Лабораторна робота №1

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАНОК САК

Мета роботи: *Дослідити перехідні характеристики елементарних ланок систем автоматичного керування при надходженні на вхід ланки одиничного ступінчатого сигналу.*

Теоретичні відомості

Реальні системи при теоретичних дослідженнях подають у вигляді моделей, які мають деякий формальний опис, найчастіше математичний.

Математична модель системи – це опис процесів, що проходять в системі. Математичний опис може бути аналітичним (за допомогою рівнянь), графічним (за допомогою графіків, структурних схем та графів) і табличним (за допомогою таблиць).

Найбільш поширеним описом систем, є опис за допомогою нелінійних диференційних рівнянь, наприклад другого порядку:

$$F\left(y, \dot{y}, \ddot{y};\ g, \dot{g};\ f, \dot{f}\right) = 0, \tag{1.1}$$

де y – вихідна координата; g та f – керуюча дія та збурення; $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dot{g}$, $\dot{f}$ – похідні за часом від відповідних змінних.

Рівняння (1.1), що описує процеси, які протікають у системі, при довільних вхідних діях та початкових умовах, називають <u>рівнянням динаміки</u>. При постійних вхідних діях $g = g_0 = const$, $f = f_0 = const$ процес в системі з плином часу встановиться і вихідна координата набуде деякого постійного значення $y = y_0 = const$. В цьому режимі рівняння (1.1) буде мати вигляд:

$$F\left(y_0, 0, 0;\ g_0, 0;\ f_0, 0\right) = 0. \tag{1.2}$$

Рівняння (1.2) описує статичний або усталений режим, і його називають <u>рівнянням статики</u>.

В багатьох випадках нелінійні диференціальні рівняння можна лінеаризувати, тобто при деяких припущеннях замінити початкові нелінійні рівняння виду (1.1) лінійними рівняннями, які наближено описують процеси в системі. Перетворення нелінійних рівнянь в лінійні називається лінеаризацією.

Лінеаризація нелінійного диференціального рівняння базується на припущенні про достатню малість відхилень всіх змінних (фізичних величин) ланки від їх усталених значень.

Припущення щодо достатню малість відхилень змінних звичайно виконується, оскільки замкнута САК прагне зменшити будь-які відхилення змінних від потрібних значень.

Після проведення лінеаризації рівняння (1.1) набуває вигляду [1]:

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = k_1 g + \\ + k_2 \frac{dg}{dt} + k_3 f + k_4 \frac{df}{dt} . \tag{1.3}$$

Вираз (1.3) носить назву лінійного диференційного рівняння ланки у відхиленнях. Це рівняння є наближеним. Воно описує динамічний процес, який протікає у системі, не у всій області зміни змінних, а лише в малому околі усталеного статичного стану і є лінійним лише відносно відхилень змінних.

Якщо ввести символ диференціювання

$$p = \frac{d}{dt} ,$$

то рівняння (1.3) зводиться до операторної форми:

$$\left(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1\right) y = k_1 \left(1 + \tau_1 p\right) g + k_3 \left(1 + \tau_2 p\right) f , \tag{1.4}$$

де $\tau_1 = \dfrac{k_2}{k_1}$, $\tau_1 = \dfrac{k_4}{k_3}$.

Коефіцієнти T_1, T_2 називаються сталими часу системи (мають розмірність секунд), k_1, k_2 − коефіцієнтами передачі системи. Коефіцієнти τ_1, τ_2 також мають розмірність секунд і характеризують ступінь дії на ланку швидкостей зміни вхідної величини $g(t)$ та збурення $f(t)$.

Системи, які описуються лінійними диференційними рівняннями, називаються лінійними системами.

Для зручності дослідження систем вводять поняття передаточної функції.

Передатною функцією системи називають відношення зображення за Лапласом вихідної змінної до зображення за Лапласом вхідної змінної при нульових початкових умовах. Якщо ланка (система) має декілька входів, то при визначенні передатної функції відносно будь-якої однієї вхідної дії решта вхідних дій вважаються рівними нулю. В таблиці 1.1 наведено неперервне перетворення Лапласа для деяких функцій.

Для наведеного прикладу (1.4) будемо мати дві передатні функції − за вхідною дією, та за збуренням:

$$W_g(p) = \frac{k_1(1+\tau_1 p)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad W_f(p) = \frac{k_3(1+\tau_2 p)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \tag{1.5}$$

За допомогою передатних функцій отримуємо алгебраїчну форму запису початкового диференційного рівняння:

$$y(t) = W_g(p)g(t) + W_f(p)f(t). \tag{1.6}$$

Передатні функції характеризують властивості передачі сигналу системою з входу на вихід в динамічному режимі ($p \neq 0$).

В загальному випадку передатна функція САК може бути подана у вигляді відношення двох поліномів:

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \ldots + c_n}, \tag{1.7}$$

причому умовою фізичної реалізації системи є $m \le n$.

Таблиця 1.1

Неперервне перетворення Лапласа

$f(t)$	$F(p)$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha t}\sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha t}\cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$

Поліном довільного порядку можна розкласти на прості множники, тому передатну функцію (1.7) можна представити у вигляді добутку простих множників виду

$$kp\,,\ (d_1 p + d_2),\ (d_1 p^2 + d_2 p + d_3) \tag{1.8}$$

та простих дробів виду

$$\frac{k}{p},\ \frac{k}{d_1 p + d_2},\ \frac{k}{d_1 p^2 + d_2 p + d_3}. \tag{1.9}$$

Ланки, передатні функції яких мають вигляд простих множників (1.8) або простих дробів (1.9), називають <u>типовими або елементарними ланками</u>.

Рівняння (1.6) можна представити у вигляді структурної схеми (рис. 1.1), де g – керуюча дія; f – збурення; y – керована координата; $x = g - y$ – похибка. Для керованості вихідної координати $y(t)$ у систему вводять зворотній зв'язок.

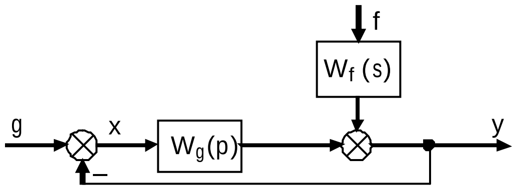

Рис. 1.1. Структурна схема системи

Якщо припустити, що $f(t) = 0$, то за нульових початкових умов знаходимо

$$W_g(p) = \frac{Y(p)}{G(p)}. \qquad (1.10)$$

$W_g(p)$ – <u>передатна функція розімкнутої системи</u>, яка характеризує динамічні властивості передачі сигналу з основного входу на вихід системи при відсутності зворотного зв'язку.

Якщо припустити, що $g(t) = 0$, та розірвати ланцюг зворотного зв'язку, то

$$W_f(p) = \frac{Y(p)}{F(p)}. \qquad (1.11)$$

$W_f(p)$ – <u>передатна функція розімкнутої системи за збуренням</u>, яка характеризує динамічні властивості передачі збурення на вихід системи при відсутності зворотного зв'язку.

Основною передатною функцією САК або передатною функцією замкненої системи, або головним оператором $\Phi(p)$ називається відношення зображень за Лапласом керованої координати до керівної дії за нульових початкових умов і при збуренні $f(t)=0$:

$$\Phi(p)=\frac{Y(p)}{G(p)}=\frac{W_g(p)}{1+W_g(p)}. \qquad (1.12)$$

Передатна функція $\Phi(p)$ визначає динамічні властивості САК при проходженні основного керуючого сигналу $g(t)$.

Передатною функцією системи за збуренням $\Phi_f(p)$ називається відношення зображень за Лапласом керованої координати до збурення за нульових початкових умов та при керуючій дії $g(t)=0$:

$$\Phi_f(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{W_f(p)}{1+W_g(p)}. \qquad (1.13)$$

Передатна функція $\Phi_f(p)$ характеризує вплив збурень на керовану координату в статичному та динамічному режимах роботи САК.

Передатною функцією системи за похибкою $\Phi_x(p)$ називається відношення зображень за Лапласом похибки до керуючої дії за нульових початкових умов та при збуренні $f(t)=0$:

$$\Phi_x(p)=\frac{X(p)}{G(p)}=\frac{1}{1+W_g(p)}. \qquad (1.14)$$

Зв’язок між передатною функцією системи за похибкою та головним оператором можна встановити з виразу (1.12) за допомогою підстановки $Y(p)=G(p)-X(p)$, в результаті якої одержимо:

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p). \quad (1.15)$$

Передатна функція $\Phi_x(p)$ характеризує похибку САК при обробці керуючого сигналу в статичному та динамічному режимах.

Порядок виконання роботи

1. Визначити передатні функції елементарних ланок САК (розімкнених САК) а також передатні функції замкнених САК, отриманих шляхом охоплення одиничним зворотним зв'язком елементарних ланок САК за керуючим сигналом та за сигналом похибки $\Phi_g(p)$, $\Phi_x(p)$ за формулами (1.12) та (1.14) для:
   - інерційної ланки першого порядку;
   - інерційної ланки другого порядку;
   - консервативної ланки.

   Отримані передатні функції та етапи розрахунку навести у звіті.
2. Визначити теоретичні перехідні характеристики елементарних ланок САК за заданими диференційними рівняннями цих ланок згідно з отриманим варіантом завдання, для елементарних ланок, зазначених в пункті 1, шляхом застосування табличного методу зворотного перетворення Лапласа (див. табл. 1.1). У звіті навести аналітичні вирази передатних функцій та перехідних характеристик.
3. Запустити програму Mathcad та відкрити файл **Tau_lab1.mcd**.
4. Згідно з отриманим варіантом провести моделювання вищеозначених ланок двома способами:
   - з використанням чисельного методу вирішення диференційного рівняння (функція ***odesolve***);
   - з використанням чисельного методу зворотного перетворення Лапласа (функція ***invlaplace***).

   Навести фрагменти програмного коду вирішення означених задач та графіки перехідних процесів, що при цьому отримуються.

5. Отримані в п. 4 результати порівняти з розрахунковими та зробити висновки про збіжність результатів.

Контрольні запитання

1. Що таке “математична модель системи автоматичного керування”?
2. Що таке “передатна функція ланки”? Приведіть вирази для знаходження передатних функцій розімкненої системи, замкненої системи за керуючим сигналом, замкненої системи за похибкою.
3. Які типові динамічні ланки ви знаєте? Приведіть їх диференційні рівняння та передатні функції.