Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з *первісних* функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ ($x\in X$); C – довільна стала.

Таблиця основних невизначених інтегралів

I. $$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)\,.$$

II. $$\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\,.$$

III. $$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

Зокрема, при $a=e$

III°. $$\int e^x\,dx=e^x+C\,.$$

IV. $$\int\cos x\,dx=\sin x+C\,.$$

V. $$\int\sin x\,dx=-\cos x+C\,.$$

VI. $$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C\,.$$

VII. $$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C\,.$$

VIII. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad (a>0).$

Зокрема, при $a=1$

VIII$^{\text{o}}$. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C.$

IX. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad (a>0).$

Зокрема, при $a=1$

IX$^{\text{o}}$. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

X. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a>0).$

Зокрема, при $a=1$

X$^{\text{o}}$. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

XI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \qquad (a\neq 0).$

Зокрема, при $a=1$

XI$^{\text{o}}$. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C.$

1. Безпосереднє інтегрування

$$\int\left(4-\frac{3}{x}+\frac{e^x}{2}\right)dx = \int 4\,dx - \int\frac{3}{x}dx + \int\frac{1}{2}e^x\,dx =$$

$$= 4\int dx - 3\int\frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int e^x\,dx = 4x - 3\ln|x| + 0{,}5\,e^x + C.$$

2. Введення змінної під знак диференціала

$$\boxed{\int f(au+b)d(au+b) = F(au+b)+C.}$$

$$\int f(au+b)du = \left| \begin{matrix} d(au+b) = a\,du; \\ du = \dfrac{1}{a}d(au+b) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{a}\int f(au+b)d(au+b) = \frac{1}{a}F(au+b)+C.$$

Приміром,

$$\int \sqrt{2x+3}dx = \left| \begin{matrix} d(2x+3) = 2dx; \\ dx = \dfrac{1}{2}d(2x+3) \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{1/2}d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+3)^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C.$$

3. Знаходження інтеграла методом заміни змінної

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C,$$

зовнішня функція

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

внутрішня функція

похідна внутрішньої функції

Часто використовують такі перетворення диференціала («введення під знак диференціала»):

$$f'(x)dx = df(x);$$

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2); \qquad \frac{1}{x}dx = d(\ln x);$$

$$\cos xdx = d(\sin x); \qquad \sin xdx = -d(\cos x);$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\operatorname{ctg} x);$$

$$\frac{1}{1+x^2}dx = d(\operatorname{arctg} x); \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x).$$

Приміром,

$$\int \sin^4 x \cos xdx = \left| d(\sin x) = \cos xdx \right| = \int \sin^4 xd(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\; dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\; dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\; dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t^5\; dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}(\arcsin x)^6 + C$$

$$\int \frac{6^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{x^2+1}\; dx \end{array} \right| = \int 6^t\; dt = \frac{6^t}{\ln 6} + C = \frac{1}{\ln 6}6^{\operatorname{arctg} x} + C$$

Визначений інтеграл

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ – це число, яке позначають $\int_a^b f(x)dx$. Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $[a,b]$ – відрізок інтегрування; a та b – відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за *формулою Ньютона-Лейбніца*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Для знаходження первісної доцільно використати відповідний невизначений інтеграл – $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Властивості визначеного інтеграла: а) сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла; б) визначений інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів кожної з цих функцій.

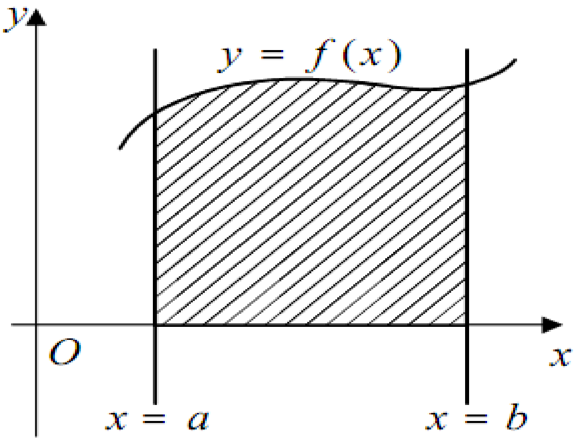
$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

$$\int_0^2 \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 - 0 = \ln 5.$$

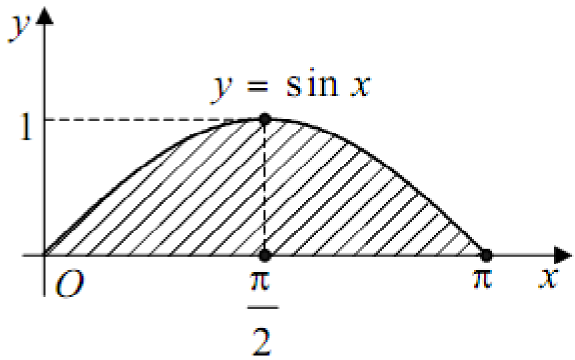
Обчислення площ плоских фігур

1. Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $y=f(x)$ неперервна і $f(x)\geq 0$, то площа *криволінійної трапеції* (рис. 1), обмеженої графіком функції $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ та віссю Ox, обчислюється за формулою



$$S=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

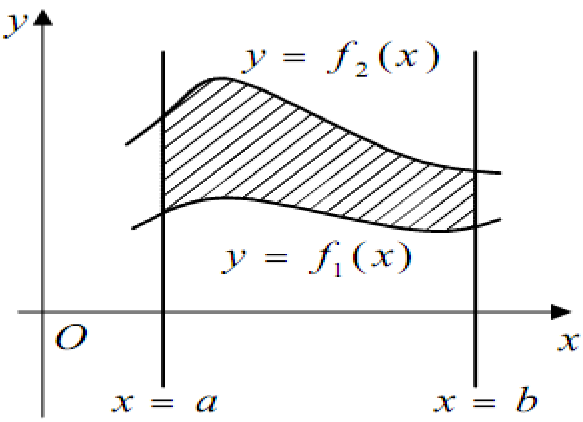
Рис. 1



$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=$$

$$=1+1=2 \quad \text{(кв. од.).} \quad \lrcorner$$

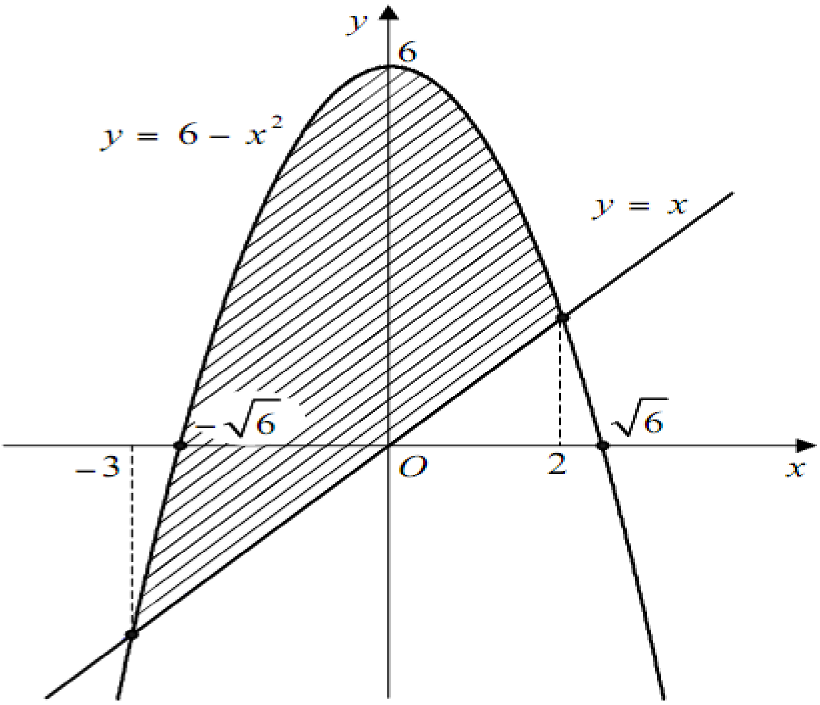
2. Площа фігури (рис. 2), обмеженої знизу графіком функції $y=f_1(x)$, зверху – $y=f_2(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$, обчислюється за формулою



$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx\,.$$

Рис. 2

Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 6 - x^2$, $y = x$.



$$S = \int_{-3}^{2} \left(\left(6 - x^2\right) - x\right) dx = \left(6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{2} =$$

$$= \left(6 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2}\right) =$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 2 + 18 - 9 + \frac{9}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. од.).}$$