МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Вища математика

Варіанти завдань та методичні вказівки для самостійної роботи студентів

Частина 1

Лінійна алгебра
Векторна алгебра
Аналітична геометрія
Вступ до аналізу
Диференціальне числення

Житомир – 2014

Вища математика: Варіанти завдань та методичні вказівки для самостійної роботи студентів. Ч. 1. – Житомир: ЖДТУ, 2014. – 50 с.

Укладачі: Бондарчук Василь Миколайович,
Коваль Валерій Олександрович.

Лінійна алгебра

<u>Завдання 1.</u> Дано матриці A та B. Знайти AB^T .

1.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.5. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.7. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1.8. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.10. $A=\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.11. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.12. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.13. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.14. $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1.15. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Завдання 2.</u> Розв’язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

2.1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2=-5, \\ 5x_1+2x_2=4. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 3x_1+x_2=6, \\ 2x_1-x_2=-1. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1-2x_2=1, \\ x_1+2x_2=5. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x_1+x_2=2, \\ 3x_1+2x_2=2. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 4x_1+3x_2=2, \\ x_1-2x_2=-5. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 2x_1+5x_2=1, \\ x_1+x_2=2. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 5x_1+3x_2=-1, \\ 4x_1+x_2=-5. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 2x_1-3x_2=-1, \\ x_1+2x_2=10. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=4, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 5x_1-3x_2=1, \\ 4x_1+x_2=11. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ x_1-2x_2=5. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x_1+3x_2=1, \\ 2x_1+x_2=-3. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$

<u>Завдання 3.</u> Розв'язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

3.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

Векторна алгебра

Завдання 4. Дано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Знайти: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; 4) скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 5) векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$.

4.1. $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(-5;4;2)$.

4.2. $\vec{a}=(-4;-1;3)$, $\vec{b}=(2;-4;1)$.

4.3. $\vec{a}=(-3;2;4)$, $\vec{b}=(1;-3;5)$.

4.4. $\vec{a}=(2;-1;4)$, $\vec{b}=(3;-1;5)$.

4.5. $\vec{a}=(-6;2;3)$, $\vec{b}=(2;1;-4)$.

4.6. $\vec{a}=(2;3;-2)$, $\vec{b}=(1;2;-4)$.

4.7. $\vec{a}=(3;-5;2)$, $\vec{b}=(-2;3;1)$.

4.8. $\vec{a}=(-4;2;-3)$, $\vec{b}=(1;-4;1)$.

4.9. $\vec{a}=(4;-3;5)$, $\vec{b}=(2;-5;1)$.

4.10. $\vec{a}=(1;-4;5)$, $\vec{b}=(2;1;6)$.

4.11. $\vec{a}=(-1;2;-3)$, $\vec{b}=(-2;4;-3)$.

4.12. $\vec{a}=(2;-4;5)$, $\vec{b}=(1;-2;2)$.

4.13. $\vec{a}=(3;-2;3)$, $\vec{b}=(-1;5;-2)$.

4.14. $\vec{a}=(4;-1;3)$, $\vec{b}=(2;-3;3)$.

4.15. $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(1;1;3)$.

Завдання 5. Дано координати вершин трикутника $A_1A_2A_3$. Знайти кут $A_1A_2A_3$.

5.1. $A_1(3;1;2), A_2(5;0;-1), A_3(0;3;6)$.

5.2. $A_1(3;1;4), A_2(-1;6;1), A_3(-1;1;6)$.

5.3. $A_1(3;3;9), A_2(6;9;1), A_3(1;7;3)$.

5.4. $A_1(2;4;3), A_2(7;6;3), A_3(4;9;3)$.

5.5. $A_1(9;5;5), A_2(-3;7;1), A_3(5;7;8)$.

5.6. $A_1(0;7;1), A_2(4;1;5), A_3(4;6;3)$.

5.7. $A_1(5;5;4), A_2(3;8;4), A_3(3;5;10)$.

5.8. $A_1(6;1;1), A_2(4;6;6), A_3(4;2;0)$.

5.9. $A_1(7;5;3), A_2(9;4;4), A_3(4;5;7)$.

5.10. $A_1(6;6;2), A_2(5;4;7), A_3(2;4;7)$.

5.11. $A_1(-4;6;4), A_2(2;1;5), A_3(-1;-2;2)$.

5.12. $A_1(2;-1;9), A_2(1;1;5), A_3(7;3;1)$.

5.13. $A_1(1;-2;2), A_2(-1;-3;4), A_3(5;5;-1)$.

5.14. $A_1(1;1;3), A_2(7;1;1), A_3(4;1;-1)$.

5.15. $A_1(-3;1;-2), A_2(2;0;-1), A_3(3;4;-5)$.

Завдання 6. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$ та об'єм піраміди.

6.1. $A_1(7;0;3), A_2(3;0;-1), A_3(3;0;5), A_4(4;3;-2)$.

6.2. $A_1(1;-1;6), A_2(2;5;-2), A_3(-3;3;3), A_4(4;1;5)$.

6.3. $A_1(3;6;1), A_2(6;1;4), A_3(3;-6;10), A_4(7;5;4)$.

6.4. $A_1(1;1;3), A_2(4;1;6), A_3(6;4;1), A_4(0;5;6)$.

6.5. $A_1(4;4;5), A_2(10;2;3), A_3(-3;5;4), A_4(6;-2;2)$.

6.6. $A_1(-1;2;5), A_2(-4;6;4), A_3(2;1;5), A_4(-1;-2;2)$.

6.7. $A_1(2;-1;9), A_2(1;1;5), A_3(7;3;1), A_4(2;6;-2)$.

6.8. $A_1(1;-2;2), A_2(-1;-3;4), A_3(5;5;-1), A_4(2;4;-5)$.

6.9. $A_1(1;1;3), A_2(7;1;1), A_3(2;2;2), A_4(4;1;-1)$.

6.10. $A_1(-3;1;-2), A_2(2;0;-1), A_3(0;-2;6), A_4(3;4;-5)$.

6.11. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$.

6.12. $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$.

6.13. $A_1(7;2;2), A_2(-5;7;-7), A_3(5;-3;1), A_4(2;3;7)$.

6.14. $A_1(8;-6;4), A_2(10;5;-5), A_3(5;6;-8), A_4(8;10;7)$.

6.15. $A_1(1;-2;7), A_2(4;2;10), A_3(2;3;5), A_4(5;3;7)$.

Аналітична геометрія

<u>Завдання 7.</u> Дано координати вершин трикутника ABC. Знайти: 1) рівняння сторони AB; 2) рівняння висоти CH; 3) рівняння медіани BM; 4) точку перетину медіани BM і висоти CH.

7.1. $A(7;3), B(3;-1), C(3;5)$.

7.2. $A(1;-1), B(2;5), C(-3;3)$.

7.3. $A(3;6), B(6;1), C(3;-6)$.

7.4. $A(1;3), B(1;6), C(6;2)$.

7.5. $A(4;5), B(2;3), C(-3;4)$.

7.6. $A(-1;2), B(-4;6), C(2;1)$.

7.7. $A(2;-1), B(1;5), C(3;1)$.

7.8. $A(1;-2), B(-1;-3), C(5;-1)$.

7.9. $A(1;3), B(7;1), C(2;-2)$.

7.10. $A(3;2), B(5;-1), C(0;6)$.

7.11. $A(2;3), B(-2;5), C(-2;-1)$.

7.12. $A(2;3), B(-1;4), C(-3;2)$.

7.13. $A(3;-2), B(2;-3), C(-5;-2)$.

7.14. $A(-3;1), B(-5;2), C(1;-1)$.

7.15. $A(-3;-2), B(2;-2), C(1;4)$.

<u>Завдання 8.</u> Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: 1) довжину сторони A_1A_2; 2) рівняння прямої A_1A_2; 3) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 4) рівняння висоти A_4O.

8.1. $A_1(4;2;5), A_2(0;7;2), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0)$.

8.2. $A_1(4;4;10), A_2(4;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;9)$.

8.3. $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9)$.

8.4. $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8)$.

8.5. $A_1(10;6;6), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(7;10;3)$.

8.6. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$.

8.7. $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$.

8.8. $A_1(7;2;2), A_2(5;7;7), A_3(5;3;1), A_4(2;3;7)$.

8.9. $A_1(8;6;4), A_2(10;5;5), A_3(5;6;8), A_4(8;10;7)$.

8.10. $A_1(7;7;3), A_2(6;5;8), A_3(3;5;8), A_4(8;4;1)$.

8.11. $A_1(4;2;5), A_2(0;7;1), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0)$.

8.12. $A_1(4;4;10), A_2(7;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;9)$.

8.13. $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9)$.

8.14. $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8)$.

8.15. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$.

Завдання 9. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку та знайти її параметри.

9.1. $9y^2-16x^2+32x-18y+137=0.$

9.2. $25x^2+16y^2+150x-64y-111=0.$

9.3. $16x^2-32x+36y-164=0.$

9.4. $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0.$

9.5. $x^2+16y^2-4x+32y+4=0.$

9.6. $9y^2-4x^2+24x+18y-63=0$

9.7. $x^2+9y^2+4x-54y+76=0.$

9.8. $36x^2+49y^2+72x-294y-1287=0.$

9.9. $4y^2-x^2-6x-16y-29=0.$

9.10. $4x^2+y^2+24x+2y-63=0.$

9.11. $9y^2-15x-36y-9=0.$

9.12. $25x^2-9y^2+50x+72y-344=0.$

9.13. $x^2-9y^2+8x+54y-74=0.$

9.14. $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0.$

9.15. $16x^2-64x+15y-161=0.$

<u>Завдання 10.</u> Побудувати криву в полярній системі координат.

10.1. $\rho = \sin\varphi + \dfrac{1}{2}$.

10.2. $\rho = 3\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

10.3. $\rho = 2\cos\varphi - \dfrac{1}{2}$.

10.4. $\rho = 2\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

10.5. $\rho = 3\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

10.6. $\rho = -\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

10.7. $\rho = -\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

10.8. $\rho = \dfrac{3}{2}\sin\varphi - 1$.

10.9. $\rho = 5\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \varphi\right)$.

10.10. $\rho = 4\sin\varphi - 2$.

10.11. $\rho = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \varphi\right)$.

10.12. $\rho = 3\cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

10.13. $\rho = 2 - 3\sin\varphi$.

10.14. $\rho = 4\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

10.15. $\rho = 5\cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Вступ до аналізу

<u>Завдання 11.</u> Знайти область визначення функції.

11.1. $y = \dfrac{x-6}{x^2 - 3x + 2}$.

11.2. $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{9 + 4x^2}$.

11.3. $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt[3]{x+2}}$.

11.4. $y=x\ln\left(4-x^2\right)$.

11.5. $y=x-\dfrac{5}{\sqrt{1-x}}$.

11.6. $y=\dfrac{x^2}{\cos x-1{,}5}$.

11.7. $y=\dfrac{\sin x}{2^x-4}$.

11.8. $y=\dfrac{2^x}{27+x^3}$.

11.9. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

11.10. $y=\dfrac{x+4}{\ln x}$.

11.11. $y=\dfrac{x^2-4}{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} x}$.

11.12. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{3^x-1}$.

11.13. $y=\dfrac{2x-5}{8-x^3}$.

11.14. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-9}$.

11.15. $y=\dfrac{x+4}{\log_2 x+1}$.

Завдання 12. Обчислити значення функції $f\left(x\right)$ у точках x_1 та x_2.

12.1. $f\left(x\right)=3x^2-2x-3,$ $x_1=-2,\ x_2=4.$

12.2. $f\left(x\right)=5x^2-3x+1,$ $x_1=-1,\ x_2=3.$

12.3. $f\left(x\right)=5+3x-2x^2,$ $x_1=-3,\ x_2=2.$

12.4. $f\left(x\right)=2x^2+x-3,$ $x_1=-3,\ x_2=2.$

12.5. $f\left(x\right)=x^2+6x-1,$ $x_1=-2,\ x_2=4.$

12.6. $f\left(x\right)=3x^2+x-4,$ $x_1=-2,\ x_2=1.$

12.7. $f\left(x\right)=3+2x-x^2,$ $x_1=-2,\ x_2=5.$

12.8. $f\left(x\right)=x^2+4x-3,$ $x_1=-4,\ x_2=3.$

12.9. $f\left(x\right)=4x^2-5x+2,$ $x_1=-3,\ x_2=1.$

12.10. $f\left(x\right)=3x^2+x-5,$ $x_1=-3,\ x_2=2.$

12.11. $f\left(x\right)=2x^2+3x-8,$ $x_1=-1,\ x_2=3.$

12.12. $f\left(x\right)=4+x-2x^2,$ $x_1=-3,\ x_2=2.$

12.13. $f\left(x\right)=2+4x-3x^2,$ $x_1=-2,\ x_2=4.$

12.14. $f\left(x\right)=3x^2-5x+4,$ $x_1=-2,\ x_2=4.$

12.15. $f\left(x\right)=4x^2+2x-3,$ $x_1=-1,\ x_2=3.$

Завдання 13. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

13.1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x-3}$.

13.2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$.

13.3. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$.

13.4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2+x-2}$.

13.5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2+4x-1}{x^2-6x-7}$.

13.6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$.

13.7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$.

13.8. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-9}$.

13.9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$.

13.10. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

13.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-7x+6}$.

13.12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$.

13.13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$.

13.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}$.

13.15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

Завдання 14. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

14.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^3+2x-4}$.

14.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+4x-3}{4x^2-x-6}$.

14.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x-3}{-5x^2+x+2}$.

14.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x-1}{x^4-6x+1}$.

14.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-4x+1}{2x^3+2x-4}$.

14.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x-3}{4x^5-x+6}$.

14.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{-3x^3+4x+14}$.

14.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^4-7x-1}{9x^3-6x+12}$.

14.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{-3x^3+2x-5}$.

14.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x+7}{4x^4-3x-6}$.

14.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x+1}{4x^3+2x^2-5}$.

14.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{-3x^2+x-2}$.

14.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{3x^3+x-2}$.

14.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x+1}{x^4-3x+1}$.

14.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-5x+1}{4x^3+3x-2}$.

Завдання 15. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

15.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{4-3x}-1}$.

15.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

15.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4-3x^2}-1}{x^2+x}$.

15.4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$.

15.5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

15.6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}$.

15.7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$.

15.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x-2x^2}$.

15.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{5x}$.

15.10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.

15.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6-x}-2}$..

15.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x+x^2}$.

15.13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}$.

15.14. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x+3}-1}$.

15.15. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{2x+9}-1}$.

Завдання 16. Знайти границю, скориставшись першою визначною границею.

16.1. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 4x\cdot \mathrm{ctg}\, 5x$.

16.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 2x}$.

16.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{\mathrm{tg}^2\, 3x}$.

16.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, 5x}{\sin 2x}$.

16.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,4x}{\sin^2 2x}$.

16.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

16.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,5x}{1-\cos 3x}$.

16.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,7x}{\arcsin 4x}$.

16.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{2x^2}$.

16.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{4x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

16.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}\,3x}$.

16.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\sin^2 5x}$.

16.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot \sin 3x}{\arcsin^2 5x}$.

16.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

16.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 5x}{\sin^2 4x}$.

<u>Завдання 17.</u> Знайти границю, скориставшись другою визначною границею.

17.1. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x-4}\right)^{2x}$.

17.2. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{2-x}}$.

17.3. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{3}{x-1}}$.

17.4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x-1}$.

17.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{3x+2}$.

17.6. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

17.7. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x-1}}$.

17.8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{2x+3}$.

17.9. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{5x}{x-2}}$.

17.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$.

17.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x-2}$.

17.12. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{1}{x-3}}$.

17.13. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3}{x-2}}$.

17.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{2x-1}$.

17.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x+7}\right)^{2x}$.

<u>Завдання 18.</u> Задано два комплексних числа z_1 та z_2.

Виконати дії: 1) z_1+z_2; 2) $z_1-\overline{z}_2$; 3) $z_1\cdot z_2$; 4) $\dfrac{z_1}{z_2}$; 5) $z_1^{\,3}$.

18.1. $z_1=1-2i,\ \ z_2=3+i.$

18.2. $z_1=3+i,\ \ z_2=1-2i.$

18.3. $z_1=4-3i,\ \ z_2=2+i.$

18.4. $z_1=-1+3i,\ \ z_2=4-i.$

18.5. $z_1=3+2i,\ \ z_2=1-3i.$

18.6. $z_1=4-3i,\ \ z_2=2+2i.$

18.7. $z_1=-2-3i,\ \ z_2=1+3i.$

18.8. $z_1=4+i,\ \ z_2=3+2i.$

18.9. $z_1=-2-3i,\ \ z_2=1+2i.$

18.10. $z_1=-1+i,\ \ z_2=-3-i.$

18.11. $z_1=4+5i,\ \ z_2=3-i.$

18.12. $z_1=2+3i,\ \ z_2=-1-i.$

18.13. $z_1=5+4i,\ \ z_2=2+3i.$

18.14. $z_1=-3+5\,i,\ \ z_2=4+i.$

18.15. $z_1=-4+i,\ \ z_2=-3-i.$

Завдання 19. Записати комплексне число z: 1) в алгебраїчній формі; 2) в тригонометричній формі; 3) в показниковій формі. Знайти z^5 та $\sqrt{z}$.

19.1. $z=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$.

19.2. $z=\dfrac{2}{1+i}$.

19.3. $z=\dfrac{-2}{\sqrt{3}-i}$.

19.4. $z=\dfrac{8}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$.

19.5. $z=\dfrac{2\sqrt{2}}{-1+i}$.

19.6. $z=\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$.

19.7. $z=\dfrac{-3}{1+\sqrt{3}i}$.

19.8. $z=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.

19.9. $z=\dfrac{1}{-1-i}$.

19.10. $z=-\dfrac{2}{-1+\sqrt{3}i}$.

19.11. $z=\dfrac{-8}{1+i}$.

19.12. $z=\dfrac{4}{-1+\sqrt{3}\;\;i}$.

19.13. $z=\dfrac{6}{-\sqrt{3}+i}$.

19.14. $z=\dfrac{2}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.

19.15. $z=\dfrac{2}{-1-\sqrt{3}i}$.

Диференціальне числення

Завдання 20. Продиференціювати задану функцію.

20.1. $y=2x^3+4\sqrt{x^7}-\operatorname{tg}x.$

20.2. $y = \frac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x.$

20.3. $y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\,\mathrm{arctg}\,x.$

20.4. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \arcsin x.$

20.5. $y = \frac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x.$

20.6. $y = \frac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x.$

20.7. $y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x.$

20.8. $y = \frac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x.$

20.9. $y = \frac{1}{2x^4} - 5\sqrt[5]{x^2} + 6\sin x.$

20.10. $y = \frac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x.$

20.11. $y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt[5]{x^2} - 2\arccos x.$

20.12. $y = \frac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5 \cdot 4^x.$

20.13. $y = \frac{2}{5}x^5 + 8\sqrt[4]{x} - 3\,\mathrm{arcctg}\,x.$

20.14. $y = \frac{1}{2}x^4 + 6\sqrt[6]{x^2} - 4\log_3 x.$

20.15. $y = 7x^3 + 3\sqrt{x^5} - 3^x.$

Завдання 21. Продиференціювати задану функцію.

21.1. $y=\sqrt[4]{3x^2+5x-4}$.

21.2. $y=\cos\left(4x^2+3x-2\right)$.

21.3. $y=\mathrm{c}tg\left(2x^2+x-4\right)$.

21.4. $y=\ln\left(2x^2-3x+5\right)$.

21.5. $y=\sqrt{x^3-4x+5}$.

21.6. $y=\mathrm{tg}\left(3x^2+x-2\right)$.

21.7. $y=\mathrm{arctg}\left(2x^2-1\right)$.

21.8. $y=3^{2x^3-4x+3}$.

21.9. $y=\sqrt[5]{\left(2x^2-4x+5\right)^2}$.

21.10. $y=\arccos\left(3x^2+5\right)$.

21.11. $y=\log_3\left(2x^2-4x+3\right)$.

21.12. $y=2e^{4x^2+3x-2}$.

21.13. $y=\sqrt[3]{\left(2x^2+5x-3\right)^2}$.

21.14. $y=\sin\left(2x^2-3x+5\right)$.

21.15. $y=\log_4\left(x^2+2x+7\right)$.

Завдання 22. Продиференціювати задану функцію.

22.1. $y=3^x\ln(4x-3)$.

22.2. $y=\dfrac{e^{5x}}{2x^2-3}$.

22.3. $y=x^4\cos(2x^2-5)$.

22.4. $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\ln(2x+3)}$.

22.5. $y=e^{-2x^2}\,\mathrm{arcctg}\,x$.

22.6. $y=\dfrac{\sin\left(3x+2\right)}{\ln x}$.

22.7. $y=\cos x\cdot\ln(2x-3)$.

22.8. $y=\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\ln(2x-1)}$.

22.9. $y=\dfrac{e^{\cos x}}{3x^2-4}$.

22.10. $y=\dfrac{\ln x}{\sin(4x+3)}$.

22.11. $y = 3^{\sin x}(4x-3)$.

22.12. $y = \dfrac{7^{5x}}{2x^2-3}$.

22.13. $y = \dfrac{4^{-x}}{2x^2-5}$.

22.14. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2x+3)}$.

22.15. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} 6x}{7x^3-3x+2}$.

<u>Завдання 23.</u> Продиференціювати задану функцію.

23.1. $y = x^{\sin x}$.

23.2. $y = (\sin x)^{2x}$.

23.3. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

23.4. $y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$.

23.5. $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$.

23.6. $y = (\arcsin x)^{x}$.

23.7. $y = x^{\arccos x}$.

23.8. $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$.

23.9. $y = \left(\sqrt{x-1}\right)^{\sin x}$.

23.10. $y = (\ln x)^{x^2-3}$.

23.11. $y = (\operatorname{tg} x)^{x}$.

23.12. $y = (\log_2 x)^{2x}$.

23.13. $y = x^{\sqrt{x}}$.

23.14. $y = x^{e^x}$.

23.15. $y = (\arccos x)^{x}$.

<u>Завдання 24.</u> Знайти похідну функції $y(x)$, що задана неявно рівнянням.

24.1. $x^3 + y^2 - 3xy = 0$.

24.2. $x - y = \cos(xy)$.

24.3. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$.

24.4. $y\ln y = x$.

24.5. $x^4+y^4=3x^2y^2$.

24.6. $x^3+xy^2-y=4x$.

24.7. $y=1+xe^y$.

24.8. $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$.

24.9. $\sin y=xy^2+5$.

24.10. $y-\cos(x-y)=0$.

24.11. $x^4+y^3+\sin x=0$.

24.12. $x-y=\sqrt{xy}$.

24.13. $y^2\sin x-\cos x=e^y$.

24.14. $x\log_3 y=x^4-3xy$.

24.15. $x^3+y^4=3xy^3$.

<u>Завдання 25.</u> Знайти похідну вказаного порядку.

25.1. $y=x\cos x^2,\quad y'''-?$

25.2. $y=(5x-1)\ln^2 x,\quad y'''-?$

25.3. $y=\left(4x^3+5\right)e^{2x+1},\quad y^{IV}-?$

25.4. $y=\left(x^2+3\right)\ln(x-3),\quad y^{IV}-?$

25.5. $y=\dfrac{\sin 2x}{x},\quad y'''-?$

25.6. $y=(4x+3)2^{-x},\quad y'''-?$

25.7. $y=x\ln(1-3x),\quad y^{IV}-?$

25.8. $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2},\quad y'''-?$

25.9. $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2},\quad y^{V}-?$

25.10. $y=\dfrac{\ln x}{x^5},\quad y'''-?$

25.11. $y = x^2 \cos x, \quad y''' - ?$

25.12. $y = \left(5x^3 - 1\right)\ln x, \quad y'' - ?$

25.13. $y = \left(2x^2 - 3\right)e^{2x}, \quad y''' - ?$

25.14. $y = \left(x^2 + 3\right)\sin x, \quad y''' - ?$

25.15. $y = \dfrac{\cos 3x}{x}, \quad y'' - ?$

<u>Завдання 26.</u> Знайти похідну функції $y(x)$, що задана параметрично.

26.1. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \dfrac{2}{\cos^2 t}. \end{cases}$

26.2. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

26.3. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

26.4. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

26.5. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

26.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

26.7. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

26.8. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

26.9. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

26.10. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

26.11. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \dfrac{2}{t}. \end{cases}$

26.12. $\begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2}, \\ y = \operatorname{tg} 2t. \end{cases}$

26.13. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = e^t + 3t. \end{cases}$

26.14. $\begin{cases} x = 6\sqrt[3]{t^2}, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

26.15. $\begin{cases} x = 3t^3 - 9t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

<u>Завдання 27.</u> Обчислити наближено значення функції $y = f(x)$ у точці x_0, використовуючи диференціал функції.

27.1. $y = \sqrt[3]{x}, \ x_0 = 7,76$.

27.2. $y = \arcsin x, \ x_0 = 0,08$.

27.3. $y = \sqrt{4x-1}, \ x_0 = 2,56$.

27.4. $y = x^6, \ x_0 = 2,01$.

27.5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, \ x_0 = 1,58$.

27.6. $y = \sqrt[3]{x^2}, \ x_0 = 1,03$.

27.7. $y = x^{11}, \ x_0 = 1,02$.

27.8. $y = \sqrt{4x-3}, \ x_0 = 1,78$.

27.9. $y = \sqrt{x^2+x+3}, \ x_0 = 1,97$.

27.10. $y = x^5, \ x_0 = 2,97$.

27.11. $y = \sqrt{x}, \ x_0 = 8,87$.

27.12. $y = \operatorname{arctg} x, \ x_0 = 0{,}05$.

27.13. $y = \sqrt{2x+1}, \ x_0 = 3{,}92$.

27.14. $y = x^4, \ x_0 = 4{,}01$.

27.15. $y = \sqrt[3]{3x-1}, \ x_0 = 3{,}06$.

<u>Завдання 28.</u> Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

28.1. $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0 = 1.$

28.2. . $y = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad x_0 = -2.$

28.3. $y = 2x + \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 1.$

28.4. $y = \dfrac{x^2+3}{x-4}, \quad x_0 = 2.$

28.5. $y = \dfrac{x^2-3x+6}{x^2}, \quad x_0 = 3.$

28.6. $y = \dfrac{x^3+2}{x^3-2}, \quad x_0 = 2$.

28.7. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4$.

28.8. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8$.

28.9. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16$.

28.10. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4$.

28.11. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}, \quad x_0=-3.$

28.12. . $y=\dfrac{5x-x^2}{3-2x}, \quad x_0=-1$

28.13. $y=\dfrac{x^3}{2+x^2}, \quad x_0=1.$

28.14. $y=5x+\dfrac{1}{x^2}, \quad x_0=2.$

28.15. $y=\dfrac{5x+6}{x^2}, \quad x_0=-1.$

<u>Завдання 29.</u> Знайти найбільше та найменше значення функції $y=f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$.

29.1. $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3, \quad x\in\left[1,3\right].$

29.2. $y=(x+2)\cdot e^{1-x}, \quad x\in\left[-2,2\right].$

29.3. $y=\ln(x^2-2x+2), \quad x\in\left[0,3\right].$

29.4. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}, \quad x\in\left[1,2\right].$

29.5. $y=(x-1)\cdot e^x, \quad x\in\left[0,3\right].$

29.6. $y=x\cdot\ln x, \quad x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right].$

29.7. $y=e^{4x-x^2}, \quad x\in\left[1,3\right].$

29.8. $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2},\quad x\in[-1,3]$.

29.9. $y=x^3+6x-4,\quad x\in[-2,2]$.

29.10. $y=x^3\cdot e^{1+x},\quad x\in[-4,0]$.

29.11. $y=\dfrac{x}{9-x^2},\quad x\in[-2,2]$.

29.12. $y=2\sqrt{x}-x,\quad x\in[0,4]$.

29.13. $y=x-4\sqrt{x}+5,\quad x\in[1,9]$.

29.14. $y=x^3-3x+1,\quad x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$.

29.15. $y=\dfrac{x-1}{x+2},\quad x\in[0,4]$.

Завдання 30. Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя.

30.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{1-\cos x}$.

30.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$.

30.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

30.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\ln\cos x}$.

30.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{\ln x}$.

30.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1-e^{-x}}\right)$.

30.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}$.

30.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+e^{-x}-1)}{x}$.

30.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\ln(1+x)}$.

30.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}$.

30.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\mathrm{tg}x-x}$.

30.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{1-\cos 3x}$.

30.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\mathrm{tg}x}{\mathrm{xsinx}}$.

30.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\cos x-2}{\ln\cos x}$.

30.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos\left(x-1\right)}{x-1}$.

<u>Завдання 31.</u> Виконати загальне дослідження функції.

31.1. $y=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3}{2}x^2-12x+3$.

31.2. $y=2x^3+15x^2+36x-5$.

31.3. $y=\dfrac{4}{3}x^3+2x^2-8x+3$.

31.4. $y=x^3+\dfrac{9}{2}x^2-12x+5$.

31.5. $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{5}{2}x+3$.

31.6. $y=x^3+x^2-5x+4$.

31.7. $y=4x^3-9x^2+6x+3$.

31.8. $y=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+8x+3$.

31.9. $y=x^3-12x^2+21x+5$.

31.10. $y=\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2-20x+4$.

31.11. $y=\frac{2x^3}{3}-3x^2-20x+3$.

31.12. $y=3x^3+\frac{9}{2}x^2-18x+27$.

31.13. $y=4x^3-3x^2-6x+3$.

31.14. $y=\frac{2}{3}x^3+7x^2+12x+5$.

31.15. $y=5x^3-3x^2-9x+2$.

<u>Завдання 32.</u> Виконати загальне дослідження функції.

32.1. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

32.2. $y=\frac{5x}{4-x^2}$.

32.3. $y=\frac{x^2-5}{x-3}$.

32.4. $y=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

32.5. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

32.6. $y=\frac{3x+6}{x^2-4}$.

32.7. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.

32.8. $y=\frac{4x}{4+x^2}$.

32.9. $y=\frac{5x}{4-x^2}$.

32.10. $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

32.11. $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

32.12. $y=\frac{3x^2}{8-x^3}$.

32.13. $y=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$.

32.14. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

32.15. $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$.

<u>Завдання 33.</u> Виконати загальне дослідження функції.

33.1. $y=(2x+3)e^{-2x-2}$.

33.2. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

33.3. $y=(4-x)e^{x-3}$.

33.4. $y=x\ln x$.

33.5. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

33.6. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

33.7. $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

33.8. $y=(x+1)^2e^{2x}$.

33.9. $y=x^2-2\ln x$.

33.10. $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

33.11. $y=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

33.12. $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$.

33.13. $y=x^2-2\ln x$.

33.14. $y=\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)+2$.

33.15. $y=\sqrt[3]{x}\,e^{\frac{2}{3x}}$.

Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною ***схемою.***

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y'' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки (x)	
y'	
y''	
y	

а) Використовуючи y' з'ясовуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи y'', досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

6. Будуємо графік функції.

<u>Приклад 1.</u> Виконати загальне дослідження функції $y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x\left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2\right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4\,; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9\,.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

2 Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b\,, \tag{1}$$

де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}\,, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y(x) - kx \right), \tag{2}$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty\,,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \infty\,. \tag{3}$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 .$$

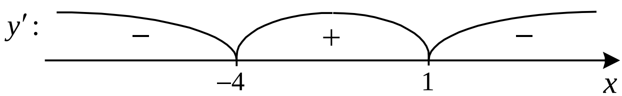
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)' = -\frac{3}{2} - x .$$

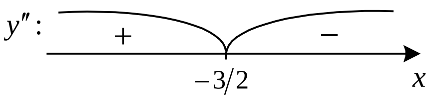
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y''=0$: $-\frac{3}{2}-x=0$, $x=-\frac{3}{2}$.

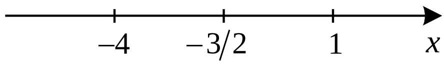
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x=-\frac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty;-4)$, $(-4;-1{,}5)$, $(-1{,}5;\ 1)$, $(1;+\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1{,}5)$	$-1{,}5$	$(-1{,}5;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	□ $\cup$	min $y(-4)=$ $=-9\frac{1}{3}$	□ $\cup$	т. п. $y(-1{,}5)=$ $=-4\frac{1}{8}$	□ $\cap$	max $y(1)=1\frac{1}{12}$	□ $\cap$

Позначення:

□ – функція спадає;

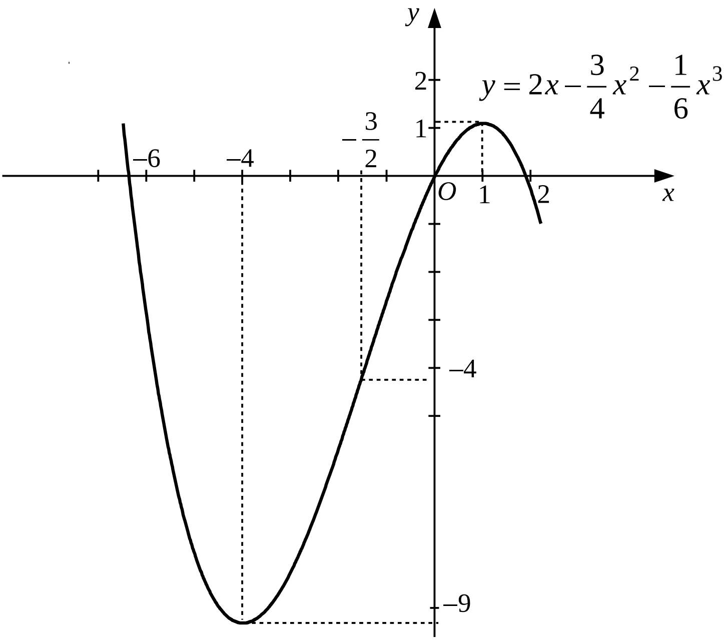
□ – функція зростає;

$\bigcup$ – графік угнутий;

$\bigcap$ – графік опуклий;

т.п. – точка перегину графіка.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$.



<u>Приклад 2.</u> Виконати загальне дослідження функції $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}-\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

б) Графік перетинає вісь Oy у точці $y=-0,5$.

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю Ox:

$$\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}=0, \quad \frac{2x^4-x^3-1}{2(x^3+1)}=0.$$

Звідси маємо рівняння $2x^4-x^3-1=0$. Розклавши ліву частину на множники

$$2x^4-x^3-1=\left(x^4-x^3\right)+\left(x^4-1\right)=x^3(x-1)+(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)=$$

$$=(x-1)\left(2x^3+x^2+x+1\right),$$

знаходимо корінь $x=1$. Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння $2x^3+x^2+x+1=0$ має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі $(-1;0)$. Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов'язане з використанням громіздких формул, то обмежимось вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю Oy – $x=1$.

г) Функція ні парна, ні непарна.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^3+1}-\frac{1}{2x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}}-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=$$

$$=\frac{1}{1+0}-0=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x\left(x^3+1\right)}{x^3+1}-\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^3+1}-\frac{1}{2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0+1}-\frac{1}{2}=-0,5;$$

підставляємо k та b у формулу (1): $y=1\cdot x+\left(-0,5\right)=x-0,5$.

Отже, графік функції має похилу асимптоту $y=x-0,5$ при $x\to\pm\infty$.

б) Оскільки точка $x_0=-1$ не належить області визначення D заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3+1\right)=0$, а $\lim\limits_{x\to-1}x^4=1\neq0$, то

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}\right)=\infty.$$

Звідси випливає, що пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y'=\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}\right)'=\left(\frac{x^4}{x^3+1}\right)'-\left(\frac{1}{2}\right)'=\frac{\left(x^4\right)'\left(x^3+1\right)-x^4\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2}-0=$$

$$=\frac{4x^3\left(x^3+1\right)-x^4\cdot 3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}.$$

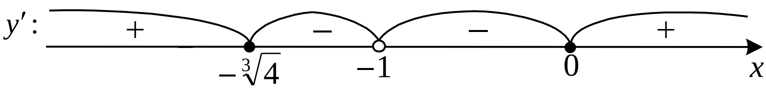
Критичні точки 1-го роду:

а) $y'=0$: $\dfrac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}=0$, $x^3\left(x^3+4\right)=0$, звідки $x=0$, $x=-\sqrt[3]{4}$;

б) y' не існує: $\varnothing$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x=-\sqrt[3]{4}\approx-1{,}59$ та $x=0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах (точка $x=-1$ виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад, $y'(-2)=\dfrac{32}{49}>0$, $y'\left(-\sqrt[3]{2}\right)=-4<0$, $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{31}{49}<0$, $y'\left(1\right)=1>0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{x^6 + 4x^3}{(x^3+1)^2} \right)' = \frac{\left(x^6 + 4x^3\right)' \left(x^3+1\right)^2 - \left(x^6+4x^3\right)\left(\left(x^3+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^3+1\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(6x^5 + 12x^2\right)\left(x^3+1\right)^2 - \left(x^6+4x^3\right)\left(x^3+1\right)3x^2}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^3+1\right)\left[\left(x^3+2\right)\left(x^3+1\right) - \left(x^6+4x^3\right)\right]}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^6+3x^3+2-x^6-4x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = \frac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}.$$

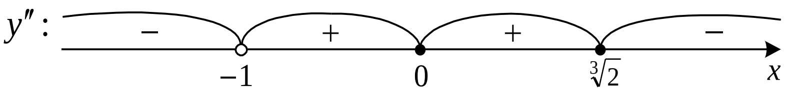
Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $\dfrac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = 0$, $x^2\left(2-x^3\right) = 0$, звідки $x = 0$, $x = \sqrt[3]{2}$;

б) y'' не існує: $\varnothing$.

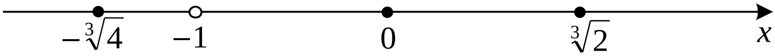
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду $x = 0$ та $x = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки -2, $-\frac{1}{2}$, 1, 2).

$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:

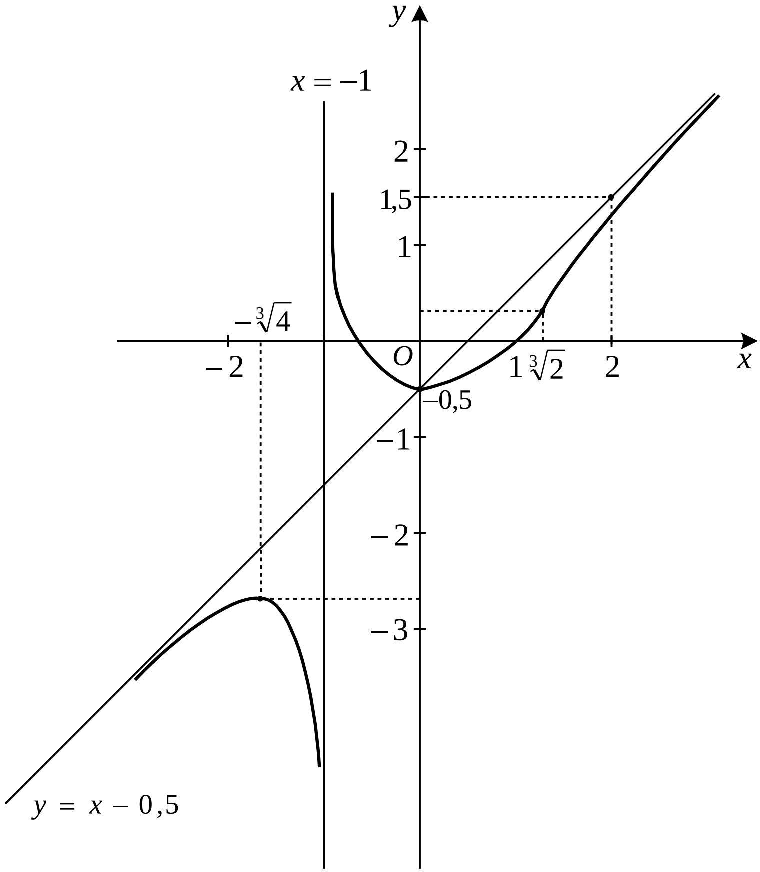


Отже, маємо п’ять інтервалів: $\left(-\infty,-\sqrt[3]{4}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{4},-1\right)$, $\left(-1,0\right)$, $\left(0,\sqrt[3]{2}\right)$, $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю.

x	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{4}\right)$	$-\sqrt[3]{4}$	$\left(-\sqrt[3]{4};-1\right)$	$\left(-1;0\right)$	0	$\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$
y'	+	0	–	–	0	+		+
y''	–		–	+	0	+	0	–
y	$\cap$	max $y(-\sqrt[3]{4})\approx$ $\approx -2{,}62$	$\cap$	$\cup$	min $y(0)=-0{,}5$	$\cup$	т.п. $y(\sqrt[3]{2})\approx$ $\approx 0{,}34$	$\cap$

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.



Приклад 3. Виконати загальне дослідження функції $y=\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D=(-\infty;+\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x=0$:

$$y(0)=\sqrt[3]{0^2}\cdot e^{\frac{2\cdot 0}{3}}=0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y=0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox Слід розв’язати рівняння $y(x)=0$:

$$\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}=0 \text{ або } \sqrt[3]{x^2}=0. \text{ Звідси } x=0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точці $x=0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x)\neq y(x)$ та $y(-x)\neq -y(x)$.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) для знаходження похилих асимптот розглянемо окремо два випадки: $x\to-\infty$ та $x\to+\infty$:

Якщо $x \to +\infty$, маємо за формулами (2):

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{2x}{3}}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{3} e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} 2x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2x}{3}} = \infty.$$

Отже, похилих асимптот при $x \to +\infty$ графік функції не має.

Якщо $x \to -\infty$, маємо

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(y(x) - kx\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-\frac{2x}{3}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'}{\left(e^{-\frac{2x}{3}}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{-2}{3} e^{-\frac{2x}{3}}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0.$$

Отже, за формулою (1) при $x \to -\infty$ похилою асимптотою є пряма $y = 0$.

б) Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} \right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot e^{\frac{2x}{3}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = \frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

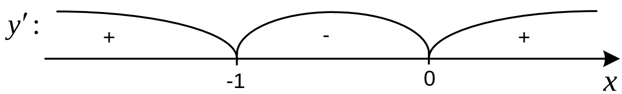
Критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0$: $2e^{\frac{2x}{3}}(1+x) = 0$, або $1 + x = 0$, звідки $x = -1$.

б) y' не існує: $\sqrt[3]{x} = 0$, звідки $x = 0$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -1$, $x = 0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) \approx 0{,}03 > 0$, $y'(-0{,}5) \approx -0{,}3 < 0$, $y'(2) \approx 6{,}02 > 0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{e^{\frac{2x}{3}}\left(4x^2 + 8x - 2\right)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $4x^2 + 8x - 2 = 0$.

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}; \qquad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1.$$

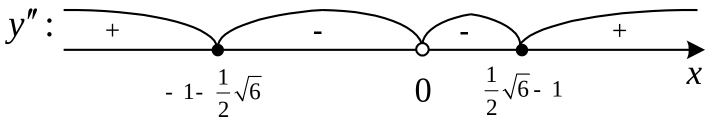
б) y'' не існує: $\sqrt[3]{x^4}=0$, звідки $x=0$.

Отже, маємо три критичних точки 2-го роду

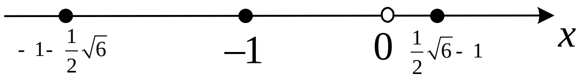
$$x_1=-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\approx-2,2;, \quad x_2=0,$$

$$x_3=\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\approx 0,2.$$

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п’ять інтервалів: $\left(-\infty;-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$, $\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6};-1\right)$, $(-1;\ 0)$, $\left(0;\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1;+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$\left(-\infty; -1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$	$-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$	-1
y'	+		+	0
y''	+	0	-	
y	□ $\cup$	т.п. $y\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx 0,4$	□ $\cap$	max $y(-1) \approx 0,5$

Продовження таблиці

$(-1;0)$	0	$\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{6}-1$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1; +\infty\right)$
-	не існує	+		+
-	не існує	$-$	0	+
□ $\cap$	min $y(0)=0$	□ $\cap$	т.п. $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right) \approx 0,4$	□ $\cup$

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.