-1)^2} + \int \frac{\frac{2}{9}dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{2}{9}dx}{x+2} = \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{2}{9}\ln|x-1| -$

$-\frac{2}{9}\ln|x+2| + c = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\ln|x+2| + c.$

4.Інтегрування найпростіших ірраціональностей

Інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається через елементарні функції – через раціональні функції, логарифми та арктангенси. Інтеграл від ірраціональної функції не завжди можна виразити через елементарні функції. Нижче будуть розглянуті випадки, коли за допомогою тієї чи іншої підстановки задача інтегрування ірраціональних чи трансцендентних функцій зводиться до інтегрування дробово-раціональних функцій і, отже, вирішується за допомогою елементарних функцій.

1. Розглянемо інтеграл виду $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{5}}\right)dx,$ де R – раціональна функція своїх аргументів, а $m, n, ..., r, s$ – сталі числа. Знайдемо спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$ та позначимо його k. Виконавши підстановку $x = t^k$, одержимо інтеграл від раціональної функції відносно t.

<u>Наприклад</u>. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} = \left| \begin{matrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{matrix} \right| = 4\int \frac{t^5dt}{t^3+1} = 4\left(\int t^2dt - \int \frac{t^2dt}{t^3+1}\right) =$

$= 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\ln|t^3+1|\right) + c = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right) + c.$

2. Аналогічно інтегруються вирази виду

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ ($a, b, c, d, m, n, ..., r, s$ – сталі числа).

Нехай k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$. Виконавши підстановку $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, одержимо інтеграл від дробово-раціональної функції.

Наприклад. Звести інтеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$ до інтеграла від дробово-раціональної функції.

Розв'язок. Виконаємо заміну змінних $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Звідси

$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{-4tdt}{\left(1+t^2\right)^2}$.

Отже, $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x^2} = -4\int t \frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1-t^2\right)^2} \frac{tdt}{\left(1+t^2\right)^2} = -4\int \frac{t^2 dt}{\left(1-t^2\right)^2}$.