Лабораторна робота №4

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ САК

Мета роботи: *Визначити перехідні характеристики для заданих систем та дослідити точність цих систем в усталеному режимі.*

Теоретичні відомості

При проектуванні систем автоматичного керування, крім забезпечення стійкості, доводиться вирішувати проблеми забезпечення потрібних показників якості перехідного процесу (швидкодії, коливальності, перерегулювання, плавності тощо) та точності в усталеному стані.

При зміні вхідної дії $g(t)$ системи вихідну координату $y(t)$ можна записати у вигляді:

$$y(t) = y_{\text{пер}}(t) + y_{\text{вим}}(t), \qquad (4.1)$$

де $y(t)$ – розв'язок диференційного рівняння, що описує систему; $y_{\text{пер}}(t)$ – вільна складова перехідного процесу, що відповідає загальному розв'язку однорідного диференційного рівняння; $y_{\text{вим}}(t)$ – вимушена складова, що відповідає частковому розв'язкові диференційного рівняння при заданому вигляді правої частини (вигляді вхідної дії $g(t)$).

З (4.1) видно, що якість перехідного процесу можна оцінити за його складовими $y_{\text{пер}}(t)$ та $y_{\text{вим}}(t)$.

Розрізняють дві групи показників якості: перша група – показники якості перехідного процесу $y_{\text{пер}}(t)$; друга – показники, що характеризують вимушену (усталену) складову $y_{\text{вим}}(t)$, за якою визначають точність системи.

Показники якості, що визначаються безпосередньо за кривою перехідного процесу, називають прямими оцінками якості. Крива перехідного процесу може бути одержана теоретично або експериментально. У тих випадках, коли побудувати криву перехідного процесу дуже складно, використовують непрямі оцінки якості. До непрямих показників якості можна віднести запаси стійкості системи за фазою та амплітудою.

Оцінку якості перехідного процесу в системі можна провести за кривою перехідного процесу при типовому вхідному сигналу, який є одиничною ступінчатою функцією $1(t)$.

Аналітично одиничний ступінчатий сигнал можна описати наступною функцією:

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

Перехідною функцією системи (ланки) називають функцію $h(t)$, що описує зміну вихідної координати системи (ланки), коли на її вхід при нульових початкових умовах подається одиничний ступінчатий сигнал.

Графік перехідної функції $h(t)$ від часу t називають перехідною або розгінною характеристикою.

До прямих оцінок якості належать:

1. Перерегулювання σ, % – відносне максимальне відхилення перехідної характеристики від усталеного значення вихідної координати, виражене у відсотках:

$$\sigma = \frac{h_{\max 1} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\% ,$$

де $h_{\max 1}$ – значення першого максимуму; $h_{\text{уст}}$ – усталене значення вихідної координати (рис. 9).

Допустиме значення перерегулювання в кожному конкретному випадку визначається умовами експлуатації системи. В більшості випадків це значення знаходиться в межах $\sigma = 10 - 30\%$.

2. Час регулювання (час перехідного процесу) t_p – мінімальний час, після сплину якого регульована координата

$y(t)$ буде залишатися близькою до усталеного значення із заданою точністю:

$$\left|h(t) - h_{уст}\right| \le \Delta$$

де Δ − задана постійна величина (звичайно задається у відсотках від усталеного значення вихідної координати $h_{уст}$, рис. 9).

3. Число коливань n, яке має перехідна характеристика $h(t)$ за час регулювання t_p. Найчастіше допускається $n = 1 - 2$, іноді $n = 3 - 4$, але в деяких випадках коливання у системі недопустимі (рис. 4.1).

4. Час досягнення першого максимуму $t_{\max}$ (рис. 9).

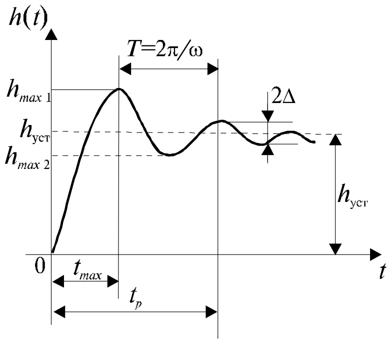

Рис. 4.1. Перехідний процес в системі при одиничній ступінчастій вхідній дії

Розглянемо побудову перехідної характеристики з використанням перетворення Лапласа. Вихідна координата в зображенні за Лапласом визначається виразом

$$Y(p) = \Phi(p) G(p),$$

де $\Phi(p)$ − передатна функція замкненої системи; $G(p)$ − зображення за Лапласом вхідного сигналу. Перехідна характеристика за визначенням знаходиться при $G(p)=\frac{1}{p}$ та нульових початкових умовах.

Вважаючи, що передатна функція $\Phi(p)$ відображає відношення двох поліномів $\Phi(p)=\frac{B(p)}{D(p)}$, отримуємо:

$$Y(p)=\frac{B(p)}{pD(p)}.$$

Якщо рівняння $D(p)=0$ не має нульових та кратних коренів, у відповідності до теореми розкладу, перехідна характеристика, що відповідає цьому зображенню, визначається залежністю:

$$h(t)=\frac{B(0)}{D(0)}+\sum_{k=1}^{r}\frac{B(p_k)}{p_k D'(p_k)}e^{p_k t}+ \\ +\sum_{i=1}^{l}2A_i e^{-\alpha_i t}\cos(\beta_i t+\varphi_i), \tag{4.2}$$

де p_k – корені рівняння, r – число дійсних коренів, l – число пар комплексно-спряжених коренів вигляду $p_{i,i+1}=-\alpha_i \pm j\beta_i$, $A_i=\left|\frac{B(p_i)}{p_i D'(p_i)}\right|$, $\varphi_i=Arg\frac{B(p_i)}{p_i D'(p_i)}$.

Точність роботи системи в усталених режимах оцінюється за величиною усталеної похибки $x_{\text{уст}}=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$ при типових вхідних керуючих діях та збуренні.

Якщо на систему діють керуюча дія $g(t)$ та збурення $f(t)$, то зображення за Лапласом похибки визначається виразом:

$$X(p)=\Phi_x(p)G(p)+\Phi_f(p)F(p), \tag{4.3}$$

де

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W(p)} \quad -$$

передатна функція замкненої системи за похибкою;

$$\Phi_f(p) = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} \quad -$$

передатна функція замкненої системи за збуренням.

Оригінал похибки можна знаходити різноманітними методами, але на практиці найчастіше застосовується метод, у якому спочатку знаходяться коефіцієнти похибки, а потім записується безпосередньо вираз для похибки, до складу якого входять знайдені коефіцієнти. Цей метод справедливий як при вхідній дії у вигляді одиничної ступінчатої дії або лінійно зростаючої функції, так й для вхідних дій, що повільно змінюються.

До вхідних дій $g(t)$ або $f(t)$, що повільно змінюються, відносяться такі процеси, які віддалік від початкової точки мають кінцеве число m похідних, наприклад, для $g(t)$:

$$\frac{dg}{dt}, \frac{d^2 g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^m g}{dt^m}.$$

Згідно з (4.3) знайдемо усталену похибку від вхідної керуючої дії $g(t)$:

$$X(p) = \Phi_x(p) G(p) = \frac{G(p)}{1 + W(p)}.$$

У цьому виразі розкладемо передатну функцію замкненої системи за похибкою $\Phi_x(p)$ у ряд Маклорена за степенями, які зростають, в околі точки $p = 0$, що відповідає більшим значенням часу ($t \to \infty$):

$$X(p)=\left[c_0+c_1p+\frac{c_2}{2!}p^2+\ldots\right]G(p). \qquad (4.4)$$

У виразі (4.4) величини $c_0, c_1, c_2 \ldots$ називаються коефіцієнтами похибок і можуть бути обчислені згідно із загальними правилами розкладу функції $\Phi_x(p)$ в ряд Тейлора:

$$c_0=\left[\Phi_x(p)\right]_{p=0};\; c_1=\left[\frac{d\Phi_x(p)}{dp}\right]_{p=0};$$
$$c_2=\left[\frac{d^2\Phi_x(p)}{dp^2}\right]_{p=0};\ldots;\mathrm{c}_m=\left[\frac{d^m\Phi_x(p)}{dp^m}\right]_{s=0}, \qquad (4.5)$$

де c_0 – коефіцієнт статичної (позиційної) похибки, c_1 – коефіцієнт швидкісної похибки, c_2 – коефіцієнт похибки від прискорення.

Використання (4.5) доцільно при дослідженні систем першого-третього порядків, так як у цьому випадку проведення диференціювання виразу для $\Phi_x(p)$ є досить легкою задачею. Для систем вищих порядків коефіцієнти похибок доцільно обчислюються не за формулами (4.5), а шляхом поділу полінома чисельника передатної функції $\Phi_x(p)$ на поліном знаменника цієї ж функції.

Нехай

$$\Phi_x(p)=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_{m-1}p+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}=\frac{B_m(p)}{A_n(p)}.$$

Поліноми $B_m(p)$ та $A_n(p)$ записуються в порядку зростання степеня параметра p. В результаті ділення отримаємо нескінченний ряд $C(p)$, який буде мати наступний вигляд:

$$C(p)=c'_0+c'_1\,p+c'_2\,p^2+\ldots.$$

Порівнюючи цей ряд з виразом в квадратних дужках (4.4), знаходимо, що

$$c_0 = c'_0\,,\, c_1 = c'_1\,,\ \frac{c_2}{2} = c'_2\,,\, \dots\ .$$

Переходячи у виразі (4.4) до оригіналу, отримуємо формулу для обчислення усталеної похибки:

$$x_{\text{уст}}(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!}\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots\ . \tag{4.6}$$

Порядок виконання роботи

1. Запустити програму Mathcad та відкрити файл **Tau_lab4.mcd**.
2. Задати параметри двох вхідних сигналів − одиничного ступінчатого та лінійно зростаючого.
3. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію розімкнутої системи виду:

$$W1(s) := \frac{K1}{(T1\cdot s + 1)\cdot\left(T2\cdot s^2 + T3\cdot s + 1\right)}\ .$$

4. Отримати зображення за Лапласом заданих вхідних сигналів.
5. Для обох варіантів вхідного сигналу визначити зображення за Лапласом сигналів похибок замкненої САК.
6. Згідно з п. 3 знайти передатну функцію замкненої САК за похибкою.
7. Шляхом розкладання отриманої у п. 6 передатної функції у ряд Тейлора, визначити коефіцієнти похибок замкненої САК.
8. Побудувати графіки динамічної та статичної похибок системи для обох варіантів вхідного сигналу.
9. Оцінити якість системи п. 3 за перехідною характеристикою.
10. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію розімкнутої системи виду:

$$W2(s) := \frac{K1}{(T \cdot s^2 + 1) \cdot s}.$$

11. Повторити пункти 4-9 для заданої передатної функції.
12. Зробити висновки о впливі виду системи на якість її роботи з точки зору динамічної та статичної похибки.

Контрольні запитання

1. Визначте поняття “перехідна функція системи”.
2. Які показники якості перехідного процесу в системі можуть бути визначені за перехідною функцією і яким чином?
3. Як визначити перехідну функцію системи, якщо її математична модель задана у вигляді передаточної функції?
4. Як визначається усталені похибки системи при: постійних, лінійних та повільно змінюваних вхідних діях?
5. Що таке “коефіцієнти похибок” і як вони визначаються?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самотокін Б.Б.* Теорія автоматичного керування. Курс лекцій. – Житомир: ЖІТІ, 2002.– 400 с.
2. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория истем автоматического регулирования. – М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 768 с.
3. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
4. Теория автоматического управления. В 2-х ч. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1986. – 367 с.

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу “Теорія автоматичного керування”. Частина 1 “Лінійні системи автоматичного керування”. − Видання друге, перероблене і доповнене.

Укладачі С.С. Свістельник, М.В. Богдановський − Житомир: ЖДТУ, 2015.− с.54

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу “Теорія автоматичного керування”. Частина 1 “Лінійні системи автоматичного керування”

Укладачі: Свістельник Сергій Сергійович, старший викладач
Богдановський Мартін Віталійович, старший викладач

Рецензент : Каргополова Н.П.