Лабораторна робота №2

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ САК ЗА АЛГЕБРАЇЧНИМИ КРИТЕРІЯМИ

Мета роботи: *Дослідити стійкість систем автоматичного керування за алгебраїчними критеріями та визначити критичний коефіцієнт підсилення замкнутої САК.*

Теоретичні відомості

Визначення стійкості. У найпростішому випадку поняття стійкості системи пов'язане з її здатністю повертатися (з певною точністю) в стан рівноваги після припинення дії зовнішніх сил, які вивели її з цього стану. Якщо система є нестійкою, то вона не повертається у стан рівноваги, з якого її вивели, або віддаляється від нього, чи робить навколо нього недопустимо великі коливання.

Нехай САК описується лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами:

$$D(p)y(t) = B(p)g(t) + N(p)f(t) \tag{2.1}$$

де $g(t)$ та $f(t)$ – зовнішні дії, що викликають відхилення керованої координати $y(t)$ від її усталеного значення.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2.1) є сумою загального розв'язку $y_{заг}(t)$ відповідного однорідного рівняння та часткового розв'язку $y^*(t)$ цього рівняння при заданих вхідних діях:

$$y(t) = y_{заг}(t) + y^*(t)$$

В теорії автоматичного керування загальний розв'язок називають перехідною складовою, а частковий розв'язок – вимушеною складовою, тобто:

$$y(t) = y_{пер}(t) + y_{вим}(t). \tag{2.2}$$

Для стійкості лінійної САК необхідно і достатньо, щоб перехідна складова $y_{\text{пер}}(t)$ з плином часу прагнула до нуля:

$$\lim_{t\to\infty} y_{\text{пер}}(t) = 0\ . \qquad (2.3)$$

Для визначення перехідної складової розв'яжемо диференційне рівняння (2.1) без правої частини:

$$D(p)y(t) = \left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right)y(t) = 0\ . \qquad (2.4)$$

Розв’язок цього рівняння може бути записаний у вигляді:

$$y_{\text{пер}}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \ldots + C_n e^{p_n t}\ , \qquad (2.5)$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ − сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами і виглядом лівої та правої частин рівняння (2.1), $p_1, p_2, ..., p_n$ − корені алгебраїчного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0\ . \qquad (2.6)$$

Вираз (2.6) називають характеристичним рівнянням.

Сталі інтегрування $C_1, C_2, ..., C_n$, числові значення яких залежать від структури САК, від виду та інтенсивності вхідних дій $g(t)$ і $f(t)$ та від початкових умов, характеризують лише кількісну сторону перехідного процесу і не впливають на стійкість системи.

Тому стійкість лінійної системи залежить лише від виду коренів характеристичного рівняння системи. Для того, щоб лінійна система була стійка **необхідно і достатньо, щоб дійсні частини усіх коренів характеристичного рівняння були від'ємними (або корені мають бути «лівими» − знаходитись в лівій комплексній напівплощині, зображаючись точками)**.

Згідно з (1.7), в загальному випадку передатна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \ldots + c_n},$$

тоді передатна функція замкненої системи за керуючим сигналом буде:

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{C(p) + B(p)} = \frac{B(p)}{D(p)}, \tag{2.7}$$

де

$$D(p) = C(p) + B(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n .$$

Багаточлен $D(p)$ називається характеристичним поліномом, а рівняння $D(p) = 0$ або $1 + W(p) = 0$ (у випадку замкненої САК з одиничним, від'ємним зворотним зв'язком) – характеристичним рівнянням замкнутої системи. Поліноми $C(p)$ та $D(p)$ мають однаковий степінь.

Крім того, що лінійна система може бути стійкою або не стійкою, вона може також знаходитись на межі стійкості. Розрізняють три типи межі стійкості.

- Система знаходиться на аперіодичній межі стійкості, якщо в характеристичному рівнянні (2.6) є один нульовий корінь. Нульовий корінь з'являється в (2.6) при рівності нулю вільного члена ($a_n = 0$). В цьому випадку система є стійкою не відносно керованої координати $y(t)$, а відносно швидкості її зміни.
- Система знаходиться на коливальній межі стійкості, якщо в характеристичному рівнянні (2.6) є одна пара чисто уявних спряжених коренів, а усі інші корені мають від'ємні дійсні частини. В системі у цьому випадку встановлюються незатухаючі гармонійні коливання.
- Межі стійкості третього типу відповідає наявність в характеристичному рівнянні (2.6) нескінченного

кореня. Умовою знаходження системи на межі стійкості такого типу є перетворення в нуль коефіцієнта при старшій похідній характеристичного рівняння (2.6), тобто $a_0 = 0$.

САК, що знаходяться на межі стійкості, непрацездатні, оскільки найменші зміни параметрів системи можуть призвести або до стійкості, або до нестійкості цієї системи.

Алгебраїчні критерії стійкості. Алгебраїчні критерії стійкості дозволяють судити про стійкість системи за коефіцієнтами характеристичного рівняння:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{2.8}$$

Необхідною умовою стійкості системи будь-якого порядку є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння (2.8). Це означає, що якщо всі коефіцієнти додатні, то система може бути як стійкою, так і нестійкою. Якщо ж хоча б один коефіцієнт характеристичного рівняння (2.8) від'ємний або дорівнює нулю, то система заздалегідь нестійка або знаходиться на межі стійкості (тобто непрацездатна).

Для систем першого та другого порядків необхідна умова стійкості є й достатньою умовою стійкості, оскільки в цьому випадку при додатних коефіцієнтах характеристичного рівняння всі його корені є від'ємними. Для систем третього та вищих порядків додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння є необхідною умовою, але не достатньою. В цьому випадку всі дійсні корені характеристичного рівняння (якщо вони є) є від'ємними, а комплексні корені можуть бути як від'ємними, так і додатними.

Критерії стійкості Рауса та Гурвіца дозволяють за коефіцієнтами характеристичного рівняння (2.8) без обчислення його коренів зробити висновок про стійкість системи (визначають достатню умову стійкості для систем третього порядку та вище).

Критерій стійкості Рауса

Цей критерій стійкості був запропонований в 1877 році англійським математиком Е. Раусом у вигляді правила (алгоритму), яке зводиться до дій над елементами матриці вигляду:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \end{bmatrix}. \qquad (2.9)$$

В першому рядку знизу цієї матриці записуються коефіцієнти характеристичного рівняння (2.8), що мають парні індекси ($a_0, a_2, \ldots$); в другому рядку знизу − коефіцієнти (2.8) з непарними індексами ($a_1, a_3, \ldots$), формуючи так звану групу А. Елементи наступних рядків вводяться групами (В, С, D тощо) в кількості за рядками $(n-1)\cdot 2$, де n − порядок (старший ступінь) характеристичного рівняння та отримуються в результаті обчислення визначників 2-го порядку, що розраховуються за формулою (2.10).

$$\lambda_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_{i-1,1} & \lambda_{i-1,j+1} \\ \lambda_{i-2,1} & \lambda_{i-2,j+1} \end{bmatrix}, \qquad (2.10)$$

де $\lambda_{i,j}$ − будь який коефіцієнт, що потребує визначення, крім відомих коефіцієнтів групи А (але які можуть використовуватись в правій частині рівності 2.10); i − номер рядка в порядку знизу і догори матриці (2.9); j − номер стовпчика в порядку зліва направо матриці (2.9).

Наприклад, для системи 3 порядку $n = 3$ і треба визначити коефіцієнти $(3-1)\cdot 2$ рядків, тобто чотирьох (груп А та В).

Критерій стійкості Рауса формулюється наступним чином: **для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно і достатньо, щоб елементи першого**

стовпця матриці (2.9) мали один і той же знак, тобто при $a_0 > 0$ були додатними:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ b_0 > 0,\ b_1 > 0,\ c_0 > 0,\ c_1 > 0, \ldots .$$

Використовуючи критерій Рауса, отримаємо умови стійкості для систем першого, другого, третього порядків:

$n = 1$,

$$a_0 p + a_1 = 0 ;$$

умови стійкості для системи першого порядку будуть:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0 .$$

$n = 2$,

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 ;$$

умови стійкості для системи другого порядку будуть:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0 ,$$
$$b_0 = a_1 a_2 > 0 .$$

$n = 3$,

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 ;$$

умови стійкості для системи третього порядку будуть:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0 ,\ b_0 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$
$$b_1 = a_3 b_0 > 0 .$$

Таким чином, необхідною та достатньою умовами стійкості для систем першого та другого порядків є додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння. Для рівнянь третього та більш високих порядків, крім додатності коефіцієнтів, необхідною умовою є дотримання додаткових співвідношень між коефіцієнтами характеристичного рівняння системи.

Критерій стійкості Гурвіца

В 1895 році професором математики А. Гурвіцем був розроблений алгебраїчний критерій стійкості у формі визначників, що складаються з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи. Із коефіцієнтів характеристичного рівняння (2.8) складається головний визначник Гурвіца розмірністю $n X n$ (2.11) за наступним правилом: по головній діагоналі визначника зліва направо виписуються всі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 до a_n в порядку зростання індексів. Стовпці вверх від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами характеристичного рівняння з послідовно зростаючими індексами, а стовпці вниз − коефіцієнтами з послідовно спадаючими індексами. На місце коефіцієнтів з індексами більшими за n (n − порядок характеристичного рівняння) та меншими нуля проставляють нулі.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \qquad (2.11)$$

Відкреслюючи в головному визначникові Гурвіца, як показано пунктиром, діагональні мінори в (2.11), одержимо визначники Гурвіца нижчого порядку:

$$\Delta_1 = a_1 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} ; \tag{2.12}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix} .$$

Для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб при $a_0 > 0$ **всі визначники Гурвіца були додатними**.

Розкриваючи визначники Гурвіца (2.12), отримаємо умови стійкості для систем першого, другого та третього порядків:

$n = 1$,

$$a_0 p + a_1 = 0 ;$$

умови стійкості для системи першого порядку будуть:

$$a_0 > 0 ,\ \Delta_1 = a_1 > 0 .$$

$n = 2$,

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 ;$$

умови стійкості для системи другого порядку будуть:

$$a_0 > 0 ,\quad \Delta_1 = a_1 > 0 ,\ \Delta_2 = a_1 a_2 > 0 .$$

$n = 3$,

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 ;$$

умови стійкості для системи третього порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0,$$
$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \; \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0. \tag{2.13}$$

Якщо всі визначники Гурвіца нижчого порядку є додатними, то система знаходиться на межі стійкості, коли головний визначник дорівнює нулю:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0.$$

Остання рівність можлива у двох випадках:

- $a_n = 0$ – система знаходиться на межі аперіодичної стійкості (один із коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю);
- $\Delta_{n-1} = 0$ – система знаходиться на межі коливальної стійкості (два комплексно-спряжені корені характеристичного рівняння знаходяться на уявній осі).
- Таким чином, умовою знаходження системи на межі коливальної стійкості є перетворення в нуль ($n-1$)-го визначника Гурвіца при додатності всіх визначників Гурвіца нижчого порядку.

Побудова областей стійкості в площині параметрів системи. D-розбиття. При проектуванні САК часто необхідно дослідити вплив її окремих та груп параметрів на стійкість. Для розв'язку цієї задачі використовують метод побудови областей стійкості, тобто визначення таких областей значень параметрів, при яких система виявляється стійкою. Рівняння меж областей стійкості можна знаходити, використовуючи, наприклад, алгебраїчний критерій Гурвіца.

В більшості випадків необхідно знайти критичний коефіцієнт підсилення системи $k_{кр}$, при якому лінійна система буде стійкою. Для систем третього порядку цей коефіцієнт знаходиться з умови (2.13), де він може входити до складу a_2 та a_3. Умова для знаходження $k_{кр}$, згідно з (2.13) має вигляд:

$$a_1 a_2 > a_0 a_3 , \qquad (2.14)$$

звідси $k_{кр}$ повинно буди меншим за деяке число.

Цей метод дозволяє знаходити $k_{кр}$ тільки для систем третього порядку.

Більш загальний метод побудови областей стійкості був запропонований Ю.М. Неймарком та названий ним методом D-розбиття. Цей метод дозволяє виділити у просторі коефіцієнтів характеристичного рівняння a_i або у просторі параметрів системи (коефіцієнтів передачі, сталих часу тощо), від яких залежать коефіцієнти характеристичного рівняння, області $D(m), m = 1,2\ldots$, що відповідають правим кореням характеристичного рівняння, при цьому область $D(0)$ буде областю стійкості.

Розглянемо D-розбиття за одним параметром. Припустимо, що потрібно з'ясувати вплив на стійкість системи деякого параметра ν, що лінійно входить до характеристичного рівняння (2.8). Зведемо характеристичне рівняння (2.8) до вигляду:

$$D(p) = M(p) + \nu N(p) = 0 ,$$

де $M(p)$ − поліном, що не залежить від ν; $N(p)$ − поліном, що містить параметр ν множником.

Зробимо заміну виду: $p = j\omega$, тоді межа D-розбиття визначається рівнянням:

$$D(j\omega) = M(j\omega) + \nu N(j\omega) = 0 ,$$

звідси:

$$\overline{\nu} = -\frac{M(j\omega)}{N(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega). \qquad (2.15)$$

Оскільки параметр ν в лінійних системах є дійсним числом (коефіцієнт передачі, стала часу), то (2.15) слід було б доповнити умовою $Y(\omega) = 0$. Однак при початковій побудові цього обмеження не роблять, тобто вважають $\overline{\nu}$ комплексною величиною, відмічаючи це рискою зверху, щоб відрізнити її від дійсного значення ν.

Змінюючи ω теоретично від $-\infty$ до ∞, обчислюють $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ і будують на комплексній площині $\overline{\nu}$ межу D-розбиття. Межу D-розбиття можна отримати, будуючи спочатку її ділянку додатних значень ω, а потім доповнюючи дзеркальним відображенням побудованої ділянки відносно дійсної осі. Відповідно до правила виділення області стійкості (правила штриховки за літературними джерелами) необхідно при зміні ω теоретично від $-\infty$ до ∞ в напрямку побудови ділянок кривої D-розбиття заштриховувати область, що розташовується зліва від кривої. Якщо в результаті такого штрихування відбулось накладання штриховок, областю стійкості буде та, де накралась найбільша кількість штриховок. Оскільки параметр $\overline{\nu}$, що досліджується, є дійсним числом, то з одержаної (комплексної) області стійкості виділяють лише відрізок стійкості, тобто частина дійсної осі, що лежить в області стійкості. Так як параметри, що досліджуються, в більшості випадків є додатними, то на відрізку стійкості обирають лише додатні значення цього параметру.

Порядок виконання роботи

1. Запустити програму Mathcad та відкрити файл **Tau_lab2.mcd**.
2. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію замкненої системи з одиничним від'ємним зворотним зв'язком, а також її характеристичний поліном для системи

з передатною функцією розімкнутої системи виду:

$$W1(s) := \frac{K1}{(T1 \cdot s + 1) \cdot \left(T2 \cdot s^2 + T3 \cdot s + 1\right)}.$$

3. Використовуючи функцію ***coeffs*** по відношенню до характеристичного поліному замкненої системи, виділити його коефіцієнти.
4. Використовуючи отримані коефіцієнти дослідити стійкість замкненої системи за критерієм Рауса.
5. Використовуючи отримані коефіцієнти дослідити стійкість замкненої системи за критерієм Гурвіца.
6. За даними пп. 3 знайти критичний коефіцієнт підсилення системи $k_{\text{кр}}$.
7. Використовуючи метод *D*-розбиття побудувати межу *D*-розбиття, обрав за параметр, що досліджується, коефіцієнт підсилення системи. У звіті навести аналітичні вирази для визначення функції, що залежить від досліджуваного параметру, її дійсну і уявну частини у частотній формі, та відповідний графік межі стійкості.
8. Порівняти результати, отримані при виконанні пп. 6 та 7.
9. Побудувати перехідну характеристику заданої системи.
10. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію замкненої системи, а також її характеристичний поліном для системи з передатною функцією розімкнутої системи виду:

$$W2(s) := \frac{K1}{\left(T \cdot s^2 + 1\right) \cdot s}.$$

11. Повторити пункти 3-9 для заданої передатної функції.
12. Зробити висновки про вплив виду системи на її стійкість та якість.

Контрольні запитання

1. Визначте поняття стійкості лінійних систем автоматичного керування.
2. Що є необхідною і достатньою умовою стійкості лінійних САК?

3. Назвіть основні типи меж стійкості лінійних САК та приведіть умови знаходження системи на кожній з цих меж.
4. Які вимоги пред'являються до коефіцієнтів характеристичного рівняння системи, виходячи з необхідної умови стійкості системи?
5. Що таке "характеристичне рівняння системи" і як його отримати?
6. Які алгебраїчні критерії стійкості ви знаєте? Дайте цим критеріям коротку характеристику.
7. Виходячи з алгебраїчних критеріїв стійкості, що є необхідною і достатньою умовою стійкості для систем 1-го та 2-го порядків?
8. Сформулюйте критерій стійкості Рауса.
9. Сформулюйте критерій стійкості Гурвіца.
10. Що таке метод "D-розбиття"?
11. Розкрийте сутність методу D-розбиття за одним параметром, який лінійно входить в характеристичне рівняння системи.