

## ДОДАТОК

Розгляньмо просту задачу, щоб продемонструвати принципи максимізації сподіваної корисності. Припустімо, що споживач має деяке багатство  $w$  і розмірковує щодо інвестування якоїсь суми  $x$  у ризиковий актив. Цей актив може принести дохід  $r_g$  за „сприятливого” результату, або  $r_b$  — за „несприятливого”. Ви маєте міркувати про  $r_g$  як додатний дохід — підвищення вартості активу, а про  $r_b$  як про від’ємний дохід — зниження вартості активу.

Таким чином, багатство споживача за сприятливого та несприятливого результату становитиме:

$$W_g = (w - x) + x(1 + r_g) = w + xr_g$$

$$W_b = (w - x) + x(1 + r_b) = w + xr_b.$$

Припустімо, що сприятливий результат трапляється з імовірністю  $\pi$ , а несприятливий — з ймовірністю  $(1 - \pi)$ . Тоді, якщо споживач вирішить інвестувати  $x$  доларів, сподівана корисність дорівнюватиме:

$$EU(x) = \pi u(w + xr_g) + (1 - \pi)u(w + xr_b).$$

Споживач хоче вибрати  $x$  так, щоб максимізувати значення цього виразу.

Продиференціювавши його за  $x$ , ми визначимо, як змінюється корисність при зміні  $x$ :

$$EU'(x) = \pi u'(w + xr_g)r_g + (1 - \pi)u'(w + xr_b)r_b. \quad (12.3)$$

Друга похідна функції корисності за  $x$  становить:

$$EU''(x) = \pi u''(w + xr_g)r_g^2 + (1 - \pi)u''(w + xr_b)r_b^2. \quad (12.4)$$

Якщо споживач є неохочим до ризику, то його функція корисності буде увігнутою, звідки випливає, що  $u''(w) < 0$  для будь-якого рівня багатства. Отже, друга похідна функції сподіваної корисності однозначно буде від’ємною. Функція сподіваної корисності буде увігнутою функцією від  $x$ .

Розгляньмо зміну сподіваної корисності для першого долара, інвестованого у ризиковий актив. Вона є просто першою похідною рівняння (12.3) за  $x$ , що дорівнює 0:

$$EU'(0) = \pi u'(w)r_g + (1 - \pi)u'(w)r_b = u'(w)[\pi r_g + (1 - \pi)r_b].$$

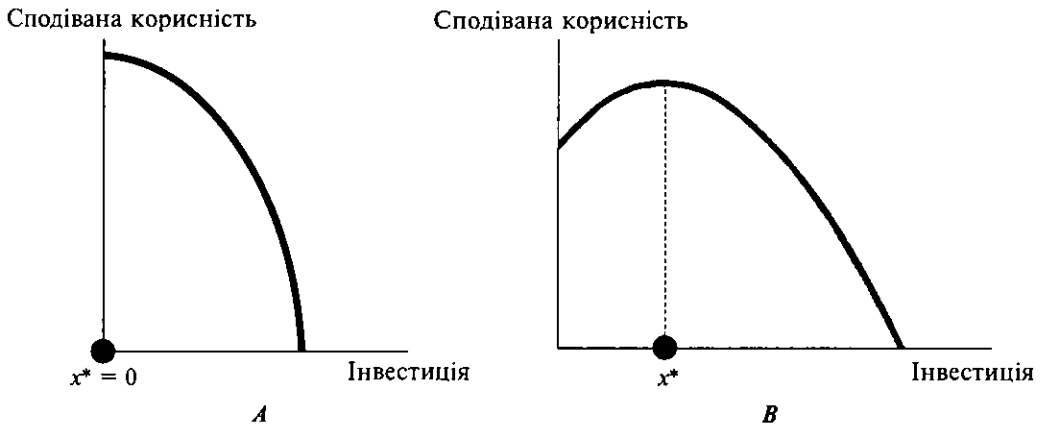
Вираз у дужках є сподіваним доходом на актив. Якщо сподіваний дохід на актив є від’ємним, тоді при вкладенні в актив першого долара сподівана корис-

ність має зменшуватися. Проте оскільки друга похідна функції сподіваної корисності є від'ємною внаслідок її увігнутості, то корисність при інвестуванні додаткових доларів повинна продовжувати зменшуватися.

Таким чином, ми дійшли до того, що якщо *сподівана ціна гри* є від'ємною, особа, неохоча до ризику, матиме найвищу *сподівану корисність* за  $x^* = 0$ : вона не захоче прийняти пропозицію, яка може бути пов'язана з програшем.

З іншого боку, якщо сподіваний прибуток на актив є додатним, то тоді перевищення  $x$  нуля підвищить сподівану корисність. Отже, така особа завжди хотітиме інвестувати трохи більше у ризиковий актив, незалежно від того, наскільки вона є неохочною до ризику.

Сподівана корисність як функція від  $x$  показана на *рис. 12.4*. На *рис. 12.4 А* сподіваний дохід є від'ємним, а оптимальний вибір буде  $x^* = 0$ . На *рис. 12.4 В* сподіваний дохід є додатним у певному інтервалі, отож споживач хоче інвестувати деяку додатну суму  $x^*$  у ризиковий актив.



*Рис. 12.4. Скільки інвестувати у ризиковий актив.*

На *рис. А* величина оптимальної інвестиції становить 0, а на *рис. В* споживач хоче інвестувати якусь додатну суму

Оптимальна сума інвестиції для споживача визначатиметься тією умовою, що похідна функції сподіваної корисності за  $x$  повинна дорівнювати нулю. Оскільки друга похідна функції автоматично набуватиме від'ємного значення внаслідок увігнутості функції, ця точка є глобальним максимумом.

Прирівнявши (12.3) до нуля, ми маємо:

$$EU'(x) = \pi u'(w + x r_g) r_g + (1 - \pi) u'(w + x r_b) r_b = 0. \quad (12.5)$$

Це рівняння визначає оптимальний вибір  $x$  для аналізованого споживача.

## ПРИКЛАД. Вплив оподаткування на інвестування у ризикові активи

Як змінюється рівень інвестування у ризикові активи, якщо прибутки від них є об'єктом оподаткування? Якщо індивід сплачує податки за ставкою  $t$ , то його доходи після сплати податку становитимуть  $(1 - t)r_g$  та  $(1 - t)r_b$ . Отже, умовою першого порядку, яка визначає його оптимальну суму інвестиції  $x$ , буде:

$$EU'(x) = \pi u'(w + x(1-t)r_g)(1-t)r_g + (1-\pi)u'(w + x(1-t)r_b)(1-t)r_b = 0.$$

Скоротивши  $(1-t)$ , отримаємо:

$$EU'(x) = \pi u'(w + x(1-t)r_g)r_g + (1-\pi)u'(w + x(1-t)r_b)r_b = 0. \quad (12.6)$$

Давайте позначимо розв'язок задачі на максимізацію без податків — коли  $t=0$  — як  $x^*$ , а розв'язок задачі на максимізацію з податками як  $\hat{x}$ . Яким є співвідношення між  $x^*$  та  $\hat{x}$ ?

Не подумавши, ми можемо припустити, що  $x^* > \hat{x}$ , — що оподаткування ризикового активу буде зменшувати стимули здійснювати інвестицію в нього. Та, як виявляється, цей висновок є абсолютно неправильним! Оподаткування ризикового активу, здійснюване у той спосіб, який ми описали, насправді *стимулюватиме* інвестування в нього!

Справді, існує пряме співвідношення між  $x^*$  та  $\hat{x}$ . Воно представлене

$$\hat{x} = \frac{x^*}{1-t}.$$

Щоб довести це, просто зверніть увагу на те, що значення  $\hat{x}$  задовольняє умові першого порядку щодо оптимального вибору за наявності податку. Підставивши це значення у рівняння (12.6), ми отримаємо:

$$\begin{aligned} EU'(\hat{x}) &= \pi u'(w + \frac{x^*}{1-t}(1-t)r_g)r_g + (1-\pi)u'(w + \frac{x^*}{1-t}(1-t)r_b)r_b = \\ &= \pi u'(w + x^*r_g)r_g + (1-\pi)u'(w + x^*r_b)r_b = 0, \end{aligned}$$

де остання рівність випливає з того факту, що  $x^*$  є оптимальним розв'язком за відсутності податку.

Що ж це тут відбувається? Яким чином запровадження податку підвищує суму інвестиції у ризиковий актив? А відбувається ось що. Коли запроваджується податок, індивід матиме менше виграшу за сприятливого стану, проте він також *матиме менше збитку за несприятливого стану*. Змінюючи свою первинну інвестицію у пропорції  $1/(1-t)$ , споживач може відтворити *після сплати податку* той самий дохід, який він мав до того, як з'явився податок. Податок скорочує його сподіваний дохід, проте він так само скорочує і ризик: завдяки підвищенню розміру інвестиції споживач може отримати ту саму структуру доходів, яку він мав до того, і, таким чином, повністю компенсувати вплив податку. Податок на ризикову інвестицію є податком на виграш, коли дохід є додатним, але він перетворюється на субсидію на програш, коли дохід стає від'ємним.