Диференціальне рівняння виду

$$y' = f(x)\cdot g(y)$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $y' = f(x)\cdot g(y)$, або $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$.

Отримаємо рівняння з *відокремленими змінними*

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx .$$

Інтегруючи рівняння $\displaystyle\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$,

отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) диференціального рівняння

Задача 1

Розв'язати диференціальні рівняння:

$$y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$$

Розв'яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+y^2}}{y} .$$

Підставимо $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} .$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C \text{, або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}.$$

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є *однорідною функцією нульового виміру*, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Для розв'язання рівняння введемо допоміжну невідому

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або}$$

$$y = ux,$$

Задача 2.

Розв'язати диференціальні рівняння:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y)$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{1+u^2}{2},$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{2} - u, \qquad u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2}, \qquad u'x = \frac{(u-1)^2}{2},$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \quad \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \frac{y}{x}$:

$\dfrac{-2}{\dfrac{y}{x} - 1} = \ln C|x|$, $\quad \dfrac{-2x}{y-x} = \ln C|x|$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = x - \dfrac{2x}{\ln C|x|}$.