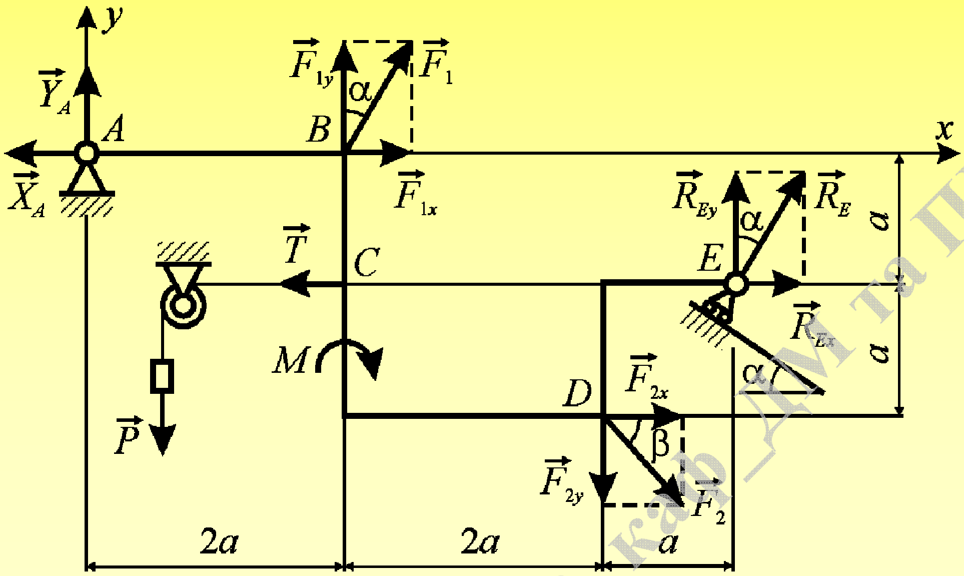
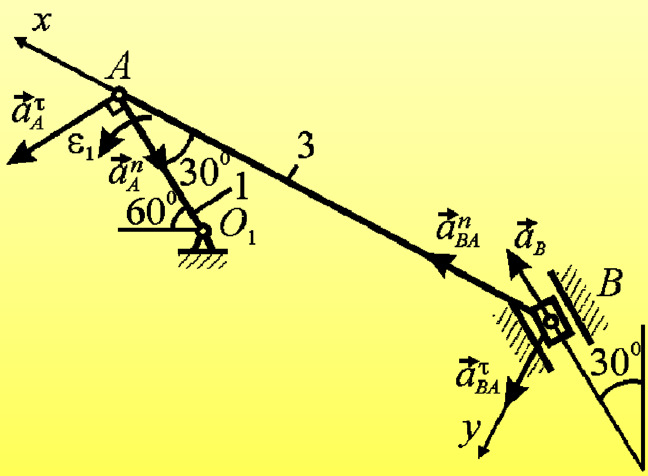
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ




Г. Б. Філімоніхін, В. В. Пирогов

# ПРАКТИКУМ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. СТАТИКА. КІНЕМАТИКА






Кіровоград - 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

Г. Б. Філімоніхін, В. В. Пирогов

# ПРАКТИКУМ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. СТАТИКА. КІНЕМАТИКА

навчальний посібник

Рекомендовано кафедрою деталей машин та прикладної механіки Кіровоградського національного технічного університету як навчальний посібник для студентів машинобудівних, будівельних, транспортних спеціальностей.
Протокол № 6 від 04.12.2014 р.

Кіровоград - 2014

Філімоніхін Г. Б., Пирогов В. В. Теоретична механіка. Статика. Кінематика: Навч. посібник [електроний ресурс]. – Кіровоград: КНТУ, 2014. – 64 с.: іл.

Табл. 10. Іл. 111. Бібліогр.: 10 назв.

Укладачі: проф., д.т.н. Філімоніхін Геннадій Борисович; ст. викл., к.ф.-м.н. Пирогов Володимир Васильович.

Рецензенти: **д.т.н., доц. Шифрін Б.М.,** в.о. професора кафедри механіки й конструкції авіаційної техніки Кіровоградської льотної академії національного авіаційного університету.

# ЗМІСТ

# Передмова

Теоретична механіка – загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в вузівській програмі фундаментальної підготовки спеціалістів. Її розділи "Статика" і "Кінематика" – відносно самостійні частини курсу, які використовується для вивчення багатьох предметів.

Необхідною умовою успішного оволодіння курсом є виконання індивідуальних домашніх завдань. Задачі треба розв'язувати на протязі семестру відразу після розгляду відповідної теми на лекціях, чи практичних заняттях.

Поточний контроль відбувається шляхом розв'язання типових задач курсу на контрольних і самостійних роботах, які проводяться після закінчення розділів "Статика" і "Кінематика". У посібнику сформульовані типові багатоваріантні задачі та приведені приклади їх розв'язання.

Посібник відповідає діючій робочій програмі з теоретичної механіки, призначений для студентів машинобудівних, будівельних, транспортних спеціальностей і може бути використаний як в навчальному процесі, так і в інженерній практиці.

Дані для розрахунків брати з таблиці варіантів до кожної задачі згідно номеру залікової книжки. Наприклад:

**номер залікової книжки – 6.092304150.**

Останній цифрі 0 відповідає номер рисунка, а передостанній 5 – номер рядку в таблиці вихідних розрахункових даних.

**Зауваження:**

- роботи, виконані не за варіантом, або несамостійно не зараховуються;
- допускається видача інших варіантів лектором, або викладачем, що проводить практичні заняття – на першій лекції, або на першому практичному занятті.

В основу навчального посібника покладені багатоваріантні задачі С1,…С4, К1,…,К4 з методичних вказівок Тарга С.М. [6]. Умови задач перекладені українською мовою, рисунки поліпшені комп'ютерним набором. Докорінним чином змінено методику розв'язання задач – створено типову методику, як правило складену із 5 пунктів, що полегшує процес розв'язання задач і запам'ятовування методик. Задачі С1,…С4, К1 обов'язково повинні підтверджуватись розрахунками в середовищі Mathcad.

## *Задача С1 – рівновага довільної плоскої системи сил прикладених до одного тіла*

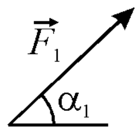
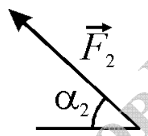
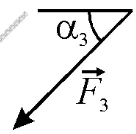
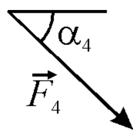
### 1.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Жорстка рама розташована в вертикальній площині (рис. С1.0 – С1.9, табл. С1), шарнірно закріплена в точці *A*, а в точці *B* прикріплена або до невагомого стрижня з шарнірами на кінцях, або до шарнірної опори на катках.

В точці *C* до рами прив’язаний трос, перекинутий через блок і до якого підвішений вантаж вагою *P*=25 *кН*. На раму діє пара сил з моментом *M*=100 *кН·м* і дві сили, величина, напрямок і точка прикладання яких вказані в таблиці С1.

***Знайти***: реакції в’язей в точках *A, B*, викликані діючими навантаженнями. При розрахунках прийняти, що *a*=0,5 *м*.

Таблиця С1

| Сили |  | |  | |  | |  | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_1 = 10$ кН | | $F_2 = 20$ кН | | $F_3 = 30$ кН | | $F_4 = 40$ кН | |
| Номер умови | Точка прикладання | $\alpha_1$, град | Точка прикладання | $\alpha_2$, град | Точка прикладання | $\alpha_3$, град | Точка прикладання | $\alpha_4$, град |
| 0 | *H* | 30 | -- | -- | -- | -- | *K* | 60 |
| 1 | -- | -- | *D* | 15 | *E* | 60 | -- | -- |
| 2 | *K* | 75 | -- | -- | -- | -- | *E* | 30 |
| 3 | -- | -- | *K* | 60 | *H* | 30 | -- | -- |
| 4 | *D* | 30 | -- | -- | -- | -- | *E* | 60 |
| 5 | -- | -- | *H* | 30 | -- | -- | *D* | 75 |
| 6 | *E* | 60 | -- | -- | *K* | 15 | -- | -- |
| 7 | -- | -- | *D* | 60 | -- | -- | *H* | 15 |
| 8 | *H* | 60 | -- | -- | *D* | 30 | -- | -- |
| 9 | -- | -- | *E* | 75 | *K* | 30 | -- | -- |

ФилимонихинГБ_ПироговВВ_каф_ДМ та ПМ_2014

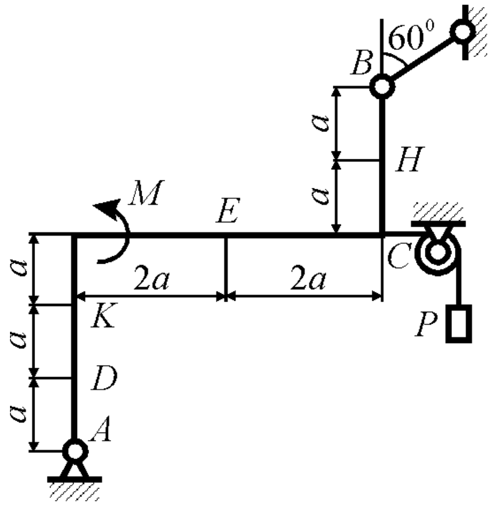



Рис. С1.0

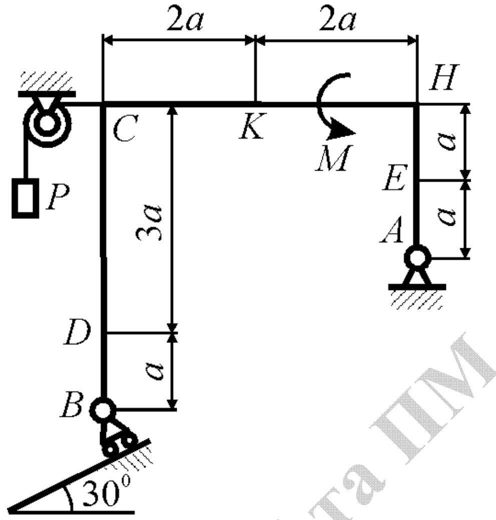



Рис. С1.1

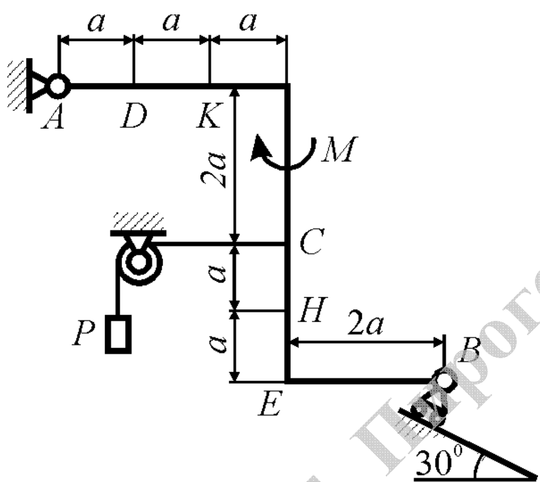



Рис. С1.2

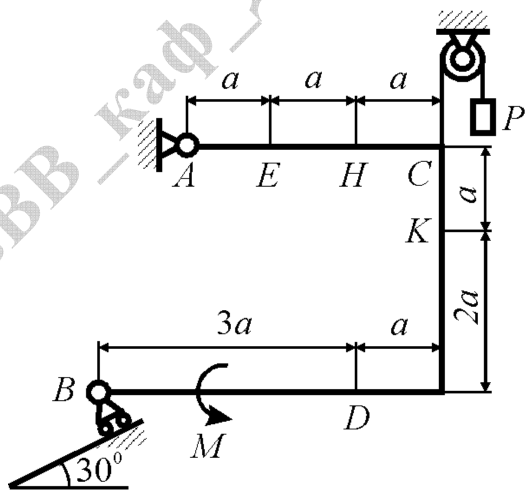



Рис. С1.3

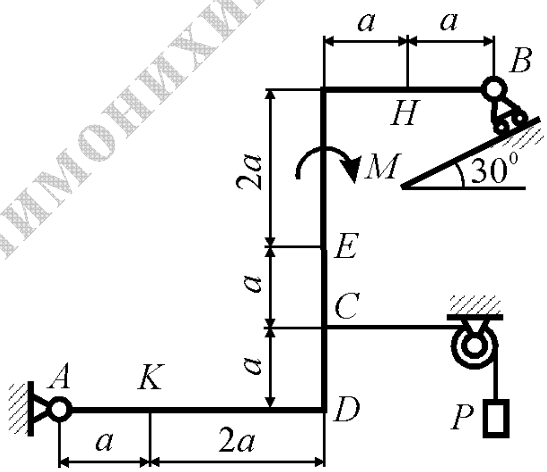



Рис. С1.4

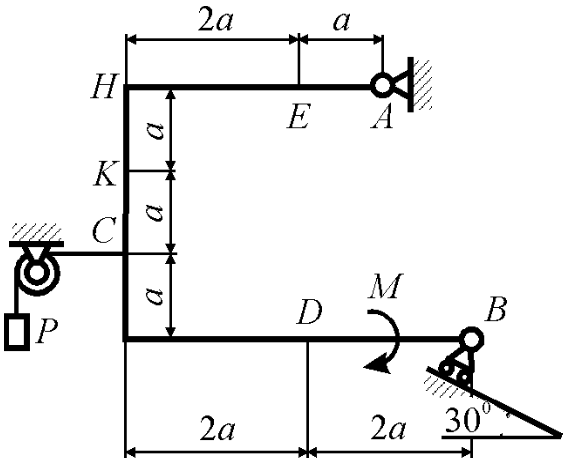



Рис. С1.5

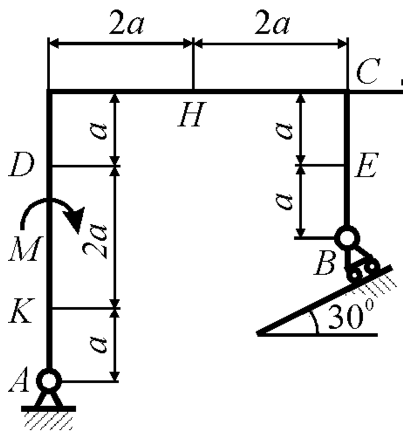



Рис. С1.6

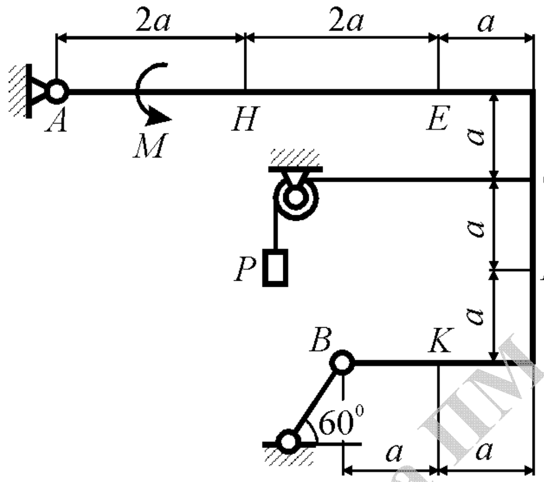



Рис. С1.7

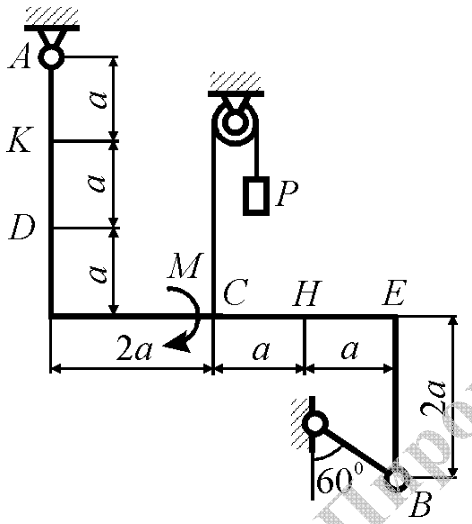



Рис. С1.8

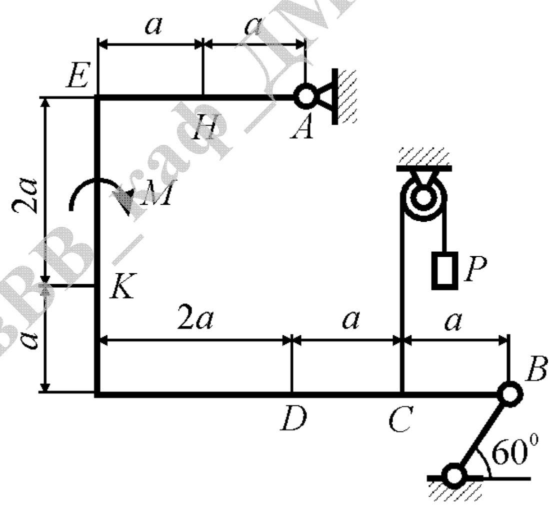



Рис. С1.9

## 1.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача С1 – на рівновагу тіла під дією довільної плоскої системи сил. При розв'язанні задачі врахувати, що натяг обох віток нитки, перекинутої через блок, коли тертям нехтують, буде однаковий. Рівняння моментів буде більш простим (містити менше невідомих), якщо моменти знаходити відносно точок, в яких перетинаються лінії дії двох реакцій в'язей. Силу $\vec{F}_i$ необхідно розкласти на складові $\vec{F}_{ix}$ та $\vec{F}_{iy}$ (проекції сили) спрямовані вздовж відповідних координатних осей і моменти визначати для знайдених складових. Тоді за теоремою Варіньона:

$$M_O(\vec{F}_i) = M_O(\vec{F}_{ix}) + M_O(\vec{F}_{iy}) .$$

ФилимонихинГБ_ПироговВВ_каф_ДМ та ПМ_2014

## 1.3. Приклад розв'язання задачі С1

**Умова задачі.** Жорстка рама розташована в вертикальній площині і шарнірно закріплена в точці *A*, а в точці *E* прикріплена до шарнірної опори на катках. Схеми прикладання сил до рами та її розміри приведені на рис. С1а-С1в.

**Дано:** $F_1$=50 *кН*, $F_2$=35 *кН*, *P*=25 *кН*, *M*=100 *кН·м*, $\alpha=30^0$, $\beta=45^0$, *a*=0,5 *м*.

**Знайти:** реакції в'язей в точках *A, E*, викликані діючими навантаженнями.

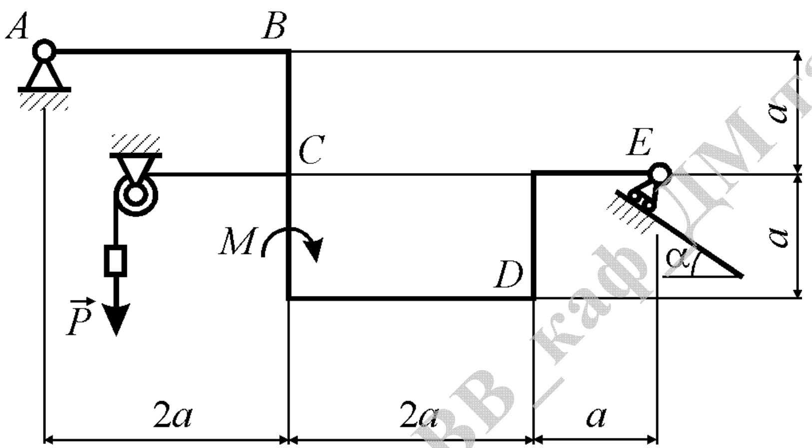



Рис. С1а

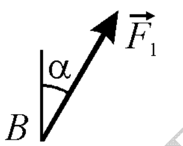



Рис. С1б

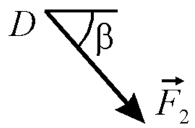



Рис. С1в

**Розв'язок**

**1. Будуємо розрахункову схему** (рис. С1г).

1.1. Зображаємо координатні осі *x*, *y*.

1.2. Показуємо діючі на раму сили: сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, момент *M*, натяг нитки $\vec{T}$ (по модулю *P*=*T*), опорні реакції $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_E$ (реакцію нерухомої шарнірної опори *A* зображаємо двома її складовими $\vec{X}_A$ та $\vec{Y}_A$; реакцію шарнірної опори на катках $\vec{R}_E$ направляємо перпендикулярно до опорної площини). Зауважимо, що так як ми не знаємо наперед, як будуть направлені реакції $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, то їх можна направляти в будь-яку сторону, але вздовж відповідних координатних осей.

1.3. Розкладаємо сили на складові спрямовані по координатним осям та визначаємо їх модуль:

ФилимонихинГБ_ПироговВВ_каф_ДМ та ПМ_2014

$F_{1x} = F_1 \sin\alpha = 50 \cdot 0{,}5 = 25\ кН,\ F_{1y} = F_1 \cos\alpha = 50 \cdot 0{,}866 = 43{,}3\ кН,$

$F_{2x} = F_2 \cos\beta = 35 \cdot 0{,}707 = 24{,}745\ кН,\ F_{2y} = F_2 \sin\beta = 35 \cdot 0{,}707 = 24{,}745\ кН,$

$R_{Ex} = R_E \sin\alpha,\ R_{Ey} = R_E \cos\alpha.$

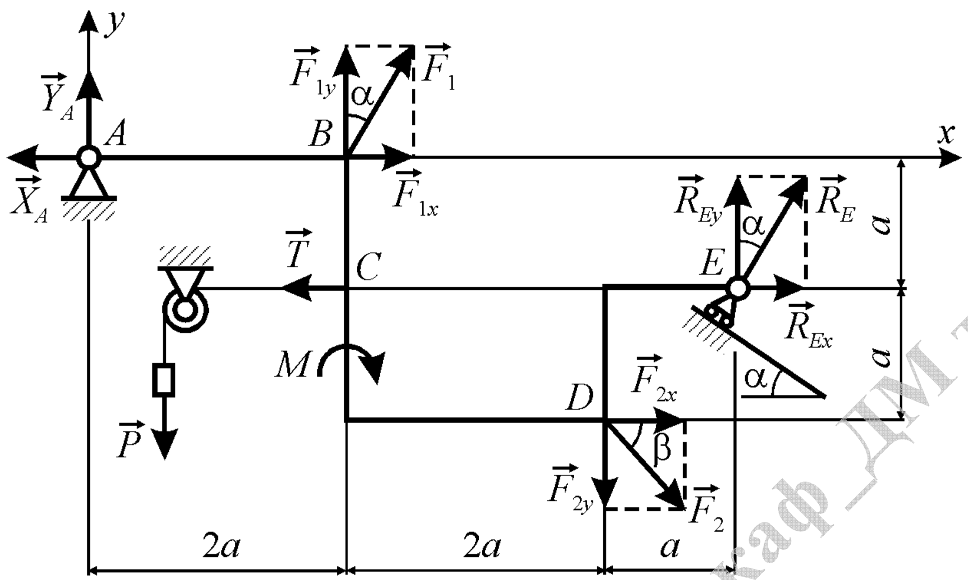


Рис. С1г

**2. Складаємо рівняння рівноваги.** Для розглядуваної довільної плоскої системи сил складаємо три рівняння рівноваги. При обчисленні моментів сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ та $\vec{R}_E$ відносно точки $A$ використовуватимемо теорему Варіньона. Одержимо:

$$\sum F_{ix} = 0:\ -X_A - T + F_{1x} + F_{2x} + R_{Ex} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0:\ Y_A + F_{1y} - F_{2y} + R_{Ey} = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0:\ -M - Ta + F_{1y}\,2a + F_{2x}\,2a - F_{2y}\,4a + R_{Ey}\,5a + R_{Ex}\,a = 0.$$

**3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь** в загальному вигляді:

$$R_E = \frac{M + Ta - F_{1y}\,2a - F_{2x}\,2a + F_{2y}\,4a}{a(5\cos\alpha + \sin\alpha)},$$

$$X_A = F_{1x} + F_{2x} + R_{Ex} - T, \quad Y_A = F_{2y} - F_{1y} - R_{Ey}.$$

**4. Виконуємо розрахунки:**

$$R_E = \frac{100 + 25 \cdot 0{,}5 - 43{,}3 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - 24{,}745 \cdot 2 \cdot 0{,}5 + 24{,}745 \cdot 4 \cdot 0{,}5}{0{,}5(5 \cdot 0{,}866 + 0{,}5)} = 38{,}9\ кН,$$

$$R_{Ex} = 38{,}9 \cdot 0{,}5 = 19{,}45\ кН, \quad R_{Ey} = 38{,}9 \cdot 0.866 \approx 33{,}687\ кН,$$

$$X_A = 25 + 24{,}745 + 19{,}45 - 25 = 44{,}195\ кН,$$

$$Y_A = 24{,}745 - 43{,}3 - 33{,}687 = -52{,}242\ кН.$$

**5. Перевірка.** Складемо рівняння моментів (проекцій сил) так, щоб до нього входили всі невідомі. Для цього оберемо за центр моментів, наприклад, точку *D* (рис. С1г). Зазначимо, що при складанні рівняння проекцій сил, необхідно обрати вісь, яка була б нахилена під певним кутом до осі *x* або *y*:

$$\sum M_D(\vec{F}_k) \overset{?}{=} 0: \; Ta - M + R_{Ey}a - R_{Ex}a - F_{1y}2a - F_{1x}2a + X_A 2a - Y_A 4a \overset{?}{=} 0 .$$

При обчисленні групуємо окремо всі складові, що із знаком ”+” та ”–”, отримаємо:

$$25 \cdot 0{,}5 - 100 + 33{,}687 \cdot 0{,}5 - 19{,}45 \cdot 0{,}5 -$$

$$-43{,}3 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - 25 \cdot 2 \cdot 0{,}5 + 44{,}195 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - (-52{,}242) \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 0;$$

$$178{,}023 - 178{,}025 \approx 0 .$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно. Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{178{,}023 - 178{,}025}{178{,}025} \cdot 100\,\% \approx -0{,}001\,\% < [\eta] = 5\,\% .$$

**Відповідь:** $X_A = 44{,}195$ *кН*; $Y_A = -52{,}242$ *кН*; $R_E = 38{,}9$ *кН*.

Знак “–” вказує на те, що сила $Y_A$ в дійсності спрямована у протилежну сторону на відміну від напрямку показаного на рис С1г.

## 1.4. Документ MathCad для розв'язання задачі С1

# Документ Mathcad для розвязання задачі С1

**Введення розрахункових данних із збереженням розмірностей:**

$a := 0.5\cdot m \quad \alpha := 30\cdot deg \quad \beta := 45\cdot deg \quad F_1 := 50\cdot kN$

$F_2 := 35\cdot kN \qquad M := 100\cdot kN\cdot m \qquad P := 25\cdot kN \qquad T := P$

Для розмірностей: *kg* - кілограм; *m* - метр; *s* - секунда; *N* - Ньютон; *kN* - кілоньютон; *deg* - градус.

**Розкладемо всі сили на складові і визначимо їх модулі:**

$F_{1x} := F_1\cdot sin(\alpha) \quad F_{1y} := F_1\cdot cos(\alpha) \quad F_{2x} := F_2\cdot cos(\beta) \quad F_{2y} := F_2\cdot sin(\beta)$

$F_{1x} = 25\cdot kN \qquad F_{1y} = 43.301\cdot kN \qquad F_{2x} = 24.749\cdot kN \qquad F_{2y} = 24.749\cdot kN$

$T = 25\cdot kN$

**Визначаємо опорні реакції:** $X_A := 0\cdot N \quad R_E := 0\cdot N \quad Y_A := 0\cdot N$

Given $\quad -X_A - T + F_{1x} + F_{2x} + R_E\cdot sin(\alpha) = 0$

$Y_A + F_{1y} - F_{2y} + R_E\cdot cos(\alpha) = 0$

$-M - T\cdot a + F_{1y}\cdot 2\cdot a + F_{2x}\cdot 2\cdot a - F_{2y}\cdot 4\cdot a + R_E\cdot cos(\alpha)\cdot 5\cdot a + R_E\cdot sin(\alpha)\cdot a = 0$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ R_E \\ Y_A \end{pmatrix} := Find(X_A, R_E, Y_A) \qquad X_A = 44.199\cdot kN \qquad R_E = 38.901\cdot kN$$

$$Y_A = -52.241\cdot kN$$

**Перевірка:** $-M + T\cdot a - F_{1x}\cdot 2\cdot a - Y_A\cdot 4\cdot a - F_{1y}\cdot 2\cdot a \ldots = 0\cdot N\cdot m$
$+ X_A\cdot 2\cdot a + R_E\cdot cos(\alpha)\cdot a - R_E\cdot sin(\alpha)\cdot a$

## *Задача С2 – рівновага довільної плоскої системи сил прикладених до декількох зв'язаних між собою тіл*

### 2.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Конструкція складається з жорсткого кутика і стрижня, які в точці *C* або з'єднані одне з одним шарніром (рис. С2.0 – С2.5), або вільно торкаються одне одного (рис. С2.6 – С2.9). Зовнішніми в'язями, накладеними на конструкцію, є в точці *A* або шарнір, або жорстке кріплення; в точці *B* або гладенька площина (рис. С2.0 та С2.1), або невагомий стрижень *BB′* (рис. С2.2 та С2.3), або шарнір (рис. С2.4 – С2.9); в точці *D* або невагомий стрижень *DD′* (рис. С2.0, С2.3 та С2.8), або шарнірна опора на катках (рис. С2.7).

На кожну конструкцію діють: пара сил с моментом $M$=60 кН·м, рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q$=20 кН/м і дві сили. Ці сили, їх напрямок і точки прикладання вказані в табл. С2; в колонці «Навантажена ділянка» вказано, на якій ділянці діє розподілене навантаження. При розрахунках прийняти $a$=0,2 м. Напрямок розподіленого навантаження на різних ділянках вказано в табл. С2а.

***Знайти*:** реакції в'язей в точках *A*, *B*, *C* (а для рис. С2.0, С2.3, С2.7, С2.8 ще й в точці *D*), викликані заданими навантаженнями.

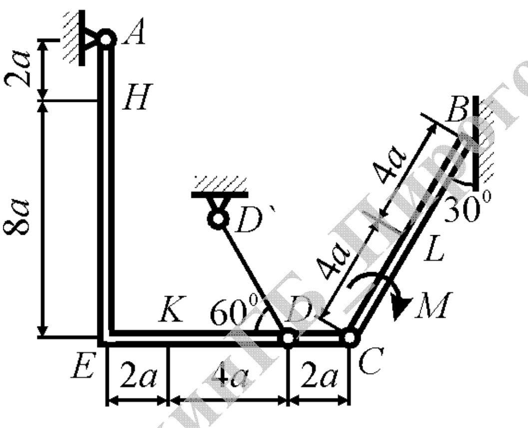



Рис. С2.0

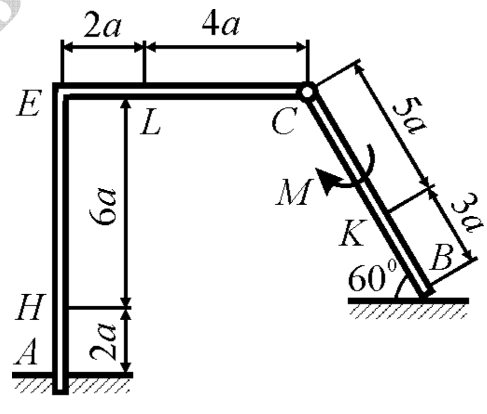



Рис. С2.1

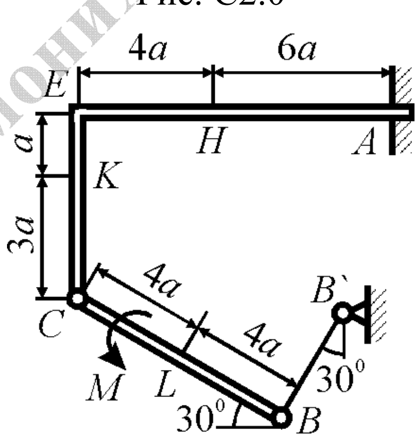



Рис. С2.2

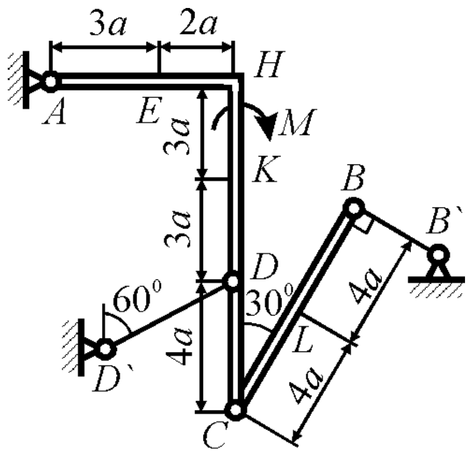



Рис. С2.3

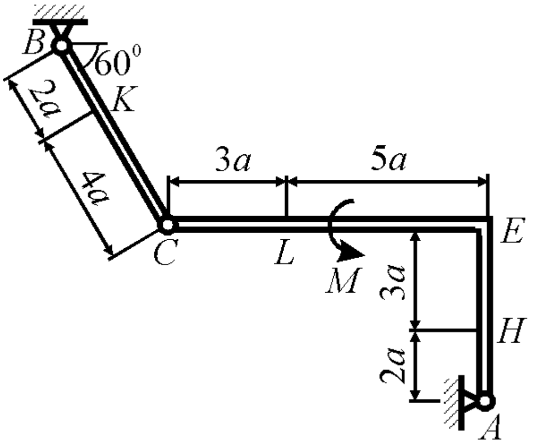



Рис. С2.4

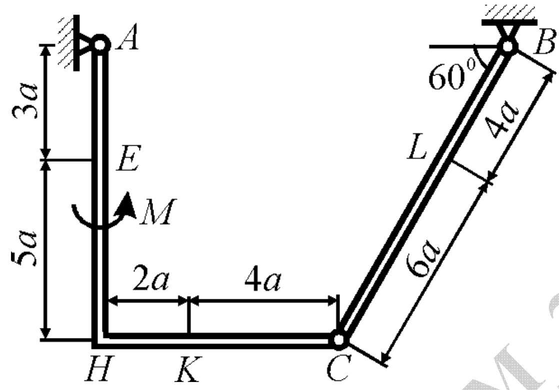



Рис. С2.5

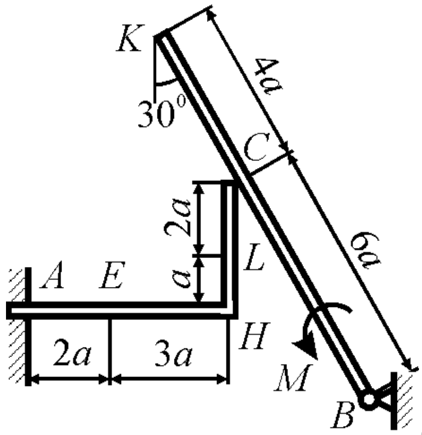



Рис. С2.6

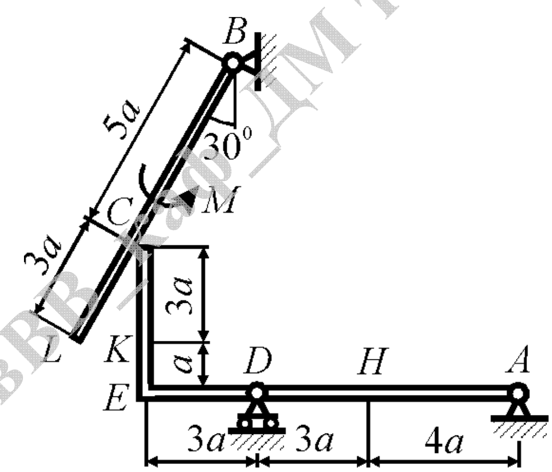



Рис. С2.7

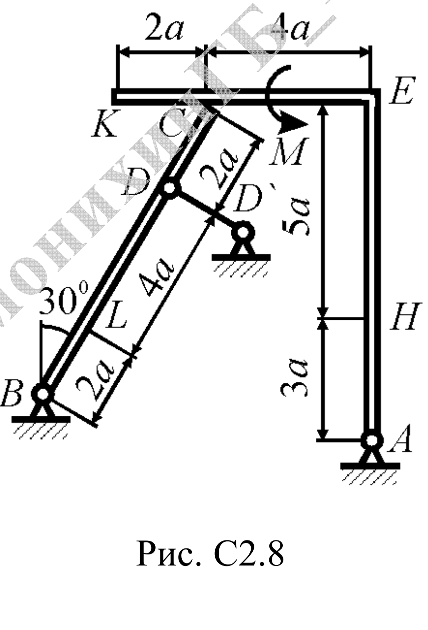



Рис. С2.8

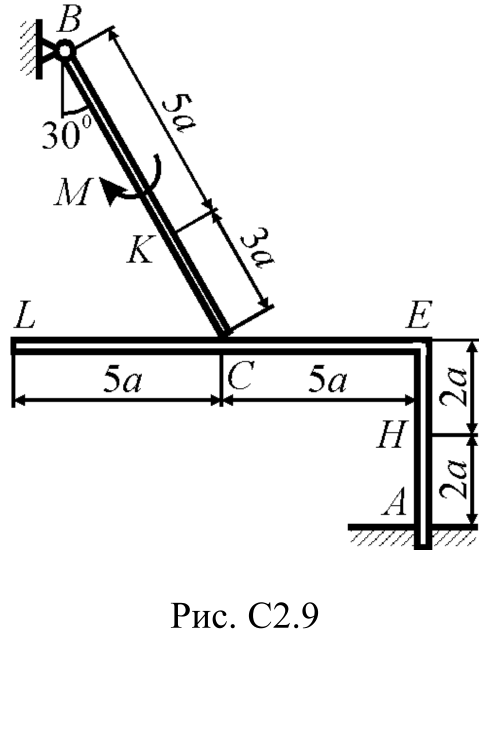
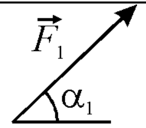
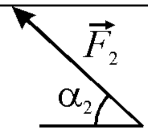
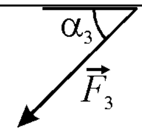
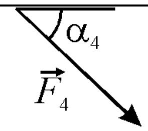
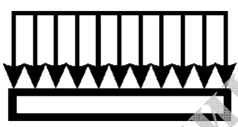
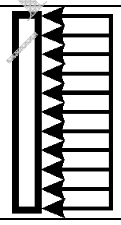
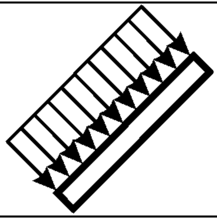
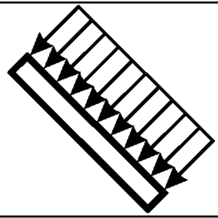



Рис. С2.9

Таблиця С2

| Сила |  | |  | |  | |  | | Навантажена ділянка |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_1$=10 кН | | $F_2$=20 кН | | $F_3$=30 кН | | $F_4$=40 кН | | |
| Номер умови | Точка прикладання | $\alpha_1$, град | Точка прикладання | $\alpha_2$, град | Точка прикладання | $\alpha_3$, град | Точка прикладання | $\alpha_4$, град | |
| 0 | *K* | 60 | -- | -- | *H* | 30 | -- | -- | *CL* |
| 1 | -- | -- | *L* | 60 | -- | -- | *E* | 30 | *CK* |
| 2 | *L* | 15 | -- | -- | *K* | 60 | -- | -- | *AE* |
| 3 | -- | -- | *K* | 30 | -- | -- | *H* | 60 | *CL* |
| 4 | *L* | 30 | -- | -- | *E* | 60 | -- | -- | *CK* |
| 5 | -- | -- | *L* | 75 | -- | -- | *K* | 30 | *AE* |
| 6 | *E* | 60 | -- | -- | *K* | 75 | -- | -- | *CL* |
| 7 | -- | -- | *H* | 60 | *L* | 30 | -- | -- | *CK* |
| 8 | -- | -- | *K* | 30 | -- | -- | *E* | 15 | *CL* |
| 9 | *H* | 30 | -- | -- | -- | -- | *L* | 60 | *CK* |

Таблиця С2а

| Ділянка на кутику | | Ділянка на стрижні | |
|---|---|---|---|
| горизонтальна | вертикальна | рис. С2.0, С2.3, С2.5, С2.7, С2.8 | рис. С2.1, С2.2, С2.4, С2.6, С2.9 |
|  |  |  |  |

## 2.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі

Задача С2 – на рівновагу системи тіл, які знаходяться під дією плоскої системи сил. При її розв’язанні можна або розглянути спочатку рівновагу всієї системи в цілому, а потім рівновагу одного з тіл системи, зобразивши його окремо, або ж відразу розкласти систему і розглянути рівновагу кожного з тіл окремо, врахувавши закон про рівність дії і протидії. В задачах, де є жорстке кріплення, врахувати, що в ньому виникає реакція, яка складається із сили, модуль і напрямок якої невідомий, та пари сил, момент якої теж невідомий.

## 2.3. Приклад розв’язання задачі С2

**Умова задачі.** На кутик $ACD$ ($\angle ACD=90^0$), кінець $A$ якого жорстко закріплений, в точці $E$ опирається стрижень $DE$ (рис. С2а). Стрижень має в точці В нерухому шарнірну опору і до нього прикладене рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q$. На кутик діють сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, а також пара сил з моментом $M$.

**Дано:** $F_1$=50 *кН*, $F_2$=35 *кН*, $M$=100 *кН·м*, $q$=20 *кН/м*, $\alpha_1=30^0$, $\alpha_2=45^0$, $\beta=60^0$, $a$=0,5 *м*, $l$=1,5 *м*.

**Знайти:** реакції в’язей в точках $A$, $B$, $E$.

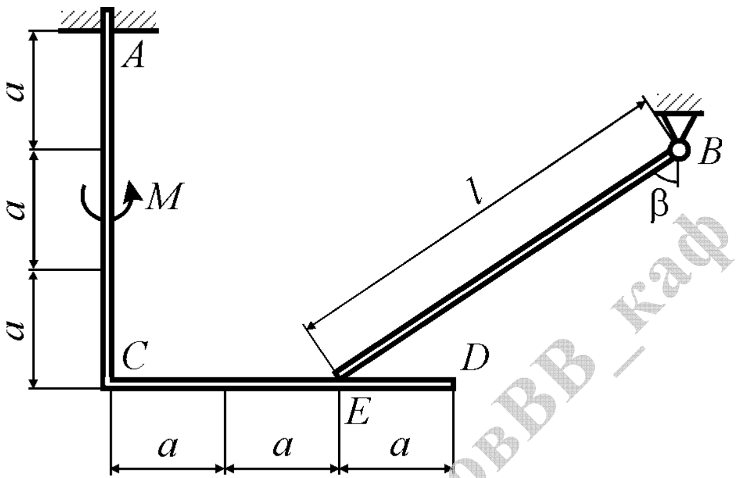



Рис. С2а

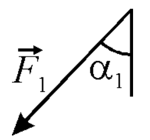



Рис. С2б

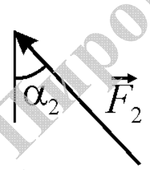



Рис. С2в

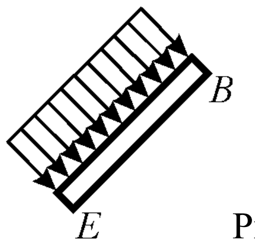



Рис. С2г

**Розв’язок**

**1. Будуємо розрахункову схему** (рис. С2д). Для визначення невідомих реакцій розкладемо систему і розглянемо окремо рівновагу кутика та стрижня.

1.1. Зображаємо координатні осі $x$, $y$.

1.2. Показуємо діючі на кутик та стрижень сили. На кутик діють сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, момент $M$, реакції $\vec{N}_E$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ та $M_A$. На стрижень діє розподілене навантаження інтенсивністю $q$, реакції $\vec{N}'_E$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_E$. Зазначимо, що $N_E = N'_E$.

1.3. Визначаємо зосереджену силу від розподіленого навантаження: $Q=ql=20\cdot 1{,}5=30$ *кН*.

1.4. Розкладаємо сили на складові спрямовані по координатним осям та визначаємо їх модуль:
$F_{1x}=F_1\sin\alpha_1=50\cdot0{,}5=25$ *кН*; $F_{1y}=F_1\cos\alpha_1=50\cdot0{,}866=43{,}3$ *кН*;
$F_{2x}=F_2\sin\alpha_2=35\cdot0{,}707=24{,}75$ *кН*; $F_{2y}=F_2\cos\alpha_2=35\cdot0{,}707=24{,}75$ *кН*;
$Q_x=Q\cos\beta=30\cdot0{,}5=15$ *кН*; $Q_y=Q\sin\beta=30\cdot0{,}866=26$ *кН*.

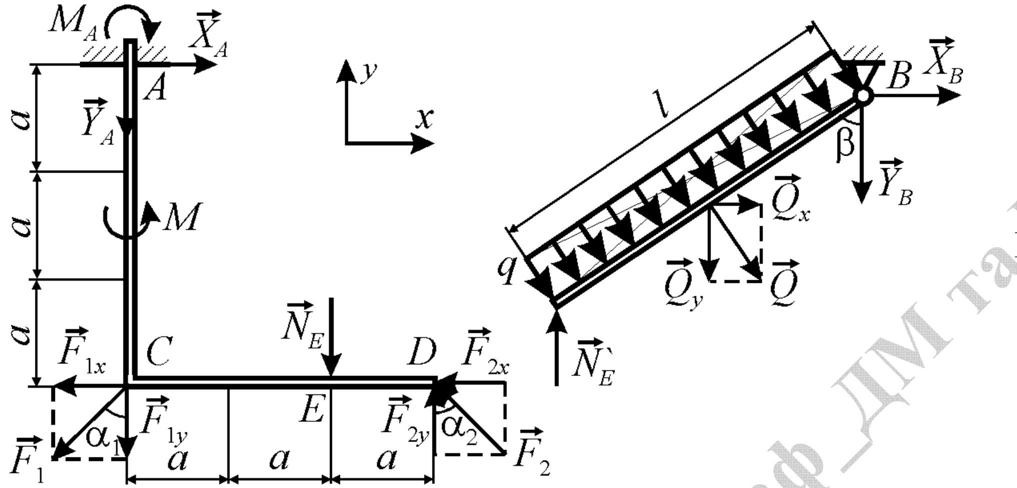


Рис. С2д

**2. Складаємо рівняння рівноваги.** Так як системи сил, які діють на кутик і стрижень, плоскі довільні, то можна скористатися відповідною формою рівнянь рівноваги (першою, другою або третьою).

2.1. Рівняння рівноваги кутика:

$$\sum F_{ix}=0:\ \ X_A-F_{1x}-F_{2x}=0,$$

$$\sum F_{iy}=0:\ \ -Y_A-N_E-F_{1y}+F_{2y}=0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i)=0:\ \ M-M_A-F_{1x}3a-N_E2a-F_{2x}3a+F_{2y}3a=0.$$

2.2. Рівняння рівноваги стрижня:

$$\sum F_{ix}=0:\ \ X_B+Q_x=0,$$

$$\sum F_{iy}=0:\ \ -Y_B-Q_y+N'_E=0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i)=0:\ \ 0{,}5Ql-N'_El\sin\beta=0.$$

**3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь** в загальному вигляді:

$$X_A=F_{1x}+F_{2x};\quad X_B=-Q_x;\quad N'_E=0{,}5Q/\sin\beta;\quad Y_B=N'_E-Q_y;$$

$$Y_A=F_{2y}-N_E-F_{1y};\quad M_A=M-F_{1x}3a-N_E2a-F_{2x}3a+F_{2y}3a.$$

**4. Виконуємо розрахунки:**

$X_A=F_{1x}+F_{2x}=25+24{,}75=49{,}75$ *кН*; $X_B=-Q_x=-15$ *кН*;

$N'_E=0{,}5\cdot30/0{,}866\approx17{,}32$ *кН*; $Y_B=17{,}32-26=-8{,}68$ *кН*;

$Y_A=24{,}75-17{,}32-43{,}3=-35{,}87$ *кН*; $M_A=100-25\cdot3\cdot0{,}5-$
$-17{,}32\cdot2\cdot0{,}5-24{,}75\cdot3\cdot0{,}5+24{,}75\cdot3\cdot0{,}5=45{,}18$ *кН*.

**5. Перевірка.** Складемо рівняння моментів (проекцій сил) так, щоб до них входили всі невідомі, які діють тільки на кутик або стрижень.

5.1. Для кутика складемо рівняння моментів відносно точки $D$, отримаємо:

$$\sum M_D(\vec{F}_k) \overset{?}{=} 0: \; M - M_A - X_A 3a + Y_A 3a + F_{1y} 3a + N_E a \overset{?}{=} 0 .$$

При обчисленні групуємо окремо всі складові, що із знаком ”+” та ”-”, отримаємо:

$$100 - 45{,}18 - 49{,}75 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + (-35{,}87) \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 43{,}3 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 17{,}32 \cdot 0{,}5 = 0 ;$$

$$173{,}61 - 173{,}61 = 0 .$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно.

5.2. Для стрижня складемо рівняння проекцій сил на напрямок стрижня, отримаємо:

$$\sum F_{il} = 0: \; X_B \sin\beta - Y_B \cos\beta + N'_E \cos\beta \overset{?}{=} 0 .$$

При обчисленні групуємо окремо всі складові, що із знаком ”+” та ”-”, отримаємо:

$$-15 \cdot 0{,}866 - (-8{,}68) \cdot 0{,}5 + 17{,}32 \cdot 0{,}5 = 0 ;$$

$$-12{,}99 + 13 = 0{,}01 \approx 0 .$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно. Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{13 - 12{,}99}{13} \cdot 100\,\% \approx -0{,}077\,\% < [\eta] = 5\,\% .$$

**Відповідь:** $X_A = 49{,}75$ *кН*; $X_B = -15$ *кН*; $Y_B = -8{,}68$ *кН*; $N_E = N'_E = 17{,}32$ *кН*; $Y_A = -35{,}87$ *кН*; $M_A = 45{,}18$ *кН*.

Знак “–” вказує на те, що сили в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямків показаних на рис. С2д.

## 2.4. Документ MathCad для розв'язання задачі С2

**Документ Mathcad**
**для розвязання задачі С2**

**Введення розрахункових данних із збереженням розмірностей:**

$a := 0.5 \cdot m \quad l := 1.5 \cdot m \quad q := 20 \cdot \frac{kN}{m} \quad \alpha_1 := 30 \cdot deg \quad \alpha_2 := 45 \cdot deg$

$M := 100 \cdot kN \cdot m \quad F_1 := 50 \cdot kN \quad F_2 := 35 \cdot kN \quad \beta := 60 \cdot deg$

Для розмірностей: *kg* - кілограм; *m* - метр; *s* - секунда; *N* - Ньютон;
*kN* - кілоньютон; *deg* - градус.

**Розкладемо всі сили на складові і визначаємо їх модулі:**

$F_{1x} := F_1 \cdot sin(\alpha_1) \quad F_{1y} := F_1 \cdot cos(\alpha_1) \quad Q := q \cdot l$

$F_{2x} := F_2 \cdot sin(\alpha_2) \quad F_{2y} := F_2 \cdot sin(\alpha_2) \quad Q_x := Q \cdot cos(\beta) \quad Q_y := Q \cdot sin(\beta)$

$F_{1x} = 25 \cdot kN \quad F_{1y} = 43.3 \cdot kN \quad F_{2x} = 24.75 \cdot kN \quad F_{2y} = 24.75 \cdot kN$

$Q = 30 kN \quad Q_x = 15 \cdot kN \quad Q_y = 25.981 \cdot kN$

**Визначаємо опорні реакції:**

$X_A := 0 \cdot N \quad Y_A := 0 \cdot N \quad M_A := 0 \cdot N \cdot m \quad N_E := 0 \cdot N \quad X_B := 0 \cdot N \quad Y_B := 0 \cdot N$

*Given* Рівняння рівноваги кутика:

$X_A - F_{1x} - F_{2x} = 0 \qquad -Y_A - N_E - F_{1y} + F_{2y} = 0$

$M - M_A - F_{1x} \cdot 3 \cdot a - N_E \cdot 2 \cdot a - F_{2x} \cdot 3 \cdot a + F_{2y} \cdot 3 \cdot a = 0$

Рівняння рівноваги стрижня:

$X_B + Q_x = 0 \qquad -Y_B - Q_y + N_E = 0 \qquad 0.5 \cdot Q \cdot l - N_E \cdot l \cdot sin(\beta) = 0$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ N_E \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} := Find(X_A, Y_A, M_A, N_E, X_B, Y_B)$$

$X_A = 49.75 \cdot kN \quad Y_A = -35.87 \cdot kN$

$M_A = 45.18 \cdot kN \cdot m$

$N_E = 17.321 \cdot kN \quad X_B = -15 \cdot kN$

$Y_B = -8.66 \cdot kN$

**Перевірка.** Рівняння перевірки для кутика:

$M - M_A - X_A \cdot 3 \cdot a + Y_A \cdot 3 \cdot a + F_{1y} \cdot 3 \cdot a + N_E \cdot a = 7.276 \times 10^{-12} \cdot N \cdot m$

Рівняння перевірки для стрижня:

$X_B \cdot sin(\beta) - Y_B \cdot cos(\beta) + N_E \cdot cos(\beta) = -1.819 \times 10^{-12} \cdot N$

## *Задача С3 – рівновага збіжної просторової системи сил*

### 3.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Шість невагомих стрижнів з'єднані своїми кінцями шарнірно один з одним в двох вузлах і прикріплені іншими кінцями (теж шарнірно) до нерухомих опор *A*, *B*, *C*, *D* (рис. С3.0 – С3.9, табл. С3). Стрижні і вузли (вузли розташовані в вершинах *H*, *K*, *L* або *M* прямокутного паралелепіпеда) на рисунках не показані і повинні бути зображені по вихідним даним таблиці. У вузлі, який в кожній колонці таблиці вказаний першим, прикладена сила $P$=200 Н; у другому вузлі прикладена сила $Q$=100 Н. Сила $\vec{P}$ утворює з додатніми напрямками координатних осей *x, y, z* кути, які рівні відповідно $\alpha_1=45^0$, $\beta_1=60^0$, $\gamma_1=60^0$, а сила $\vec{Q}$ – кути $\alpha_2=60^0$, $\beta_2=45^0$, $\gamma_2=60^0$; напрямки осей *x, y, z* для всіх рисунків показані на рис. С3.0.

Грані паралелепіпеда, паралельні площині *xy* – квадрати. Діагоналі інших бічних граней утворюють з площиною *xy* кут $\varphi=60^0$, а діагональ паралелепіпеда утворює з цією площиною кут $\theta=51^0$.

На рис. С3.10 в якості приклада показано, як повинно виглядати креслення С3.1, якщо по умові задачі вузли знаходяться в точках *L* і *M*, а стрижнями є *LM*, *LA*, *LB*, *MA*, *MC*, *MD*. Також на рис. С3.10 показані кути $\varphi$ і $\theta$.

***Знайти*:** зусилля в стрижнях.

Таблиця С3

| Номер умови | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Вузли | *H*, *M* | *L*, *M* | *K*, *M* | *L*, *H* | *K*, *H* |
| Стрижні | *HM*, *HA*, *HB*, *MA*, *MC*, *MD* | *LM*, *LA*, *LD*, *MA*, *MB*, *MC* | *KM*, *KA*, *KB*, *MA*, *MC*, *MD* | *LH*, *LC*, *LD*, *HA*, *HB*, *HC* | *KH*, *KB*, *KC*, *HA*, *HC*, *HD* |
| | | | | | |
| Номер умови | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Вузли | *M*, *H* | *L*, *H* | *K*, *H* | *L*, *M* | *K*, *M* |
| Стрижні | *MH*, *MB*, *MC*, *HA*, *HC*, *HD* | *LH*, *LB*, *LD*, *HA*, *HB*, *HC* | *KH*, *KC*, *KD*, *HA*, *HB*, *HC* | *LM*, *LB*, *LD*, *MA*, *MB*, *MC* | *KM*, *KA*, *KD*, *MA*, *MB*, *MC* |

### 3.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача С3 – на рівновагу просторової системи збіжних сил. При її розв'язанні слід розглянути окремо рівновагу кожного вузла, де сходяться стрижні та прикладені задані сили, і врахувати закон про рівність дії і протидії. Для знаходження невідомих зусиль в стрижнях необхідно застосувати метод вирізання вузлів. Розпочинати необхідно з того вузла, де з'єднується не більше ніж три стрижня з невідомим зусиллями.

Зображати креслення можна без дотримання масштаба так, щоб добре було видно всі шість стрижнів. Стрижні необхідно пронумерувати в тому порядку, в якому вони вказані в таблиці; реакції стрижнів позначати буквою з індексом, відповідно до номера стрижня (наприклад, $S_1$, $S_2$ і т.д.).

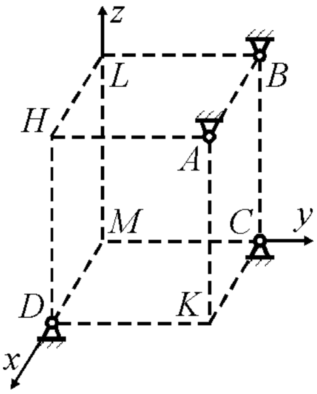


Рис. С3.0

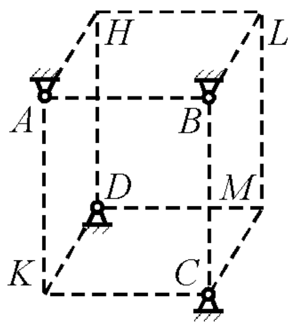


Рис. С3.1

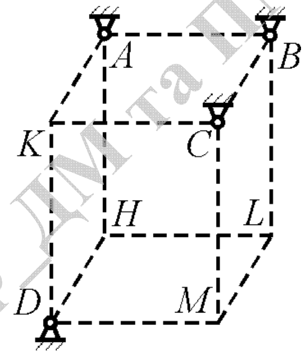


Рис. С3.2

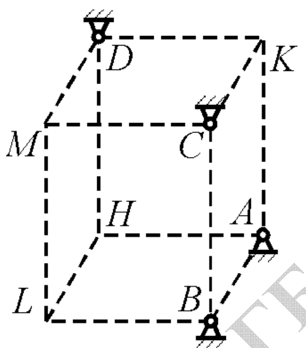


Рис. С3.3

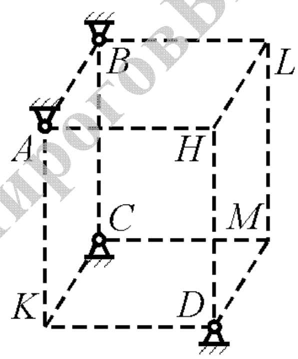


Рис. С3.4

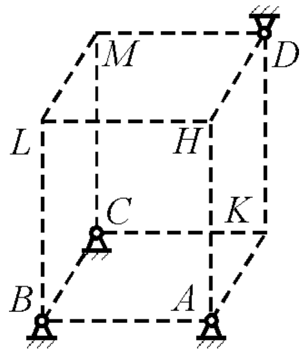


Рис. С3.5

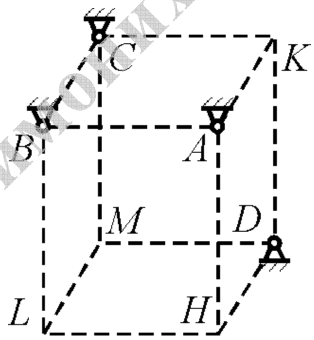


Рис. С3.6

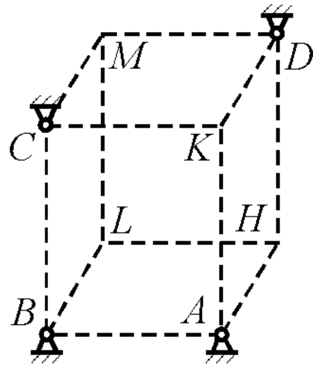


Рис. С3.7

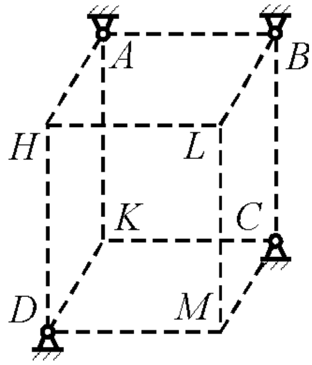


Рис. С3.8

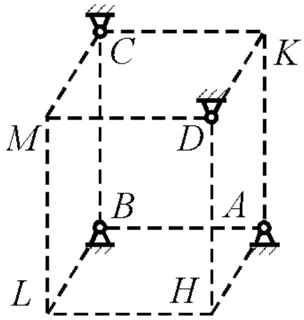



Рис. С3.9

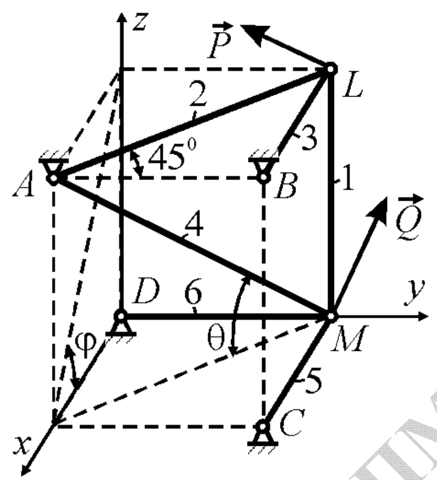



Рис. С3.10

## 3.3. Приклад розв'язання задачі С3

**Умова задачі.** Конструкція складається з невагомих стрижнів 1, 2, … , 6 з'єднаних своїми кінцями шарнірно один з одним в двох вузлах (вузол *L* і *M*) і прикріплені іншими кінцями (теж шарнірно) до нерухомих опор *A*, *C*, *D*, *K*, *H*. Стрижні і вузли (вузли розташовані в вершинах прямокутного паралелепіпеда) на рисунку С3а не показані і повинні бути зображені по вихідним даним. У вузлах *L* і *M* прикладені сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$, які утворюють з додатними напрямками координатних осей *x, y, z* кути $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ та $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ відповідно (рис. С3б та С3в).

Грані паралелепіпеда, паралельні площині *xy* – квадрати. Діагоналі інших бічних граней утворюють з площиною *xy* кут φ, а діагональ паралелепіпеда утворює з цією площиною кут θ.

**Дано:** $P$=35 *кН*, $Q$=15 *кН*, $\varphi=60^0$, $\theta=51^0$, $\mu=45^0$, $\alpha_1=45^0$, $\beta_1=60^0$, $\gamma_1=60^0$, $\alpha_2=60^0$, $\beta_2=45^0$, $\gamma_2=60^0$; вузли – *L*, *M*; стрижні – *LH*, *LM*, *LC*, *MA*, *MK*, *MD*.

***Знайти:*** зусилля в стрижнях.

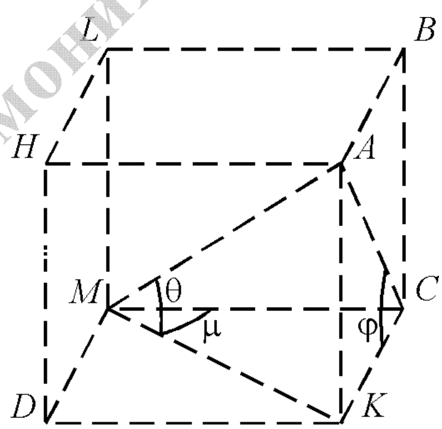



Рис. С3а

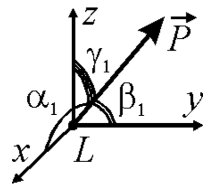



Рис. С3б

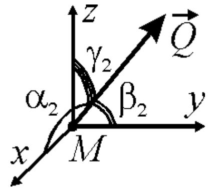



Рис. С3в

**Розв’язок**

**1. Будуємо розрахункову схему.** Згідно з вихідними даними з’єднуємо відповідні вершини паралелепіпеда і отримуємо просторову конструкцію представлену на рис. С3г. У вузлах $A$, $C$, $D$, $K$, $H$ розташовуємо нерухомі опори, а у вузлах $L$ і $M$ сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ відповідно.

1.1. Визначимо проекції сил $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ на координатні осі:

$$P_x = P\cos\alpha_1,\ P_y = P\cos\beta_1,\ P_z = P\cos\gamma_1;$$
$$Q_x = Q\cos\alpha_2,\ Q_y = Q\cos\beta_2,\ Q_z = Q\cos\gamma_2.$$

1.2. Визначаємо порядок розгляду вузлів $L$ і $M$.

Розглядаючи рівновагу вузлів застосуємо метод вирізання вузлів. Вважаємо, що стрижні розтягнуті, тобто зусилля в розрізаних стрижнях ферми будуть направлені від відповідного вузла (рис. С3г).

Першим по порядку будемо розглядати той вузол у якому з’єднано не більше трьох стрижнів з невідомими зусиллями, тобто спочатку розглядатимемо рівновагу вузла $L$, а потім – вузла $M$.

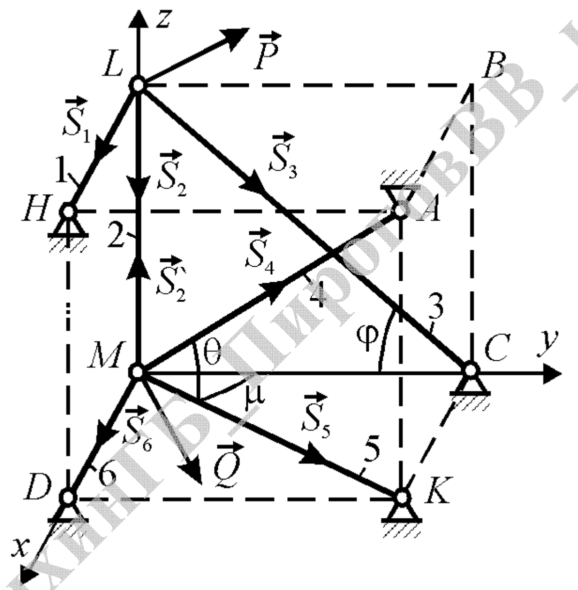



Рис. С3г

**2. Розглянемо рівновагу вузла *L*** (рис. С3г).

2.1. Складаємо векторне рівняння рівноваги вузла $L$:

$$\vec{P} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = 0\ .$$

2.2. Складаємо рівняння рівноваги у координатній формі. Введемо координатні осі $x$, $y$ та $z$ і спроектуємо на них векторне рівняння рівноваги вузла $L$, отримаємо:

$\sum F_{ix} = 0:\ \ P_x + S_1 = 0$;

$\sum F_{iy} = 0:\ \ P_y + S_3\cos\varphi = 0$;

$\sum F_{iz} = 0:\ \ P_z - S_2 - S_3\sin\varphi = 0$.

**3. Розглянемо рівновагу вузла *M*** (рис. С3г).

3.1. Складаємо векторне рівняння рівноваги вузла *M*:

$$\vec{Q} + \vec{S}_2' + \vec{S}_4 + \vec{S}_5 + \vec{S}_6 = 0 \text{, тут } \vec{S}_2' = \vec{S}_2 .$$

3.2. Складаємо рівняння рівноваги у координатній формі. Спроектуємо на введені координатні осі векторне рівняння рівноваги вузла *M*, отримаємо:

$\sum F_{ix} = 0:\ \ Q_x + S_4 \cos\theta \cos\mu + S_5 \cos\mu + S_6 = 0$;

$\sum F_{iy} = 0:\ \ Q_y + S_4 \cos\theta \cos\mu + S_5 \cos\mu = 0$;

$\sum F_{iz} = 0:\ \ Q_z + S_2' + S_4 \sin\theta = 0$.

**4. Розв'язуємо отриману систему рівнянь** в загальному вигляді. Визначатимемо невідомі сили в тому порядку в якому вони приведені нижче:

$S_1 = -P_x$; $S_3 = -P_y / \cos\varphi$; $S_2 = P_z - S_3 \sin\varphi$; $S_4 = -(Q_z + S_2') / \sin\theta$;

$S_5 = -(Q_y + S_4 \cos\theta \cos\mu) / \cos\mu$; $S_6 = -Q_x - S_4 \cos\theta \cos\mu - S_5 \cos\mu$.

**5. Проводимо обчислення.**

5.1. Визначаємо модулі проекцій сил:

$P_x = 35 \cdot 0{,}707 = 24{,}745$ *кН*; $P_y = 35 \cdot 0{,}5 = 17{,}5$ *кН*;

$P_z = 35 \cdot 0{,}5 = 17{,}5$ *кН*; $Q_x = 15 \cdot 0{,}5 = 7{,}5$ *кН*;

$Q_y = 15 \cdot 0{,}707 = 10{,}6$ *кН*; $Q_z = 15 \cdot 0{,}5 = 7{,}5$ *кН*.

5.2. Визначаємо невідомі зусилля в стрижнях просторової ферми:

$S_1 = -24{,}745$ *кН* (стиск); $S_3 = -17{,}5 / 0{,}5 = -35$ *кН* (стиск);

$S_2 = 17{,}5 - (-35) \cdot 0{,}866 = 47{,}81$ *кН* (розтяг);

$S_4 = -(7{,}5 + 47{,}81) / 0{,}777 = -71{,}18$ *кН* (стиск);

$S_5 = -(10{,}6 - 71{,}18 \cdot 0{,}63 \cdot 0{,}707) / 0{,}707 = 29{,}85$ *кН* (розтяг);

$S_6 = -7{,}5 - (-71{,}18) \cdot 0{,}63 \cdot 0{,}707 - 29{,}85 \cdot 0{,}707 = 3{,}1$ *кН* (розтяг).

**Відповідь:** $S_1 = -24{,}745$ *кН*; $S_2 = 47{,}81$ *кН*; $S_3 = -35$ *кН*; $S_4 = -71{,}18$ *кН*; $S_5 = 29{,}85$ *кН*; $S_6 = 3{,}1$ *кН*.

Знак "–" вказує на те, що сили в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямків показаних на рис. С3г.

## 3.4. Документ MathCad для розв'язання задачі С3

### Документ Mathcad
### для розвязання задачі С3

**Введення розрахункових данних із збереженням розмірностей:**

$a := 0.4 \cdot m \qquad b := 0.7 \cdot m \qquad q := 15 \cdot \frac{kN}{m}$

$M := 30 \cdot kN \cdot m \qquad F_1 := 35 \cdot kN \qquad F_2 := 45 \cdot kN \qquad \alpha := 40 \cdot deg \qquad \beta := 75 \cdot deg$

Для розмірностей: *kg* - кілограм; *m* - метр; *s* - секунда; *N* - Ньютон; *kN* - кілоньютон; *deg* - градус.

**Обчислення допоміжних кутів:**

$c := \sqrt{(2 \cdot a)^2 + b^2} \qquad c = 1.06\,m \qquad c\phi := \frac{b}{c} \qquad c\phi = 0.659 \qquad \phi := acos(c\phi)$

$\phi = 0.852 \qquad \frac{\phi}{deg} = 48.81 \qquad \gamma := \beta - \phi \qquad \gamma = 0.457 \qquad \frac{\gamma}{deg} = 26.19$

**Розкладемо всі сили на складові:**

$F_{1x} := F_1 \cdot sin(\alpha) \qquad F_{1y} := F_1 \cdot cos(\alpha) \qquad F_{2x} := F_2 \cdot cos(\gamma) \qquad F_{2y} := F_2 \cdot sin(\gamma)$

$F_{1x} = 22.5 \cdot kN \qquad F_{1y} = 26.81 \cdot kN \qquad F_{2x} = 40.38 \cdot kN \qquad F_{2y} = 19.86 \cdot kN$

$Q_x := \frac{1}{2} \cdot q \cdot a \qquad Q_x = 3 \cdot kN$

**Визначаємо опорні реакції:** $X_D := 0 \cdot H \qquad Y_D := 0 \cdot H \qquad Y_A := 0 \cdot H$

*Given* $\quad -X_D - Q_x - F_{1x} + F_{2x} = 0$

$-M + Q_x \cdot \frac{a}{2} - Y_D \cdot 2 \cdot b - F_{1y} \cdot \frac{b}{2} - F_{2x} \cdot a - F_{2y} \cdot \frac{3 \cdot b}{2} = 0$

$-M + Q_x \cdot \frac{a}{2} - Y_A \cdot 2 \cdot b + F_{1y} \cdot \frac{3 \cdot b}{2} - F_{2x} \cdot a + F_{2y} \cdot \frac{b}{2} = 0$

$\begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ Y_A \end{pmatrix} := Find(X_D, Y_D, Y_A) \qquad X_D = 14.88 \cdot kN$

$Y_D = -54.13 \cdot kN$

$Y_A = -7.46 \cdot kN$

**Перевірка:**

$-Y_A \cdot \frac{3 \cdot b}{2} + F_{1y} \cdot b - F_{1x} \cdot a - M - Q_x \cdot \frac{a}{2} - X_D \cdot a - Y_D \cdot \frac{b}{2} = -0 \cdot N \cdot m$

## *Задача С4 – рівновага довільної просторової системи сил*

### 4.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Дві однорідні прямокутні тонкі плити жорстко з'єднані під прямим кутом одна до одної і закріплені сферичним шарніром (або підп'ятником) в точці $A$, циліндричним шарніром (підшипником) в точці $B$ і невагомим стрижнем 1 (рис. С4.0 – С4.7) або двома підшипниками в точках $A$ і $B$ і двома невагомими стрижнями 1 і 2 (рис. С4.8, С4.9). Всі стрижні прикріплені до плит і до нерухомих опор шарнірами.

Розміри плит вказані на рисунках; вага більшої плити $P_1$=5 кН, вага меншої плити $P_2$=3 кН. Кожна із плит розташована паралельно одній із координатних площин (площина $xy$ – горизонтальна).

На плити діє пара сил з моментом $M$=4 кН·м, що лежить в площині однієї із плит, та дві сили. Значення цих сил, їх напрямок і точки прикладання вказані в табл. С4; при цьому сили $F_1$ і $F_4$ лежать в площинах, паралельних площині $xy$, сила $F_2$ – в площині, паралельній площині $xz$, а сила $F_3$ – в площині, паралельній площині $yz$. Точки прикладання сил ($D$, $E$, $H$, $K$) знаходяться в кутах або посередині сторін плит. При розрахунках прийняти $a$=0,6 м.

***Знайти*:** реакції в'язей в точках $A$, $B$ та реакцію стрижня (стрижнів).

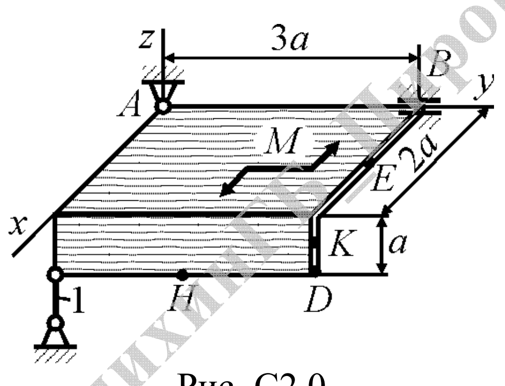



Рис. С2.0

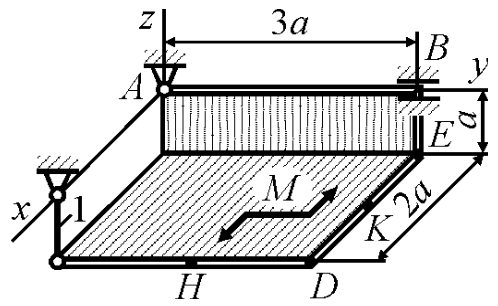



Рис. С2.1

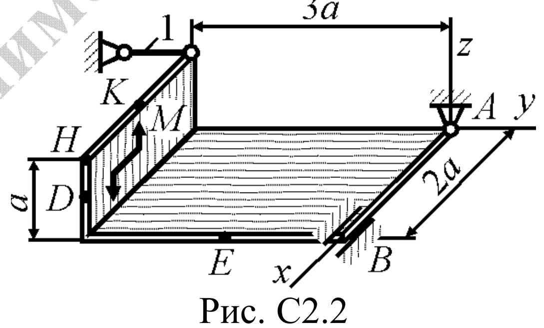



Рис. С2.2

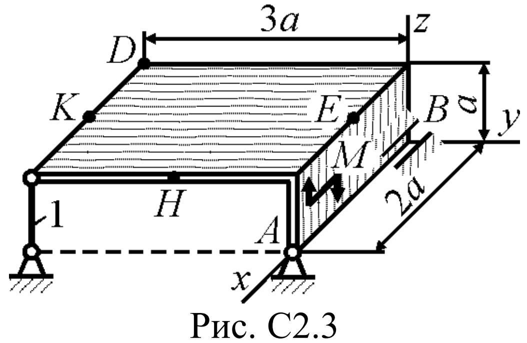



Рис. С2.3

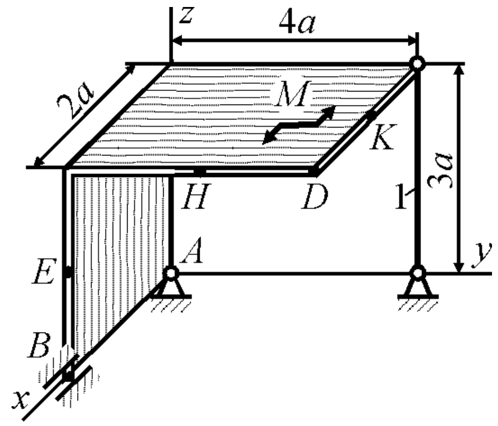



Рис. С2.4

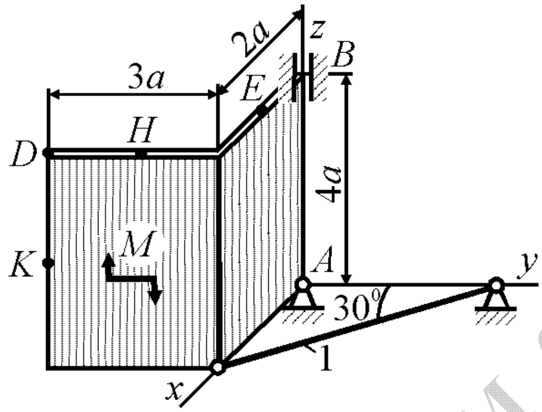
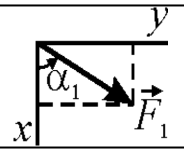
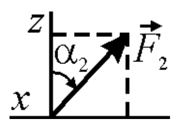
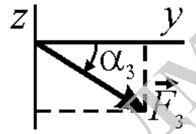
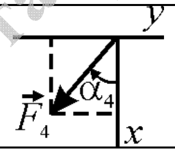



Рис. С2.5

Таблиця С4

| Сили |  | |  | |  | |  | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Номер умови | $F_1$=6 кН | | $F_2$=8 кН | | $F_3$=10 кН | | $F_4$=12 кН | |
| | Точка прикла-дання | $\alpha_1$, град | Точка прикла-дання | $\alpha_2$, град | Точка прикла-дання | $\alpha_3$, град | Точка прикла-дання | $\alpha_4$, град |
| **0** | *E* | 60 | *H* | 30 | -- | -- | -- | -- |
| **1** | -- | -- | *D* | 60 | *E* | 30 | -- | -- |
| **2** | -- | -- | -- | -- | *K* | 60 | *E* | 30 |
| **3** | *K* | 30 | -- | -- | *D* | 0 | -- | -- |
| **4** | -- | -- | *E* | 30 | -- | -- | *D* | 60 |
| **5** | *H* | 0 | *K* | 60 | -- | -- | -- | -- |
| **6** | -- | -- | *H* | 90 | *D* | 30 | -- | -- |
| **7** | -- | -- | -- | -- | *H* | 60 | *K* | 90 |
| **8** | *D* | 30 | -- | -- | *K* | 0 | -- | -- |
| **9** | -- | -- | *D* | 90 | -- | -- | *H* | 30 |

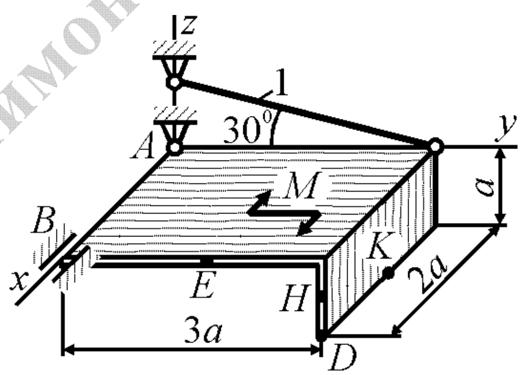



Рис. С2.6

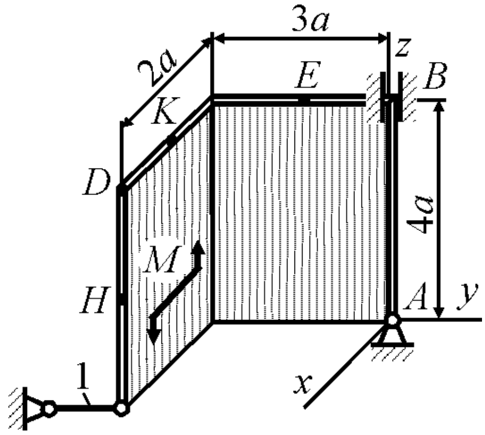



Рис. С2.7

ФилимонихинГБ_ПироговВВ_каф_ДМ та ПМ_2014

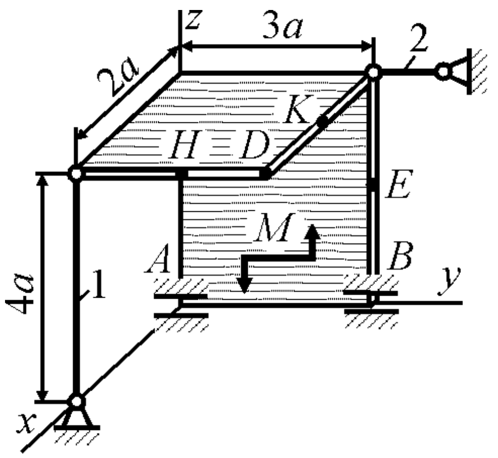



Рис. С2.8

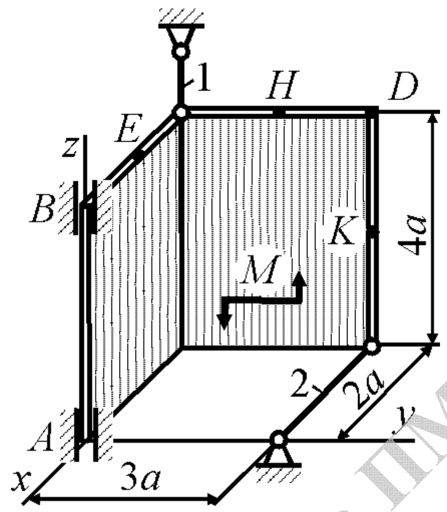



Рис. С2.9

## 4.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача С4 – на рівновагу тіла під дією довільної просторової системи сил. При її розв'язанні врахувати, що реакція сферичного шарніра (підп'ятника) має три складові (спрямовані вздовж відповідних координатних осей), а реакція циліндричного шарніра (підшипника) – дві складові, що лежать у площині, перпендикулярній осі шарніра (підшипника). При обчисленні момента сили $\vec{F}$ зручно розкласти її на складові спрямовані вздовж відповідних координатних осей. Тоді за теоремою Варіньона:

$$M_x(\vec{F}_i) = M_x(\vec{F}_{iy}) + M_x(\vec{F}_{iz}), \quad M_y(\vec{F}_i) = M_y(\vec{F}_{ix}) + M_y(\vec{F}_{iz}),$$

$$M_z(\vec{F}_i) = M_z(\vec{F}_{ix}) + M_z(\vec{F}_{iy}).$$

## 4.3. Приклад розв'язання задачі С4

**Умова задачі.** Дві однорідні прямокутні тонкі плити жорстко з'єднані під прямим кутом одна до одної і закріплені сферичним шарніром в точці *A*, циліндричним шарніром в точці *B* і невагомим стрижнем 1 (рис. С4а). Розміри плит вказані на рисунку рис. С4а. Вага більшої плити $P_1$, вага меншої плити $P_2$. Кожна із плит розташована паралельно одній із координатних площин.

На плити діє пара сил з моментом *M*, що лежить в площині однієї із плит, та дві сили. Схеми прикладання сил до плит приведені на рис. С4б, в.

**Дано:** $F_1$=15 *кН*, $F_2$=50 *кН*, $P_1$=25 *кН*, $P_2$=35 *кН*, *M*=100 *кН·м*, $\alpha=30^0$, $\beta=35^0$, $\gamma=60^0$, *a*=0,5 *м*.

**Знайти:** реакції в'язей в точках *A* та *B* і реакцію стрижня.

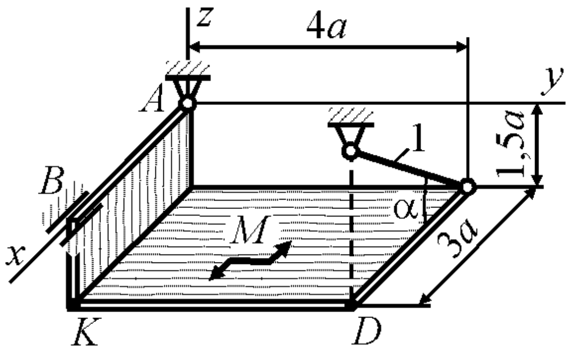


Рис. С4а

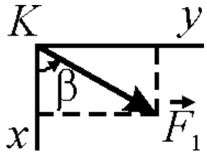


Рис. С4б

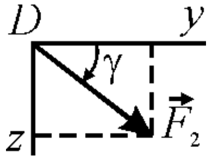


Рис. С4в

**Розв'язок**

**1. Будуємо розрахункову схему** (рис. С4г). Вводимо координатні осі *x*, *y*, *z* та показуємо сили, які діють на плити та виникають в опорах.

На плити діють сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сили ваги плит $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$, пара сил з моментом *M*, а також реакції в'язей. Реакцію сферичного шарніра *A* розкладаємо на три складові $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$; циліндричного шарніра *B* – на дві складові $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_B$; реакцію стрижня $\vec{R}_C$ направляємо вздовж стрижня від точки *C* до точки *E* вважаючи, що він розтягнутий. Зауважимо, що так як ми не знаємо наперед, як будуть направлені реакції $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_B$ то їх можна направляти в будь-яку сторону, але вздовж відповідних координатних осей.

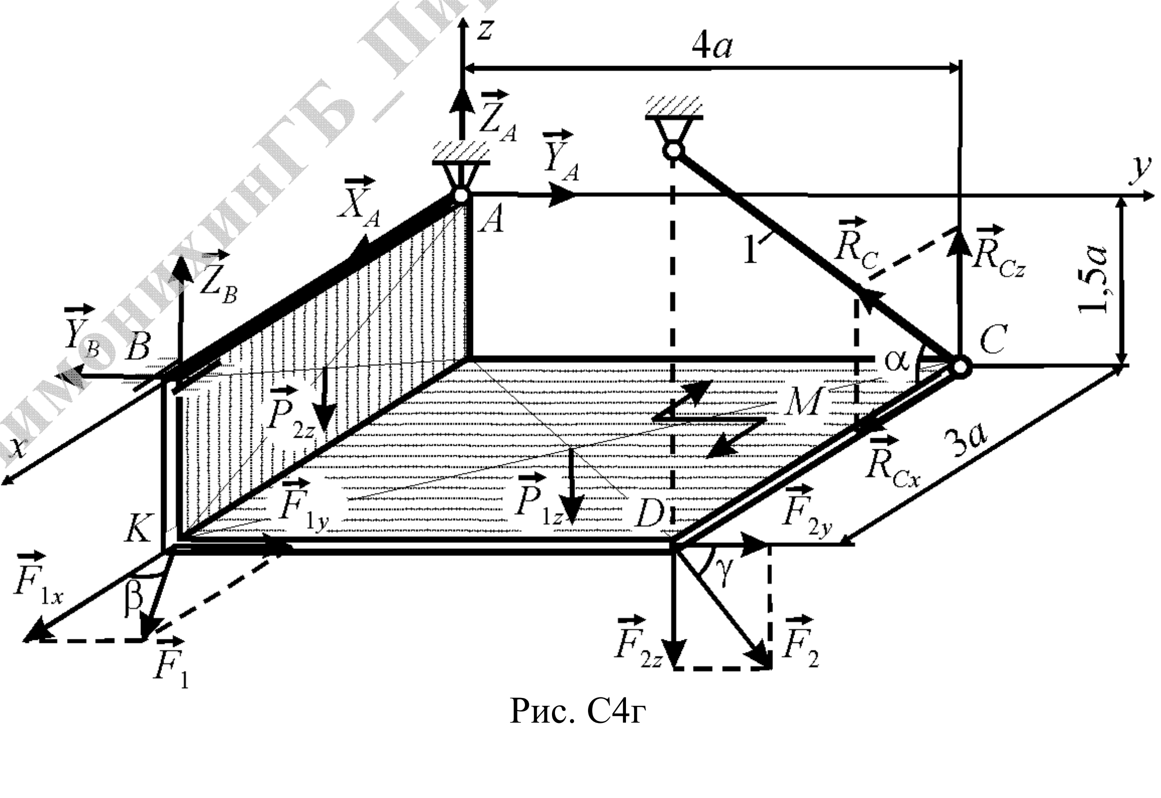


Рис. С4г

1.1. Визначимо проекції сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ та $\vec{R}_C$ на координатні осі, отримаємо:
$P_{1x}$=0, $P_{1y}$=0, $P_{1z}$=$P_1$; $P_{2x}$=0, $P_{2y}$=0, $P_{2z}$=$P_2$; $F_{1x}$=$F_1\cos\beta$, $F_{1y}$=$F_1\sin\beta$, $F_{1z}$=0; $F_{2x}$=0, $F_{2y}$=$F_2\cos\gamma$, $F_{2z}$=$F_2\sin\gamma$; $R_{Cx}$=$R_C\cos\alpha$, $R_{Cy}$=0, $R_{Cz}$=$R_C\sin\alpha$.

**2. Складаємо рівняння рівноваги**. Для визначення шести невідомих реакцій опор складаємо шість рівнянь рівноваги. Отримаємо:
а) рівняння проекцій сил:

$$\sum F_{ix} = 0: \ X_A + R_{Cx} + F_{1x} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \ Y_A - Y_B + F_{1y} + F_{2y} = 0,$$

$$\sum F_{iz} = 0: \ Z_A + Z_B + R_{Cz} - F_{2z} - P_{1z} - P_{2z} = 0;$$

б) рівняння моментів:

$$\sum M_{x_A}(\vec{F}_i) = 0: \ -P_{1z}2a + (F_{1y} + F_{2y})1{,}5a + (R_{Cz} - F_{2z})4a = 0;$$

$$\sum M_{y_A}\left(\vec{F}\right) = 0: \ (F_{2z} - Z_B)3a + (P_{1z} + P_{2z} - F_{1x} - R_{Cx})1{,}5a = 0;$$

$$\sum M_{z_A}\left(\vec{F}\right) = 0: \ (F_{1y} + F_{2y} - Y_B)3a - M - R_{Cx}4a = 0.$$

**3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь** в загальному вигляді. Визначатимемо невідомі сили в тому порядку в якому вони приведені нижче:

$R_{Cz} = [F_{2z}4a + P_{1z}2a - (F_{1y} + F_{2y})1{,}5a]/4a$; $R_C$=$R_{Cz}/\sin\alpha$; $R_{Cx}$=$R_C\cos\alpha$;

$$Z_B = \frac{F_{2z}3a + (P_{1z} + P_{2z} - F_{1x} - R_{Cx})1{,}5a}{3a}; \ Y_B = \frac{(F_{1y} + F_{2y})3a - M - R_{Cx}4a}{3a};$$

$$X_A = -R_{Cx} - F_{1x}; \ Y_A = Y_B - F_{1y} - F_{2y}; \ Z_A = F_{2z} + P_{1z} + P_{2z} - Z_B - R_{Cz}.$$

**4. Проводимо обчислення.**

4.1. Визначаємо модулі проекцій сил:

$P_{1z} = 25 \ кН$; $P_{2z} = 35 \ кН$;

$F_{1x} = 15 \cdot 0{,}82 \approx 12{,}287 \ кН$, $F_{1y} = 15 \cdot 0{,}573 \approx 8{,}6 \ кН$;

$F_{2y} = 50 \cdot 0{,}5 = 25 \ кН$, $F_{2z} = 50 \cdot 0{,}866 \approx 43{,}3 \ кН$.

4.2. Визначаємо реакції опор:

$R_{Cz} = [43{,}3 \cdot 4 \cdot 0{,}5 + 25 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - (8{,}6 + 25) \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5]/(4 \cdot 0{,}5) = 43{,}2 \ кН$;

$R_C = 43{,}2 / 0{,}5 = 86{,}4 \ кН$; $R_{Cx} = 86{,}4 \cdot 0{,}866 \approx 74{,}82 \ кН$;

$Z_B = [43{,}3 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + (25 + 35 - 12{,}287 - 74{,}82)1{,}5 \cdot 0{,}5] / 3 \cdot 0{,}5 \approx 29{,}746 \ кН$;

$Y_B = [(8{,}6 + 25) \cdot 3 \cdot 0{,}5 - 100 - 74{,}82 \cdot 4 \cdot 0{,}5] / 3 \cdot 0{,}5 \approx -132{,}83 \ кН$;

$X_A = -74{,}82 - 12{,}287 \approx -87{,}11 \ кН$; $Y_A = -132{,}83 - 8{,}6 - 25 = -166{,}43 \ кН$;

$Z_A = 43{,}3 + 25 + 35 - 29{,}746 - 43{,}2 = 30{,}354 \ кН$.

**5. Перевірка.** Складемо рівняння моментів так, щоб до них входила найбільша кількість невідомих. Для цього оберемо за центр моментів, наприклад, точку $D$ (рис. С4г) і складемо рівняння моментів відносно осей $x$\`, $y$\`, $z$\`, що виходять з точки $D$ і паралельні осям $x$, $y$, $z$ відповідно (на рис. С4г осі $x$\`, $y$\`, $z$\`, не показані).

1-*ше рівняння моментів для перевірки*:

$$\sum M_{x'_D}(\vec{F}_i) \overset{?}{=} 0: \quad P_{1z} 2a + (P_{2z} - Z_A - Z_B)4a + (Y_B - Y_A)1{,}5a \overset{?}{=} 0 ;$$

$$25 \cdot 2 \cdot 0{,}5 + (35 - 30{,}354 - 29{,}746)4 \cdot 0{,}5 + (-132{,}83 + 166{,}43)1{,}5 \cdot 0{,}5 \overset{?}{=} 0 ;$$
$$219{,}823 - 219{,}823 = 0 .$$

2-*ге рівняння моментів для перевірки*:

$$\sum M_{y'_D}(\vec{F}_i) \overset{?}{=} 0: \quad (X_A - P_{1z} - P_{2z})1{,}5a + (Z_A + R_{Cz})3a \overset{?}{=} 0 ;$$

$$-(87{,}11 + 25 + 35)1{,}5 \cdot 0{,}5 + (30{,}354 + 43{,}2)3 \cdot 0{,}5 \overset{?}{=} 0 ;$$
$$110{,}331 - 110{,}333 = 0{,}002 \approx 0 .$$

Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{110{,}331 - 110{,}333}{110{,}333} \cdot 100\,\% = -0{,}002\,\% < [\eta] = 5\,\% .$$

3-*те рівняння моментів для перевірки*:

$$\sum M_{z'_D}(\vec{F}_i) \overset{?}{=} 0: \quad -M + (X_A + F_{1x})4a - Y_A 3a \overset{?}{=} 0 ;$$

$$-100 - (87{,}11 - 12{,}287)4 \cdot 0{,}5 + 166{,}43 \cdot 3 \cdot 0{,}5 \overset{?}{=} 0 ;$$
$$274{,}219 - 274{,}22 = 0{,}001 \approx 0 .$$

Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{274{,}219 - 274{,}22}{274{,}22} \cdot 100\,\% = -0{,}0004\,\% < [\eta] = 5\,\% .$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно.

**Відповідь:** $R_C = 86{,}4$ *кН*; $X_A = -87{,}11$ *кН*; $Y_A = -166{,}43$ *кН*; $Z_A = 30{,}354$ *кН*; $Y_B = -132{,}83$ *кН*; $Z_B = 29{,}746$ *кН*.

Знак “–” вказує на те, що сили $X_A$, $Y_A$ та $Y_B$ в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямків показаних на рис С4г.

## 4.4. Документ MathCad для розв'язання задачі С4

### Документ Mathcad для розвязання задачі С4

**Введення розрахункових данних із збереженням розмірностей:**

$F_1 := 15 \cdot kN \quad F_2 := 50 \cdot kN \quad P_1 := 25 \cdot kN \quad P_2 := 35 \cdot kN \quad M := 100 \cdot kN \cdot m$

$\alpha := 30 \cdot deg \quad \beta := 35 \cdot deg \quad \gamma := 60 \cdot deg \quad a := 0.5 \cdot m$

Для розмірностей: *kg* - кілограм; *m* - метр; *s* - секунда; *N* - Ньютон; *kN* - кілоньютон; *deg* - градус.

**Розкладаємо сили на складові, визначаємо їх модулі:**

$P_{1z} := P_1 \quad P_{2z} := P_2 \quad F_{1x} := F_1 \cdot cos(\beta) \quad F_{1y} := F_1 \cdot sin(\beta)$

$P_{1z} = 25 \cdot kN \quad P_{2z} = 35 \cdot kN \quad F_{1x} = 12.287 \cdot kN \quad F_{1y} = 8.604 \cdot kN$

$F_{2y} := F_2 \cdot cos(\gamma) \quad F_{2z} := F_2 \cdot sin(\gamma) \quad F_{2y} = 25 \cdot kN \quad F_{2z} = 43.301 \cdot kN$

**Визначаємо невідомі реакції і силу Р за допомогою конструкції** *Given - Find*:

$X_A := 0 \cdot N \quad Y_A := 0 \cdot N \quad Z_A := 0 \cdot N \quad Y_B := 0 \cdot N \quad Z_B := 0 \cdot N \quad R_C := 0 \cdot N$

*Given* Рівняння проекцій сил:

$$X_A + R_C \cdot cos(\alpha) + F_{1x} = 0 \qquad Y_A - Y_B + F_{1y} + F_{2y} = 0$$

$$Z_A + Z_B + R_C \cdot sin(\alpha) - F_{2z} - P_{1z} - P_{2z} = 0$$

Рівняння моментів сил:

$$-P_{1z} \cdot 2 \cdot a + \left(F_{1y} + F_{2y}\right) \cdot 1.5 \cdot a + \left(R_C \cdot sin(\alpha) - F_{2z}\right) \cdot 4 \cdot a = 0$$

$$\left(F_{2z} - Z_B\right) \cdot 3 \cdot a + \left(P_{1z} + P_{2z} - F_{1x} - R_C \cdot cos(\alpha)\right) \cdot 1.5 \cdot a = 0$$

$$\left(F_{1y} + F_{2y} - Y_B\right) \cdot 3 \cdot a - M - R_C \cdot cos(\alpha) \cdot 4 \cdot a = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ Y_B \\ Z_B \\ R_C \end{pmatrix} := Find\left(X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, R_C\right)$$

$X_A = -87.1 \cdot kN \quad Y_A = -166.4 \cdot kN$

$Z_A = 30.4 \cdot kN$

$Y_B = -132.8 \cdot kN \quad Z_B = 29.7 \cdot kN$

$R_C = 86.4 \cdot kN$

**Перевірка**:

$$P_{1z} \cdot 2 \cdot a + \left(P_{2z} - Z_A - Z_B\right) \cdot 4 \cdot a + \left(Y_B - Y_A\right) \cdot 1.5 \cdot a = 7.276 \times 10^{-12} \cdot N \cdot m$$

$$\left(X_A - P_{1z} - P_{2z}\right) \cdot 1.5 \cdot a + \left(Z_A + R_C \cdot sin(\alpha)\right) \cdot 3 \cdot a = -2.91 \times 10^{-11} \cdot N \cdot m$$

$$-M + \left(X_A + F_{1x}\right) \cdot 4 \cdot a - Y_A \cdot 3 \cdot a = -2.91 \times 10^{-11} \cdot N \cdot m$$

## *Задача К1 – кінематика точки*

### 5.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Точка $M$ рухається у площині $Oxy$ (рис. К1.0 – К1.9, табл. К1; траєкторія точки на рисунках показана умовно). Закон руху точки заданий рівняннями: $x=f_1(t)$ та $y=f_2(t)$, де $x$ та $y$ виражені в сантиметрах, $t$ – в секундах. Залежність $x=f_1(t)$ вказана на рис. К1.0 – К1.9, а залежність $y=f_2(t)$ – в табл. К1 (для рис. 0–2 – в стовпці 2, для рис. 3–6 – в стовпці 3, рис. 7–9 – в стовпці 4).

**Знайти** рівняння траєкторії руху точки. Для моменту часу $t_1$=1 с визначити:

1) положення точки на траєкторії;

2) швидкість точки та зобразити її графічно;

3) пришвидшення точки координатним способом та зобразити його графічно;

4) пришвидшення точки натуральним способом та зобразити його графічно;

5) радіус кривини траєкторії та зобразити його графічно.

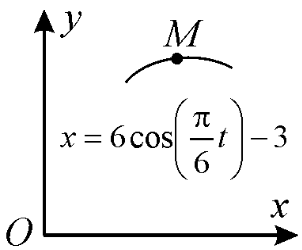



Рис. К1.0

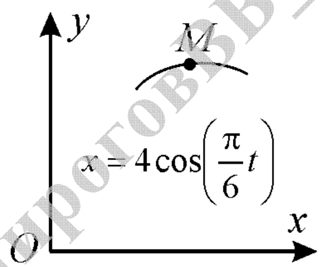



Рис. К1.1

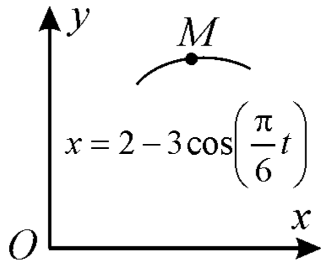



Рис. К1.2

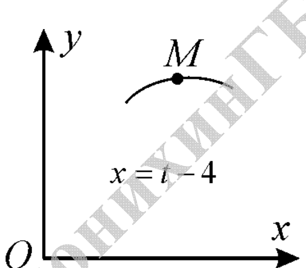



Рис. К1.3

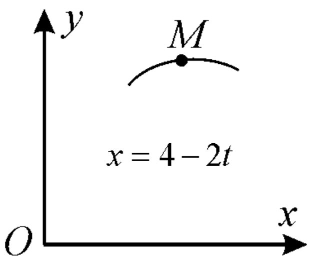



Рис. К1.4

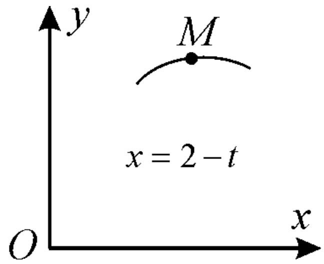



Рис. К1.5

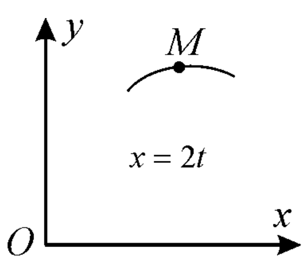



Рис. К1.6

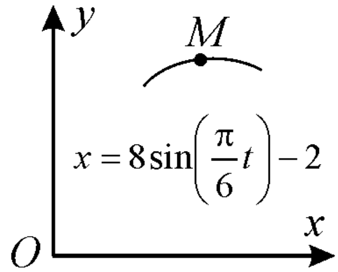



Рис. К1.7

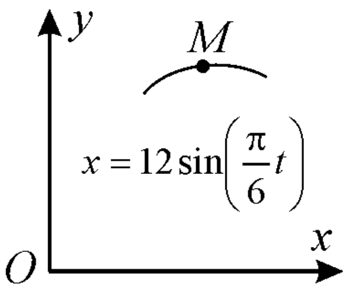



Рис. К1.8

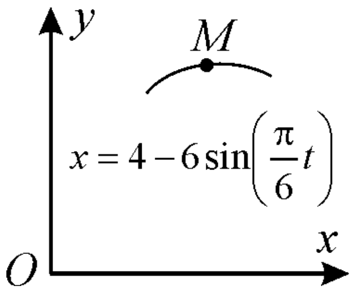



Рис. К1.9

Таблиця К1

| Номер умови | $y=f_2(t)$ | | |
|---|---|---|---|
| | Рис. 0–2 | Рис. 3–6 | Рис. 7–9 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | $12\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $2t^2+2$ | $4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ |
| 1 | $-6\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ | $8\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ | $6\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ |
| 2 | $-3\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $(2+t)^2$ | $4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ |
| 3 | $9\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $2t^3$ | $10\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ |
| 4 | $3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ | $2\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ | $-4\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ |
| 5 | $10\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $2-3t^2$ | $12\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ |
| 6 | $6\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $2\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ | $-3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ |
| 7 | $-2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $(t+1)^3$ | $-8\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ |
| 8 | $9\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ | $2-t^3$ | $9\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ |
| 9 | $-8\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ | $-6\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ |

## 5.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача К1 відноситься до кінематики точки. При розв'язанні задачі скористатися координатним та натуральним способом визначення швидкості та пришвидшення точки. В задачі всі шукані величини необхідно визначати тільки для моменту часу $t_1$=1 с. В деяких варіантах задачі К1 при визначенні рівняння траєкторії руху точки або при подальших розрахунках (для їх спрощення) слід врахувати відомі із тригонометрії формули:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha .$$

## 5.3. Приклад розв'язання задачі К1

**Умова задачі.** Рівняння руху точки $M$ мають вигляд:

$$x = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5, \quad y = 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10,$$

де $x$, $y$ – в сантиметрах, $t$ – в секундах.

**Знайти** рівняння траєкторії руху точки. Для моменту часу $t_1$=1 с визначити:

1) положення точки на траєкторії;

2) швидкість точки та зобразити її графічно;

3) пришвидшення точки координатним способом та зобразити його графічно;

4) пришвидшення точки натуральним способом та зобразити його графічно;

5) радіус кривини траєкторії та зобразити його графічно.

**Розв'язок**

**1. Знаходимо рівняння траєкторії руху точки та будуємо графік траєкторії її руху. Визначаємо та показуємо положення точки на траєкторії в момент часу $t_1$.**

Закон руху точки у координатній формі має вигляд:

$$x = 10\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 5, \quad y = 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10.$$

Одночасно це рівняння її траєкторії руху у параметричному вигляді, де параметром є час $t \in [0, +\infty)$.

Для визначення рівняння траєкторії руху точки у явному вигляді, виключимо з рівнянь руху час $t$. Скористаємося тригонометричною тотожністю

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \text{ де } \alpha = \pi t / 6. \qquad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вирази відповідних функцій:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)=\sin\alpha=\frac{x-5}{10},\quad \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)=\cos\alpha=\frac{y+10}{20}. \qquad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо рівняння траєкторії руху точки:

$$\left(\frac{x-5}{10}\right)^2+\left(\frac{y+10}{20}\right)^2=1. \qquad (3)$$

Рівняння (3) – це рівняння еліпса з півосями вздовж осі $x$ – 10 *см*, вздовж осі $y$ – 20 *см*. Центр еліпса має координати $C(5; -10)$. Використовуючи рівняння траєкторії (3) виконуємо її побудову (рис. К1а). При побудові обираємо такий масштаб відстаней, щоб на схемі було все добре видно.

Знайдемо координати точки на траєкторії. Для цього, підставимо в рівняння руху час $t_1$, матимемо:

$$x=10\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right)+5=10\cdot 0{,}5+5=10\ \text{см};$$

$$y=20\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right)-10=20\cdot 0{,}866-10=7{,}32\ \text{см}.$$

Отже, маємо точку $M$ з координатами $M(10; 7{,}32)$.

**Перевірка 1:** підставимо в рівняння (3) координату точки $x$=10 см та визначимо з нього координату $y$:

$$\left(\frac{10-5}{10}\right)^2+\left(\frac{y+10}{20}\right)^2=1,$$

звідки отримуємо, що $y$=7,32 *см*.

**2. Визначаємо швидкість точки (координатний спосіб) та зображаємо її графічно.**

Швидкість точки знайдемо по її проекціям на координатні осі. Проекції швидкості мають вигляд:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)+5\right]=\frac{5\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right);$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-10\right]=-\frac{10\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right). \qquad (4)$$

Підставляючи час $t_1$ у вирази (4), матимемо:

$$v_{1x}=\frac{5\cdot 3{,}14}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right)=5{,}236\cdot 0{,}866=4{,}53\ \text{см/с};$$

$$v_{1y}=-\frac{10\cdot 3{,}14}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right)=(-10{,}47)\cdot 0{,}5=-5{,}236\ \text{см/с}.$$

Модуль швидкості

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{(4{,}53)^2 + (-5{,}236)^2} = 6{,}92\ \text{см/с}. \qquad (5)$$

Обираємо масштаб для швидкостей $\mu_v = 2:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно. Проекції швидкості $v_{1x}$ та $v_{1y}$ відкладаємо у обраному масштабі відповідно вздовж осі $x$ та $y$, враховуючи при цьому їх напрямок з вказаними осями. Якщо проекції швидкості $v_{1x}$ та $v_{1y}$ мають знак „+”, то їх направляємо в додатній бік осей, якщо знак „-” – в протилежний бік.

**Перевірка 2:** вектор швидкості $\vec{v}$ спрямований по дотичній $\tau$ до траєкторії точки.

**3. Визначаємо пришвидшення точки (координатний спосіб) та зображаємо його графічно.**

Пришвидшення точки знайдемо по його проекціям на координатні осі. Проекції пришвидшення мають вигляд:

$$a_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{5\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right] = -\frac{5\pi^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right);$$

$$a_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{10\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right] = -\frac{5\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right). \qquad (6)$$

Підставляючи час $t_1$ у вирази (6), матимемо:

$$a_{1x} = -\frac{5\cdot(3{,}14)^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) = (-2{,}74)\cdot 0{,}5 = -1{,}37\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{1y} = -\frac{5\cdot(3{,}14)^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) = (-5{,}48)\cdot 0{,}866 = -4{,}75\ \text{см/с}^2.$$

Модуль пришвидшення

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{(-1{,}37)^2 + (-4{,}75)^2} = 4{,}94\ \text{см/с}^2. \qquad (7)$$

Обираємо масштаб для пришвидшень $\mu_a = 4:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно. Проекції пришвидшень $a_{1x}$ та $a_{1y}$ відкладаємо у обраному масштабі відповідно вздовж осі $x$ та $y$, враховуючи при цьому їх напрямок з вказаними осями. Якщо проекції пришвидшень $a_{1x}$ та $a_{1y}$ мають знак „+”, то їх направляємо в додатній бік осей, якщо знак „-” – в протилежний бік.

**Перевірка 3:** вектор пришвидшення $\vec{a}_1$ знаходиться з того ж боку, що і крива відносно дотичної $\tau$.

**4. Визначаємо пришвидшення точки (натуральний спосіб) та зображаємо їх графічно.**

Дотичне пришвидшення знайдемо за формулою:

$$a_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{v}}{v_\tau} \cdot \vec{a} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v_\tau} . \qquad (8)$$

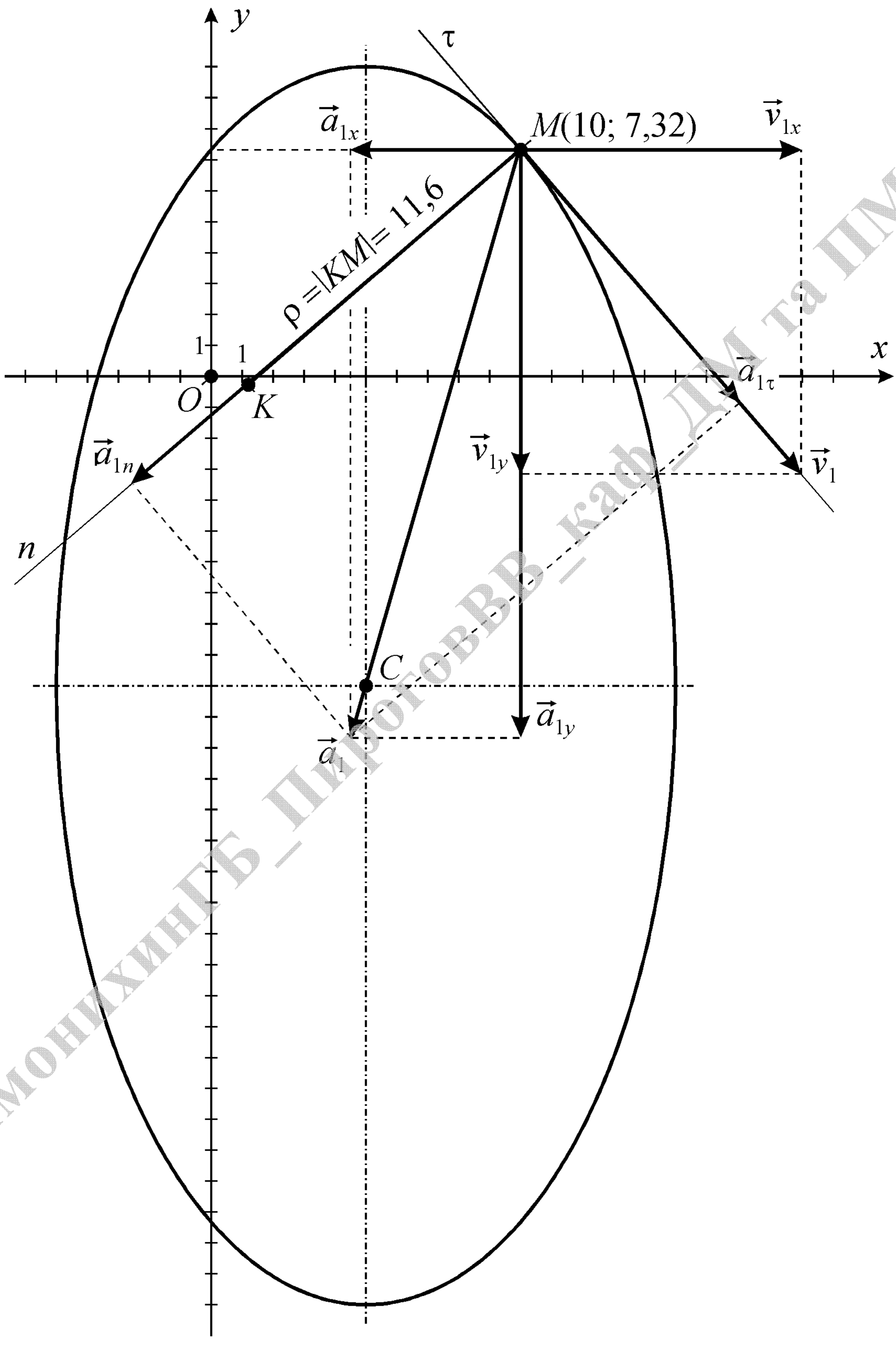



Рис. К1а

Враховуючи, що $v=v_1=v_\tau$, матимемо при $t_1$:

$$a_{1\tau}=[4{,}53\cdot(-1{,}37)+(-5{,}236)\cdot(-4{,}75)]/6{,}92=2{,}7\ \ см/с^2.$$

Так як дотичне пришвидшення додатне, то його спрямовуємо в той же бік, що і вектор швидкості (якщо $a_{1\tau}<0$, то в протилежний бік).

Нормальне пришвидшення знайдемо з формули:

$$a_{1n}=\sqrt{a_1^2-a_{1\tau}^2}=\sqrt{(4{,}94)^2-(2{,}7)^2}=4{,}13\ \ см/с^2.$$

Нормальне пришвидшення розташовується з того ж боку, що і крива відносно дотичної $\tau$, на перпендикулярі (нормалі $n$) опущеному на дотичну в точці $M$. Обираємо масштаб для пришвидшень $\mu_a=4:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно.

**Перевірка 4:** пришвидшення точки $M$, яке є діагоналлю прямокутника побудованого на сторонах $a_{1x}$ та $a_{1y}$, співпадає з діагоналлю прямокутника побудованого на сторонах $a_{1\tau}$ та $a_{1n}$.

**5. Визначаємо радіус кривини траєкторії** та зображаємо його графічно. При $t_1$:

$$\rho_1=\frac{v_1^2}{a_{1n}}=\frac{(6{,}92)^2}{4{,}13}=11{,}6\ \ см.$$

У масштабі відстаней, у напрямку нормального пришвидшення, вздовж нормалі $n$, відкладаємо радіус кривини.

**Відповідь:** $v_1$=6,92 *см/с*, $a_1$=4,94 *см/с*$^2$, $a_{1\tau}$=2,7 *см/с*$^2$, $a_{1n}$=4,13 *см/с*$^2$, $\rho_1$=11,6 *см*.

## 5.4. Документ MathCad для розв'язання задачі К1

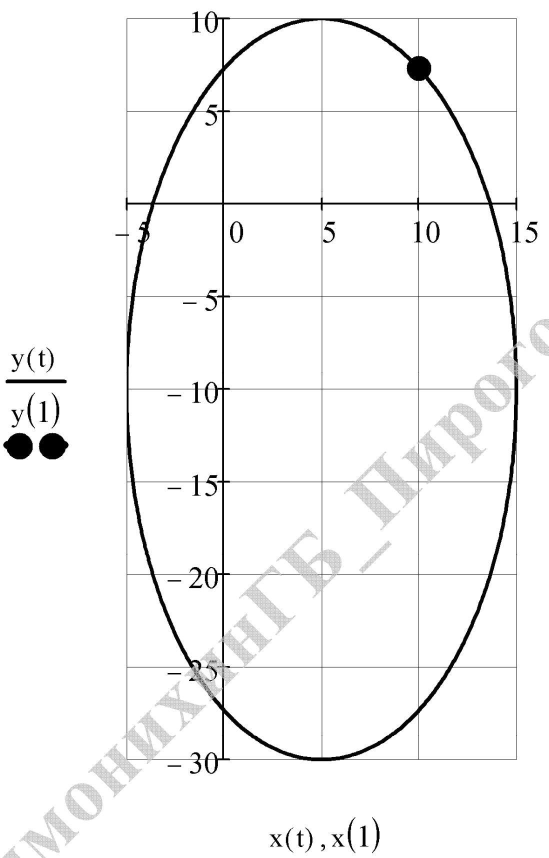
### Документ
Mathcad для роз'вязання
задачі К1 - з кінематики точки

**1. Будуємо траєкторію руху точки і показуємо на ній положення точки у момент часу** $t$=1 *с*.

Закон руху точки у координатному вигляді - це рівняння її траєкторії у параметричному вигляді (час $t$ - параметр):

$$x(t) := 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 5 \qquad y(t) := 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) - 10$$

Координати точки $M$ при $t$=1 *с*: $x(1) = 10$ $y(1) = 7.321$




На графіку зображено траєкторію руху точки і положення точки на траєкторії у момент часу $t$=1 с.

**2. Проекції швидкості** точки на осі $x$, $y$ в довільний момент часу $t$:

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad v_x(t) \rightarrow \frac{5 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)}{3}$$

$$v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad v_y(t) \rightarrow -\frac{10\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)}{3}$$

Проекції швидкості точки на осі *x*, *y* в момент часу *t*=1 *с*:

$$v_x(1) = 4.534 \qquad v_y(1) = -5.236$$

Модуль швидкості точки в момент часу *t*=1 *с*:

$$v := \sqrt{v_x(1)^2 + v_y(1)^2} \qquad v = 6.927$$

**3. Проекції пришвидшення** точки на осі *x*, *y* в довільний момент часу *t*:

$$a_x(t) := \frac{d}{dt}v_x(t) \qquad a_x(t) \rightarrow -\frac{5\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)}{18}$$

$$a_y(t) := \frac{d}{dt}v_y(t) \qquad a_y(t) \rightarrow -\frac{5\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)}{9}$$

Проекції пришвидшення точки на осі *x*, *y* в момент часу *t*=1 *с*:

$$a_x(1) = -1.371 \qquad a_y(1) = -4.749$$

Модуль пришвидшення точки в момент часу *t*=1 *с*:

$$a := \sqrt{a_x(1)^2 + a_y(1)^2} \qquad a = 4.942$$

**4. Дотичне пришвидшення** в момент часу *t*=1 *с*:

$$a_\tau := \frac{a_x(1)\cdot v_x(1) + a_y(1)\cdot v_y(1)}{v} \qquad a_\tau = 2.692$$

**Нормальне пришвидшення** в момент часу *t*=1 *с*:

$$a_n := \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \qquad a_n = 4.145$$

**5. Радіус кривини траєкторії** в момент часу *t*=1 *с*:

$$\rho := \frac{v^2}{a_n} \qquad \rho = 11.575$$

## *Задача К2 – найпростіші рухи абсолютно твердого тіла*

### 6.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Механізм складається із ступінчатих коліс 1–3, що знаходяться в зачепленні або зв'язані пасовою передачею, зубчатої рейки 4 і вантажа 5, прив'язаного до кінця нитки, що намотана на одне з коліс (рис. К2.0 – К2.9, табл. К2). Радіуси ободів коліс рівні відповідно: у колеса 1 – $r_1$=2 см, $R_1$=4 см, у колеса 2 – $r_2$=6 см, $R_2$=8 см, у колеса 3 – $r_3$=12 см, $R_3$=16 см. На ободах коліс розташовані точки *A*, *B* і *C*.

В колонці "Дано" (табл. К2), вказаний закон руху або закон зміни швидкості ведучої ланки механізму, де $\varphi_i(t)$ – закон обертального руху *i*-го колеса, $s_j(t)$ – закон руху рейки або вантажа, $\omega_i(t)$ – закон зміни кутової швидкості *i*-го колеса, $v_j(t)$ – закон зміни швидкості рейки або вантажа ($\varphi$ виражено в радианах, *s* – в сантиметрах, *t* – в секундах). Додатній напрямок для $\varphi$ і $\omega$ проти ходу стрілки годинника, для *s* і *v* – вниз.

***Знайти***: в момент часу $t_1$=2 с вказані в таблиці К2 в колонках «Знайти» швидкості (*v* – лінійні, $\omega$ – кутові) і пришвидшення (*a* – лінійні, $\varepsilon$ – кутові) відповідних точок або тіл.

Таблиця К2

| Номер умови | Дано | Знайти | |
|---|---|---|---|
| | | швидкості | пришвидшення |
| 0 | $s_4=4(7t-t^2)$ | $v_B$, $v_C$ | $\varepsilon_2$, $a_A$, $a_5$ |
| 1 | $v_5=2(t^2-3)$ | $v_A$, $v_C$ | $\varepsilon_3$, $a_B$, $a_4$ |
| 2 | $\varphi_1=2t^2-9$ | $v_4$, $\omega_2$ | $\varepsilon_2$, $a_C$, $a_5$ |
| 3 | $\omega_2=7t-3t^2$ | $v_5$, $\omega_3$ | $\varepsilon_2$, $a_A$, $a_4$ |
| 4 | $\varphi_3=3t-t^2$ | $v_4$, $\omega_1$ | $\varepsilon_1$, $a_B$, $a_5$ |
| 5 | $\omega_1=5t-2t^2$ | $v_5$, $v_B$ | $\varepsilon_2$, $a_C$, $a_4$ |
| 6 | $\varphi_2=2(t^2-3t)$ | $v_4$, $\omega_1$ | $\varepsilon_1$, $a_C$, $a_5$ |
| 7 | $v_4=3t^2-8$ | $v_A$, $\omega_3$ | $\varepsilon_3$, $a_B$, $a_5$ |
| 8 | $s_5=2t^2-5t$ | $v_4$, $\omega_2$ | $\varepsilon_1$, $a_C$, $a_4$ |
| 9 | $\omega_3=8t-3t^2$ | $v_5$, $v_B$ | $\varepsilon_2$, $a_A$, $a_4$ |

### 6.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача К2 – на дослідження найпростіших рухів твердого тіла. При розв'язанні задачі врахувати, що, коли два колеса знаходяться в зачепленні, швидкість точки зачеплення кожного колеса буде однакова, а коли два колеса зв'язані пасовою передачею, то швидкості всіх точок паса і, відповідно, точок, що лежать на ободі кожного з коліс, в данный момент часу чисельно однакові; при цьому вважається, що пас по ободу колеса не ковзає.

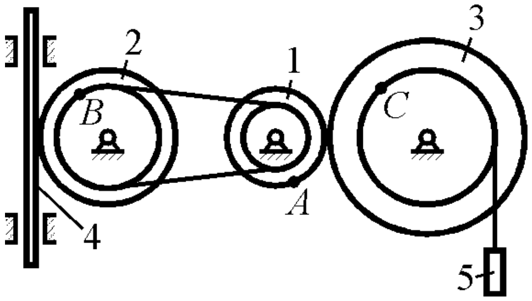



Рис. К2.0

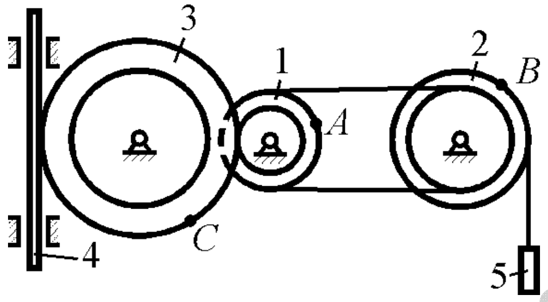



Рис. К2.1

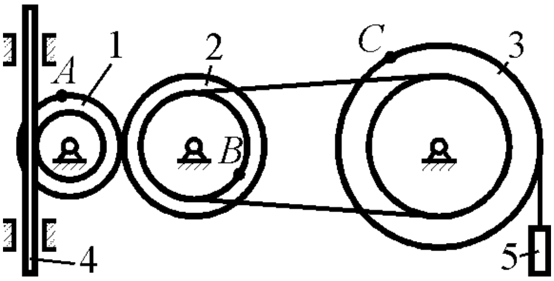



Рис. К2.2

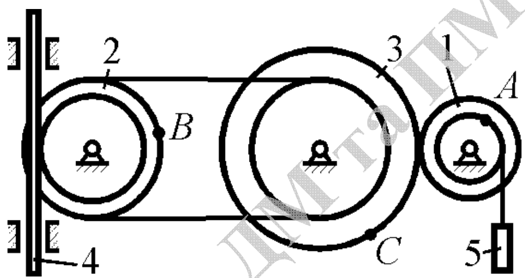



Рис. К2.3

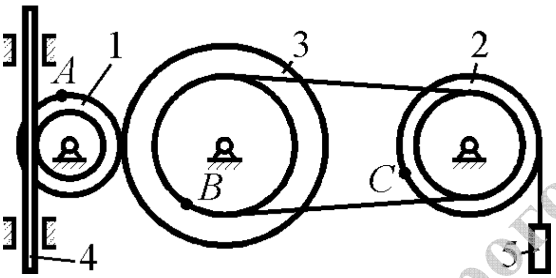



Рис. К2.4

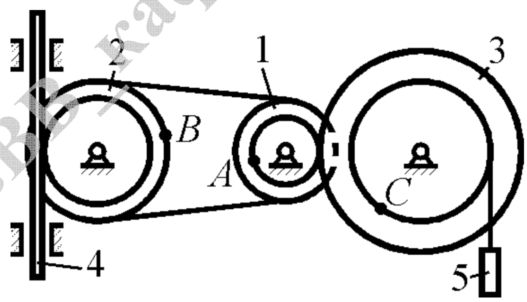



Рис. К2.5

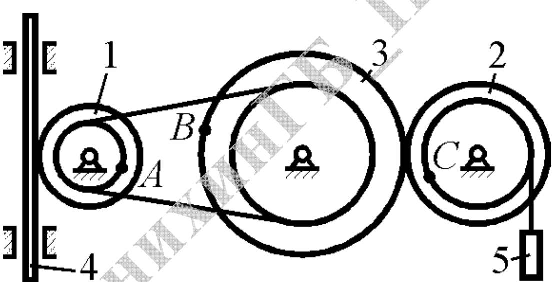



Рис. К2.6

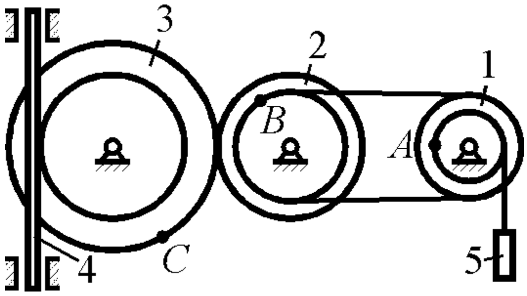



Рис. К2.7

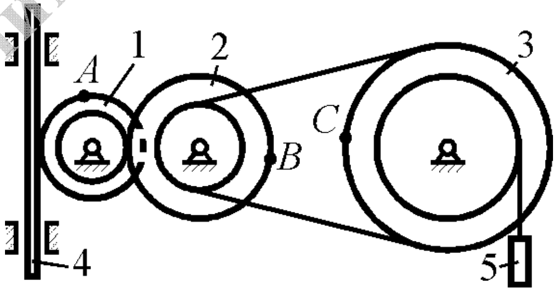



Рис. К2.8

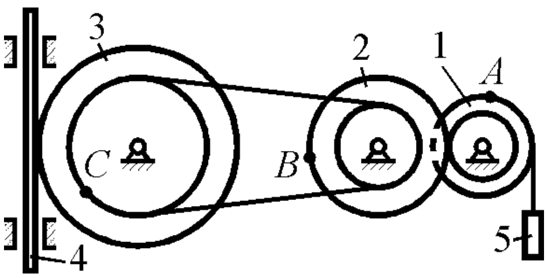



Рис. К2.9

## 6.3. Приклад розв’язання задачі К2

**Умова задачі.** Механізм складається з ступінчатих коліс 2–4, які знаходяться в зачепленні або зв’язані ремінною передачею, зубчатої рейки 5 і вантажа 1, прив’язаного до кінця нитки, що намотана на колесо 2 (рис. К2а). Вантаж рухається по закону $s_1=f(t)$.

**Дано:** $s_1=8(6t-t^2)$ *см*; $R_2=40$ *см*; $r_2=20$ *см*; $R_3=20$ *см*; $r_3=10$ *см*; $R_4=30$ *см*; $r_4=15$ *см*; $t_1=2$ *с*.

**Знайти:** швидкості $\omega_3$, $\omega_4$, $v_A$, $v_5$; пришвидшення $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$, $a_B$, $a_5$.

**Розв'язок**

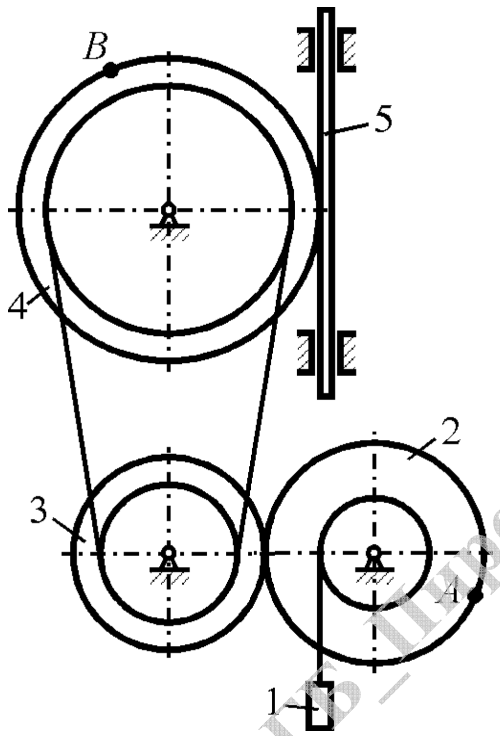



Рис. К2а

**1. Будуємо розрахункову схему для швидкостей** (рис. К2б). Визначаємо швидкість тіла 1, для якого задано закон руху:

$$v_1 = \dot{s}_1 = [8(6t - t^2)]' = 8(6 - 2t)\ .$$

При $t_1$ отримуємо

$$v_1 = 8 \cdot (6 - 2 \cdot 2) = 16\ \ \text{см/с}.$$

**2. Знаходимо зв’язки між швидкостями**, обравши за незалежну швидкість тіла 1 – $v_1$, при цьому виражаємо всі швидкості через швидкість $v_1$. Домовимось позначати швидкості точок, які лежать на зовнішніх ободах коліс (радіуса $R_i$), через $v_i$, а точок, які лежать на внутрішніх ободах (радіуса $r_i$) – через $u_i$.

$$u_2 = v_1;\ \ \omega_2 = \frac{u_2}{r_2} = \frac{v_1}{r_2};\ \ v_3 = v_2 = v_A = \omega_2 R_2 = \frac{v_1 R_2}{r_2};\ \ \omega_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{v_1 R_2}{r_2 R_3};$$

$$u_3 = \omega_3 r_3 = \frac{v_1 R_2 r_3}{r_2 R_3};\ \ u_4 = u_3;\ \ \omega_4 = \frac{u_4}{r_4} = \frac{v_1 R_2 r_3}{r_2 R_3 r_4};$$

$$v_4 = \omega_4 R_4 = \frac{v_1 R_2 r_3 R_4}{r_2 R_3 r_4} = v_5 = v_B\ .$$

**3. Будуємо розрахункову схему для пришвидшень** (рис. К2в). Визначаємо пришвидшення тіла 1:

$$a_1 = \dot{v}_1 = [8(6 - 2t)]' = 8 \cdot (-2) = -16\ \ \text{см/с}^2.$$

Знак ”–” перед пришвидшенням вказує на те, що пришвидшення будуть направлені в протилежний бік від напрямків швидкостей. На рис. К2в показані дійсні напрямки пришвидшень.

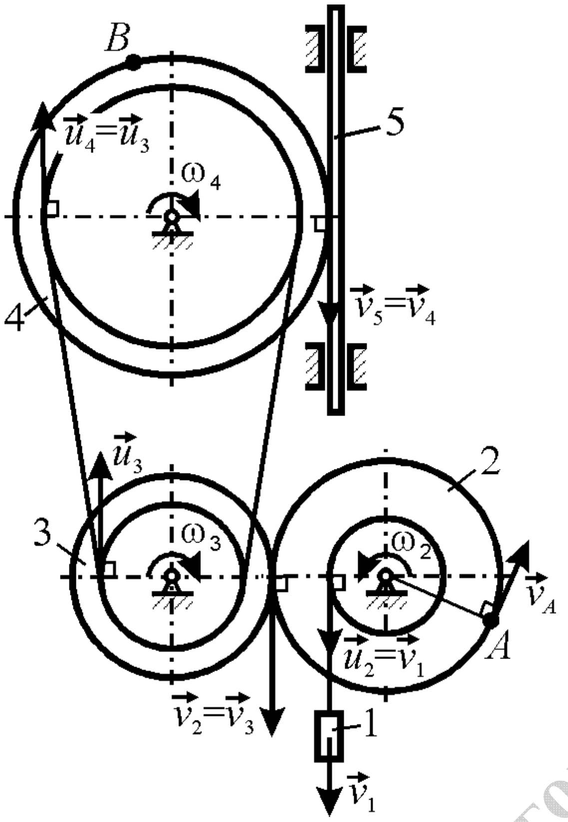



Рис. К2б

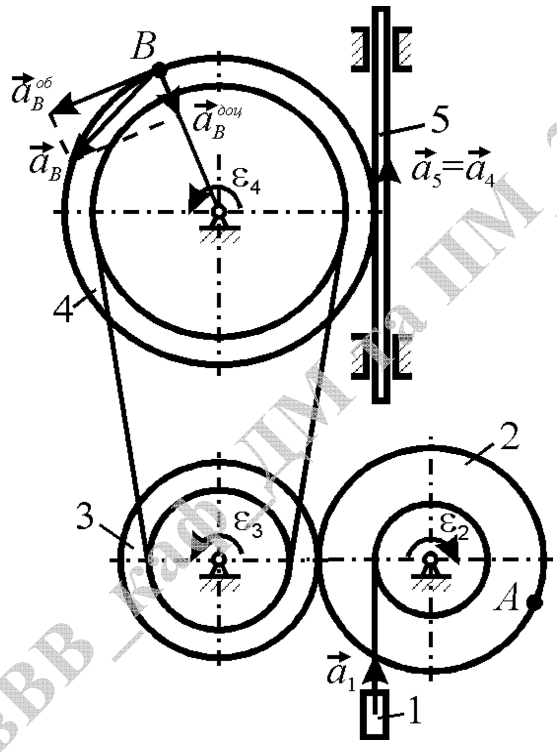



Рис. К2в

**4. Знаходимо зв’язки між пришвидшеннями**. Обравши за незалежне пришвидшення тіла 1 – $a_1$, отримаємо:

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{a_1}{r_2}; \quad \varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{a_{23}}{R_3} = \frac{a_1 R_2}{r_2 R_3};$$

$$\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = \frac{a_3}{r_4} = \frac{a_1 R_2 r_3}{r_2 R_3 r_4}; \quad a_5 = a_4 = \varepsilon_4 R_4 = \frac{a_1 R_2 r_3 R_4}{r_2 R_3 r_4}.$$

**5. Проводимо розрахунки.** Підставляємо вихідні дані у вирази для швидкостей та пришвидшень, тоді при $t_1$ отримаємо:

$$v_A = \frac{16 \cdot 40}{20} = 32 \ см/с; \quad \omega_3 = \frac{16 \cdot 40}{20 \cdot 20} = 1{,}6 \ рад/с;$$

$$\omega_4 = \frac{16 \cdot 40 \cdot 10}{20 \cdot 20 \cdot 15} = 1{,}067 \ рад/с; \quad v_5 = \frac{16 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 30}{20 \cdot 20 \cdot 15} = 32 \ см/с.$$

$$\varepsilon_3 = \frac{(-16) \cdot 40}{20 \cdot 20} = -1{,}6 \ рад/с^2; \quad \varepsilon_4 = \frac{(-16) \cdot 40 \cdot 10}{20 \cdot 20 \cdot 15} = -1{,}067 \ рад/с^2;$$

$$a_5 = (-1{,}067) \cdot 30 = -32 \ см/с^2.$$

Пришвидшення точки $B$ має вигляд:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\,об} + \vec{a}_B^{\,доц},$$

де

$$a_B^{об} = \varepsilon_4 R_4 = (-1{,}067)\cdot 30 = -32 \ \ см/с^2,$$

$$a_B^{доц} = \omega_4^2 R_4 = 1{,}067^2 \cdot 30 = 34{,}15 \ \ см/с^2.$$

Модуль пришвидшення точки $B$:

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^{об}\right)^2 + \left(a_B^{доц}\right)^2} = \sqrt{(-32)^2 + 34{,}15^2} = 46{,}8 \ \ см/с^2.$$

**Відповідь:** $v_A = 32 \ \ см/с$; $\omega_3 = 1{,}6 \ \ рад/с$; $\omega_4 = 1{,}067 \ \ рад/с$; $v_5 = 32 \ \ см/с$; $\varepsilon_3 = -1{,}6 \ \ рад/с^2$; $\varepsilon_4 = -1{,}067 \ \ рад/с^2$; $a_5 = -32 \ \ см/с^2$; $a_B = 46{,}8 \ \ см/с^2$.

## *Задача К3 – плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла*

### 7.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Плоский механізм складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна $B$ або $E$ (рис. К3.0 – К3.7), або із ланок 1, 2, 3 і повзунів $B$ і $E$ (рис. К3.8, К3.9), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами $O_1$, $O_2$ шарнірами; точка $D$ знаходиться посередині ланки $AB$. Довжини ланок рівні відповідно $l_1$=0,4 м, $l_2$=1,2 м, $l_3$=1,4 м, $l_4$=0,6 м. Положення механізму визначається кутами α, β, γ, φ, θ. Значення цих кутів та інших заданих величин вказані в табл. К3а (для рис. К3.0 – К3.4), або в табл. К3б (для рис. К3.5 – К3.9); при цьому в табл. К3а $\omega_1$ і $\omega_4$ – величини сталі.

Дугові стрілки на рисунках показують те, як повинні відкладатися відповідні кути при побудові креслення механізму (за ходом чи проти ходу стрілки годинника). Побудову креслення слід розпочинати із ланки, напрямок якої визначається кутом α; повзун з направляючими (рис. К3.10а) для наочності показати так, як показано на рис. К3.10б.

Задані кутову швидкість і кутове пришвидшення вважати направленими проти годинникової стрілки, а задані швидкість $v_B$ і пришвидшення $a_B$ – від точки $B$ до $b$ (на рис. К3.5 – К3.9).

***Знайти*:** величини вказані в стовпчику "Знайти".

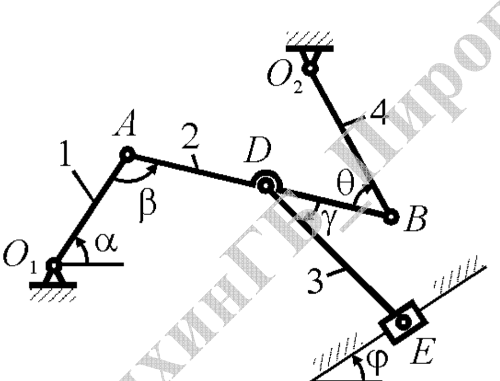


Рис. К3.0

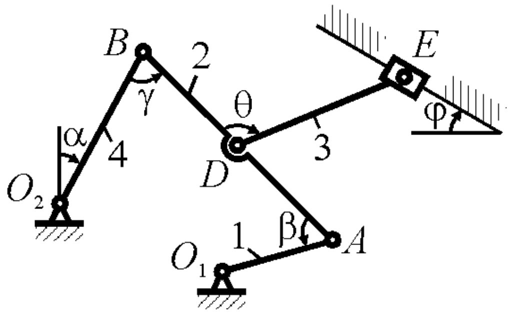


Рис. К3.1

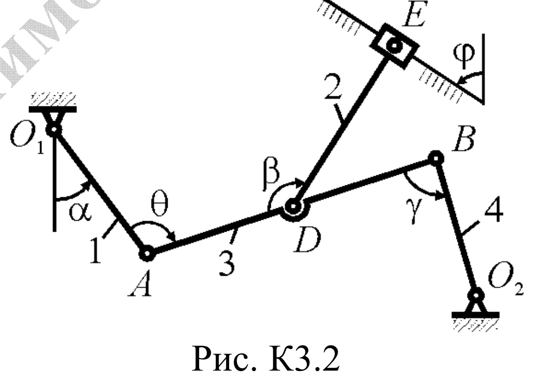


Рис. К3.2

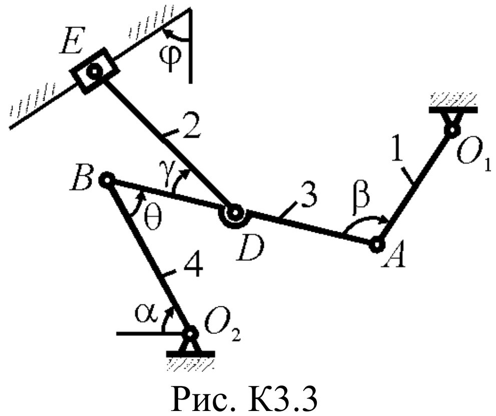


Рис. К3.3

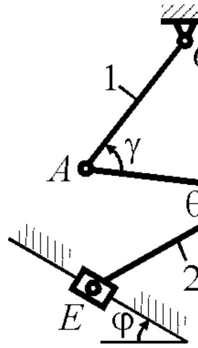



Рис. К3.4

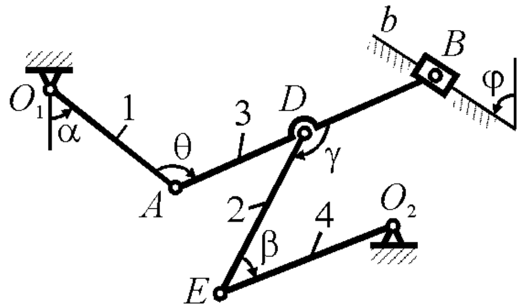



Рис. К3.5

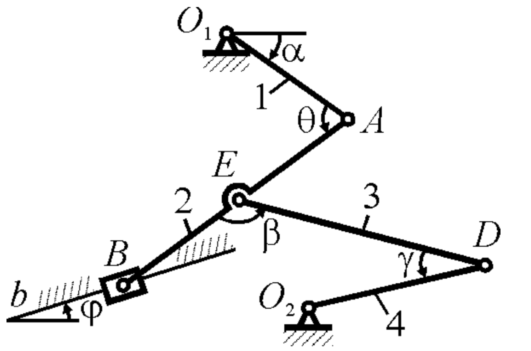



Рис. К3.6

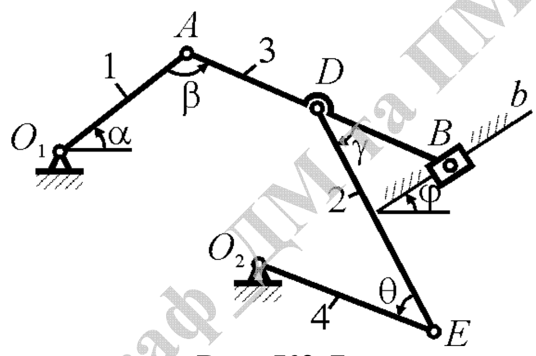



Рис. К3.7

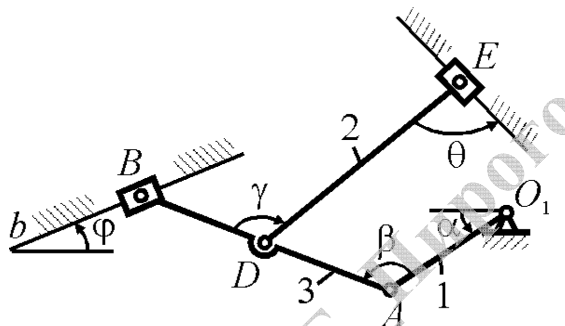



Рис. К3.8

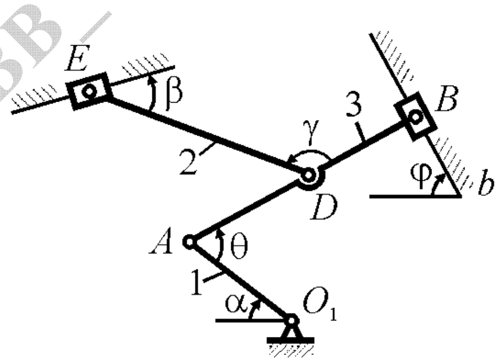



Рис. К3.9

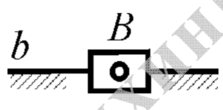



Рис. К3.10а

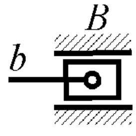



Рис. К3.10б

## 7.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі

Задача К3 – на дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла. При її розв’язанні для визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок необхідно скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла і поняттям про миттєвий центр швидкостей, застосовуючи дану теорему **до кожної ланки механізму окремо.** Побудову схеми швидкостей розпочинаємо з ланки механізму для якої задана швидкість (наприклад, або кутова швидкість однієї з ланок, або лінійна швидкість повзуна).

При визначенні пришвидшення точок механізму необхідно використовувати векторну рівність $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, де $A$ – точка, пришвидшення $\vec{a}_A$ якої або задано, або безпосередньо визначається по умові задачі (якщо точка $A$ рухається по дузі кола, то $\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_A + \vec{a}^{n}_A$); $B$ – точка, пришвидшення $\vec{a}_B$ якої потрібно визначити (у випадку, коли точка $B$ теж рухається по дузі кола, необхідно дивитися примітку в кінці розглянутого нижче прикладу К3).

Таблиця К3а (до рис. К3.0 – К3.4)

| Номер умови | Кути, град | | | | | Дано | | Знайти | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | α | β | γ | φ | θ | $\omega_1$, 1/с | $\omega_4$, 1/с | $v$, точок | ω, ланки | $a$, точки | ε, ланки |
| **0** | 0 | 60 | 30 | 0 | 120 | 6 | -- | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | $AB$ |
| **1** | 90 | 120 | 150 | 0 | 30 | -- | 4 | $A$, $E$ | $AB$ | $A$ | |
| **2** | 30 | 60 | 30 | 0 | 120 | 5 | -- | $B$, $E$ | $AB$ | $B$ | |
| **3** | 60 | 150 | 150 | 90 | 30 | -- | 5 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | |
| **4** | 30 | 30 | 60 | 0 | 150 | 4 | -- | $D$, $E$ | $AB$ | $B$ | |
| **5** | 90 | 120 | 120 | 90 | 60 | -- | 6 | $A$, $E$ | $AB$ | $A$ | |
| **6** | 90 | 150 | 120 | 90 | 30 | 3 | -- | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | |
| **7** | 0 | 60 | 60 | 0 | 120 | -- | 2 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | |
| **8** | 60 | 150 | 120 | 90 | 30 | 2 | -- | $D$, $E$ | $AB$ | $B$ | |
| **9** | 30 | 120 | 150 | 0 | 60 | -- | 8 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | |

Таблиця К3б (до рис. К3.5 – К3.9)

| Номер умови | Кути, град | | | | | Дано | | | | Знайти | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | α | β | γ | φ | θ | $\omega_1$, 1/с | $\varepsilon_1$, 1/с$^2$ | $v_B$, м/с | $a_B$, м/с$^2$ | $v$, точок | ω, ланки | $a$, точки | ε, ланки |
| **0** | 120 | 30 | 30 | 90 | 150 | 2 | 4 | -- | -- | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | $AB$ |
| **1** | 0 | 60 | 90 | 0 | 120 | -- | -- | 4 | 6 | $A$, $E$ | $AB$ | $A$ | |
| **2** | 60 | 150 | 30 | 90 | 30 | 3 | 5 | -- | -- | $B$, $E$ | $AB$ | $B$ | |
| **3** | 0 | 150 | 30 | 0 | 60 | -- | -- | 6 | 8 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | |
| **4** | 30 | 120 | 120 | 0 | 60 | 4 | 6 | -- | -- | $D$, $E$ | $AB$ | $B$ | |
| **5** | 90 | 120 | 90 | 90 | 60 | -- | -- | 8 | 3 | $A$, $E$ | $AB$ | $A$ | |
| **6** | 0 | 150 | 90 | 0 | 120 | 5 | 8 | -- | -- | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | |
| **7** | 30 | 120 | 30 | 0 | 60 | -- | -- | 2 | 5 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | |
| **8** | 90 | 120 | 120 | 90 | 150 | 6 | 10 | -- | -- | $D$, $E$ | $AB$ | $B$ | |
| **9** | 60 | 60 | 60 | 90 | 30 | -- | -- | 5 | 4 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | |

## 7.3. Приклад розв'язання задачі К3

**Умова задачі.** Плоский механізм (рис. К3а) складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна *B*, з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами $O_1$ і $O_2$ шарнірами.

**Дано:** $\alpha=60^0$, $\beta=150^0$, $\gamma=90^0$, $\varphi=30^0$, $\theta=30^0$, $AD=DB$, $l_1=0{,}4$ м, $l_2=1{,}2$ м, $l_3=1{,}4$ м, $l_4=0{,}6$ м, $\omega_1=2$ рад/с, $\varepsilon_1=7$ рад/с$^2$.

***Знайти*:** швидкості $v_B$, $v_E$ і $\omega_2$; пришвидшення $\varepsilon_3$ і $a_B$.

### Розв'язок

**1. Будуємо схему для швидкостей** (рис. К3б). Будуємо положення механізму у відповідності із заданими кутами розпочинаючи з ланки, напрямок якої визначається кутом α.

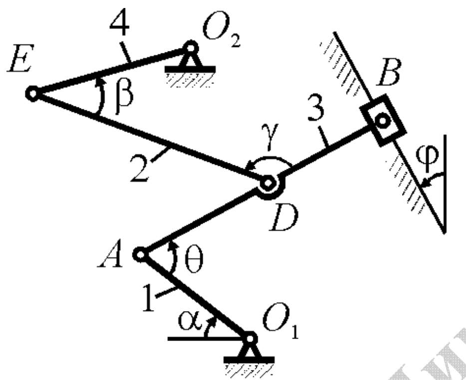


Рис. К3а

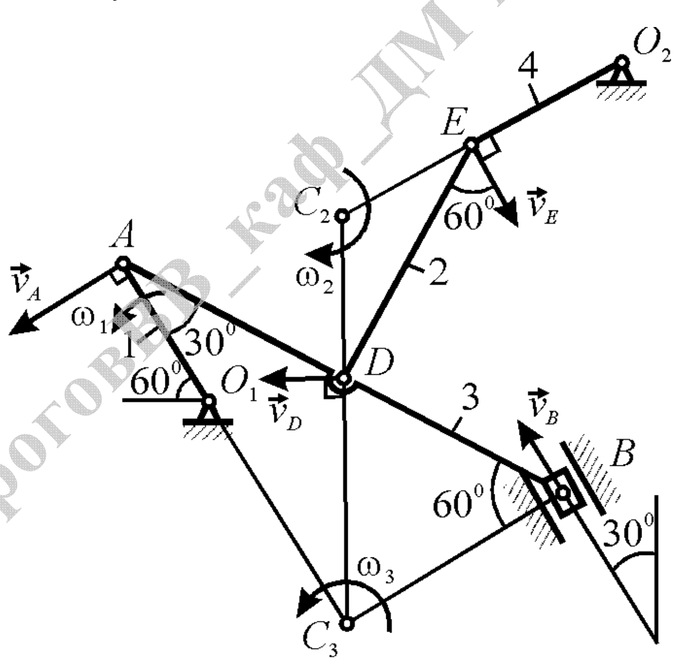


Рис. К3б

Побудову схеми швидкостей розпочнемо з першої ланки механізма (для якої задана кутова швидкість $\omega_1$). Швидкість $\vec{v}_A$ направлена в сторону повороту і так, що $\vec{v}_A \perp O_1A$. Розглядаючи сусідню ланку 3, знайдемо спочатку напрямок швидкості точки *B* (вектор швидкості $\vec{v}_B$ паралельний напрявляючим по яким рухається повзун. Для цього будуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) ланки *AB* – це точка $C_3$, що лежить на перетині перпендикулярів до швидкості $\vec{v}_A$ і напрямній вздовж якої рухається повзун, проведених із точок *A* і *B*. Враховуючи напрямок швидкості $\vec{v}_A$, кутова швидкість обертання ланки 3 $\omega_3$, буде направлена проти ходу стрілки годинника. Вектори $\vec{v}_B$ і $\vec{v}_D$ направлені в сторону повороту ланки *AB*, причому $\vec{v}_D \perp C_3D$.

Розглянемо ланку 2. Так як точка $E$ належить одночасно ланці 4, що обертається навколо $O_2$, то $\vec{v}_E \perp O_2E$ . Тоді, провівши перпендикуляри з точок $E$ і $D$ до швидкостей $\vec{v}_E$ і $\vec{v}_D$, побудуємо МЦШ $C_2$ ланки 2. По напрямку вектора $\vec{v}_D$ визначаємо напрямок повороту ланки 2 навколо центра $C_2$. Вектор $\vec{v}_E$ направлений в сторону поворота цієї ланки.

**2. Знаходимо швидкості**. З рис. К3б отримуємо, що:

$$v_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \ \text{м/с}.$$

Для знаходження швидкості точки $B$ використаємо теорему про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки (пряма $AB$), тоді

$$v_A \cos 60^0 = v_B \cos 30^0 ,$$

звідки

$$v_B = \frac{v_A \cos 60^0}{\cos 30^0} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}866} = 0{,}462 \ \text{м/с}.$$

Величину $v_D$ знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_D}{C_3 D} = \frac{v_B}{C_3 B}. \qquad (1)$$

Знайдемо $C_3D$ і $C_3B$. Розглядаючи $\Delta AC_3B$ знайдемо, що

$$C_3 B = AB \sin 30^0 = 0{,}5 AB = BD = 0{,}7 \ \text{м},$$

$$C_3 A = AB \cos 30^0 = 1{,}4 \cdot 0{,}866 \approx 1{,}21 \ \text{м}.$$

Тоді $\Delta BC_3D$ є рівностороннім трикутником і $C_3B$=$C_3D$. З рівності (1) отримуємо, що $v_D = v_B = 0{,}462$ м/с.

Знайдемо кутову швидкість $\omega_3$:

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{0{,}8}{1{,}21} \approx 0{,}66 \ \text{рад/с}.$$

Величину $v_E$ знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_E}{C_2 E} = \frac{v_D}{C_2 D}. \qquad (2)$$

Знайдемо $C_2D$ і $C_2E$. З рис. К3б видно, що $\angle C_2ED$=$\angle C_2DE$=$30^0$ і

$$C_2 E = C_2 D = 0{,}5 l_2 \ / \cos 30^0 \approx 0{,}693 \ \text{м}.$$

З рівності (2) отримуємо, що $v_E = v_D = 0{,}462$ м/с.

З рис. К3б знайдемо, що

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2 D} = \frac{0{,}462}{0{,}693} \approx 0{,}667 \ \text{рад/с}.$$

**3. Будуємо схему для пришвидшень** (рис. К3в). Так як ланки 2 і 4 не використовуються при проведені розрахунків, то їх на рис. К3в не показано.

Пришвидшення точки *B* ланки 3, яка здійснює плоскопаралельний рух, має вигляд:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}\,. \tag{3}$$

Враховуючи, що точка *B* одночасно належить повзуну, який рухається поступально, вектор $\vec{a}_B$ паралельний направляючим повзуна. Тоді рівність (3) можна подати так:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}\,. \tag{4}$$

Вектор $\vec{a}_A^{n}$ направлений вздовж $AO_1$, $\vec{a}_A^{\tau}$ - перпендикулярно $AO_1$. Зображаємо на кресленні вектори $\vec{a}_{BA}^{n}$ (вздовж *BA* від *B* до *A*) і $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ (в будь-яку сторону перпендикулярно *BA*).

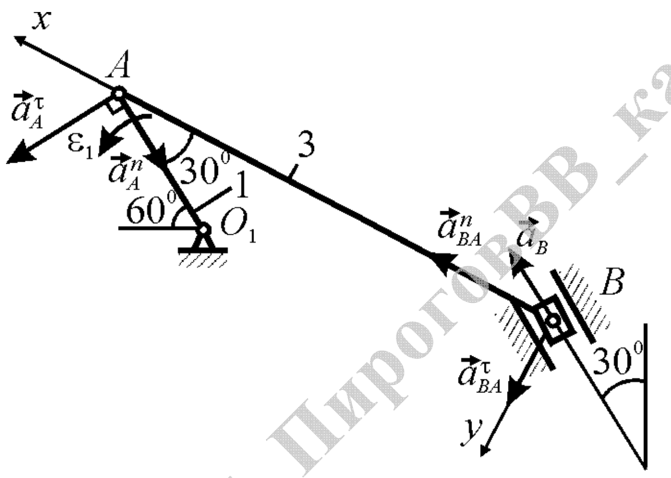



Рис. К3в

**4. Визначаємо пришвидшення точки *B*.** Знайдемо пришвидшення $\vec{a}_A^{\tau}$, $\vec{a}_A^{n}$, $\vec{a}_{BA}^{n}$:

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 7 \cdot 0{,}4 = 2{,}8 \ \text{м/с}^2; \quad a_A^{n} = \omega_1^2 l_1 = 2^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}6 \ \text{м/с}^2;$$

$$a_{BA}^{n} = \omega_3^2 l_3 = 0{,}66^2 \cdot 1{,}4 \approx 0{,}61 \ \text{м/с}^2.$$

Для знаходження невідомих пришвидшень $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ скористаємося методом проекцій. Для цього введемо координатні осі *x* та *y* і спроектуємо на них векторне рівняння (4) (рис. К3в), матимемо:

$$x\colon\ a_B \cos 30^0 = a_A^{\tau} \cos 60^0 - a_A^{n} \cos 30^0 + a_{BA}^{n}\,;$$

$$y\colon\ -a_B \sin 30^0 = a_A^{\tau} \sin 60^0 + a_A^{n} \sin 30^0 + a_{BA}^{\tau}\,. \tag{5}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь (5) відносно невідомих $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^{\tau}$. З першого рівняння системи (5), знайдемо:

$$a_B = \frac{a_A^\tau \cos 60^0 - a_A^n \cos 30^0 + a_{BA}^n}{\cos 30^0} = \frac{2{,}8\cdot 0{,}5 - 1{,}6\cdot 0{,}866 + 0{,}61}{0{,}866} \approx 0{,}72\ м/с^2.$$

Так як $a_B > 0$, то вектор $\vec{a}_B$ направлений так як показано на рис. К3в. Розв'яжемо друге рівняння системи (5), отримаємо:

$$a_{BA}^\tau = -a_B \sin 30^0 - a_A^\tau \sin 60^0 - a_A^n \sin 30^0 =$$
$$= -0{,}72\cdot 0{,}5 - 2{,}8\cdot 0{,}866 - 1{,}6\cdot 0{,}5 \approx -3{,}585\ \text{м/с}^2.$$

Знак "–" вказує, що напрямок $\vec{a}_{BA}^\tau$ протилежний показаному на рис. К3в. З рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ отримаємо:

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^\tau\right|}{l_3} = \frac{3{,}585}{1{,}4} \approx 2{,}56\ \text{рад/с}^2.$$

**Відповідь:** $v_B = 0{,}462$ м/с; $v_E = 0{,}462$ м/с; $\omega_2 = 0{,}667$ рад/с; $a_B = 0{,}72\ м/с^2$; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ рад/с$^2$.

**Примітка.** Якщо точка *B*, пришвидшення якої визначається, рухається не прямолінійно (наприклад, як на рис. К3.0 – К3.4, де точка *B* рухається по колу радіуса $O_2B$), то напрямок $\vec{a}_B$ наперед невідомий. В цьому випадку $\vec{a}_B$ також слід подати двома складовими ($\vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n$) і вихідне рівняння (8) набуде вигляду:

$$\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n\,. \tag{6}$$

При цьому вектор $\vec{a}_B^n$ буде направлений вздовж $BO_2$, а вектор $\vec{a}_B^\tau$ - перпендикулярно $BO_2$ в будь-яку сторону. Числові значення $a_A^\tau$, $a_A^n$ і $a_{BA}^n$ визначаються так, як в розглядуваному прикладі (причому по умові задачі може бути, що $a_A^\tau = 0$ або $a_A^n = 0$, якщо точка *A* рухається прямолінійно).

Значення $a_B^n$ також обчислюється по формулі: $a_B^n = v_B^2/\rho = v_B^2/l$, де $l$ – радіус кола $O_2B$. Після цього в рівності (6) залишаються невідомими тільки значення $a_B^\tau$ і $a_{BA}^\tau$ і вони, як і в розглядуваному прикладі, знаходяться проектуванням обох частин рівності (6) на дві осі. Знайшовши $a_B^\tau$, можемо обчислимо шукане пришвидшення

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}\,.$$

Величина $a_{BA}^\tau$ використовується для знаходження $\varepsilon_{AB}$.

## *Задача К4 – складний рух матеріальної точки*

### 8.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Прямокутна пластина (рис. К4.0 – К4.4) або кругла пластина радіуса $R$=60 см (рис. К4.5 – К4.9) обертається навколо нерухомої осі по закону $\varphi=f_1(t)$, заданному в табл. К4. Додатній напрямок відліку кута φ показано на рисунках дуговою стрілкою. На рис. К4.0 – К4.2, К4.5, К4.6 вісь обертання перпендикулярна площині пластини і проходить через точку $O$ (пластинка обертається в своїй площині); на рис. К4.3, К4.4, К4.7 – К4.9 вісь обертання $OO_1$ лежить в площині пластини (пластина обертається у просторі).

По пластині вздовж прямої $BD$ (рис. К4.0 – К4.4) або по колу радіуса $R$ (рис. К4.5 – К4.9) рухається точка $M$; закон її відносного руху, тобто залежність $s=f_2(t)$ ($s$ виражено в сантиметрах, $t$ – в секундах), заданий в таблиці К4 окремо для рис. К4.0 – К4.4 і для рис. К4.5 – К4.9. На рисунках точка $M$ показана в положені, при якому $s$>0 (при $s$<0 точка $M$ знаходиться по іншу сторону від точки $A$).

***Знайти*:** абсолютну швидкість та абсолютне пришвидшення точки $M$ в момент часу $t_1$=1 с.

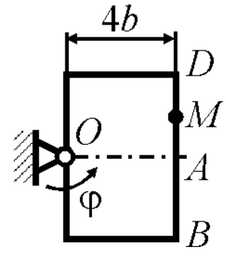


Рис. К4.0

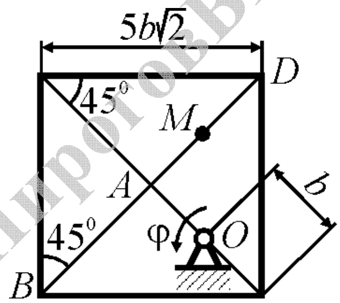


Рис. К4.1

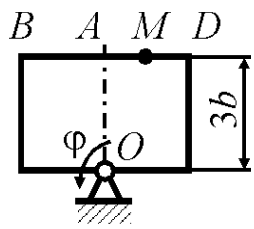


Рис. К4.2

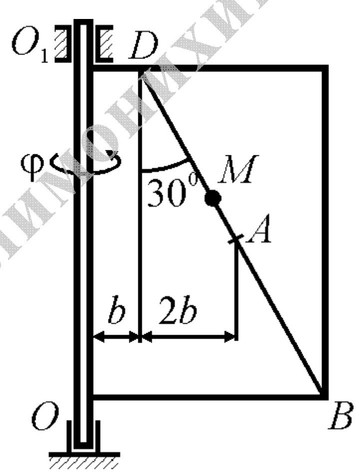


Рис. К4.3

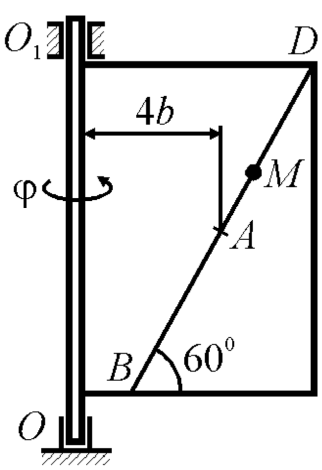


Рис. К4.4

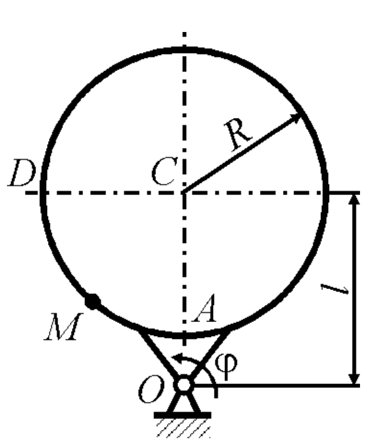


Рис. К4.5

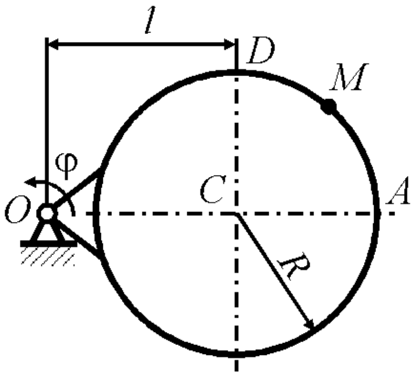



Рис. К4.6

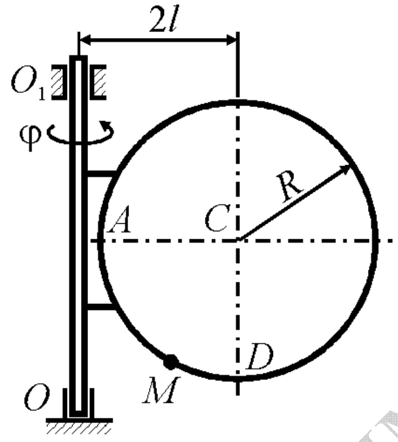



Рис. К4.7

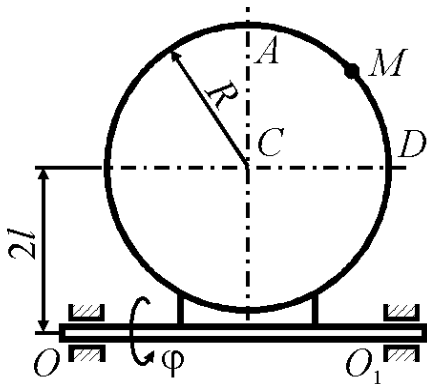



Рис. К4.8

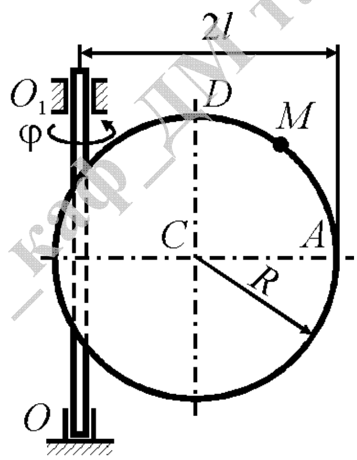



Рис. К4.9

Таблиця К4

| Номер умови | $\varphi = f_1(t)$, рад | Рис. К4.0 – К4.4 | | Рис. К4.5 – К4.9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $b$, см | $s = AM = f_2(t)$, см | $l$, см | $s = \overset{\smile}{AM} = f_2(t)$, см |
| **0** | $4(t^2-t)$ | 12 | $50(3t-t^2)-64$ | $R$ | $\pi R(4t^2-2t^3)/3$ |
| **1** | $3t^2-8t$ | 16 | $40(3t^2-t^4)-32$ | $4R/3$ | $\pi R(2t^2-t^3)/2$ |
| **2** | $6t^3-12t^2$ | 10 | $80(t^2-t)+40$ | $R$ | $\pi R(2t^2-1)/3$ |
| **3** | $t^2-2t^3$ | 16 | $60(t^4-3t^2)+56$ | $R$ | $\pi R(3t-t^2)/6$ |
| **4** | $10t^2-5t^3$ | 8 | $80(2t^2-t^3)-48$ | $R$ | $\pi R(t^3-2t)/3$ |
| **5** | $2(t^2-t)$ | 20 | $60(t^3-2t^2)$ | $R$ | $\pi R(t^3-2t)/6$ |
| **6** | $5t-4t^2$ | 12 | $40(t^2-3t)+32$ | $3R/4$ | $\pi R(t^3-2t^2)/2$ |
| **7** | $15t-3t^3$ | 8 | $60(t-t^3)+24$ | $R$ | $\pi R(t-5t^2)/6$ |
| **8** | $2t^3-11t$ | 10 | $50(t^3-t)-30$ | $R$ | $\pi R(3t^2-t)/3$ |
| **9** | $6t^2-3t^3$ | 20 | $40(t-2t^3)-40$ | $4R/3$ | $\pi R(t-2t^2)/2$ |

ФилимонихинГБ_ПироговВВ_каф_ДМ та ПМ_2014

## 8.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі

Задача К4 – на складний рух точки. Для її розв’язання скористаємося теоремами про складання швидкостей і про складання пришвидшень. Перед тим, як виконувати всі розрахунки, слід по умові задачі визначити, де знаходиться точка $M$ на пластині в момент часу $t_1$=1 с, і показати точку саме в цьому положенні (а не в довільному, яке показане на рисунках до задачі).

У випадках, що відносяться до рис. К4.5 – К4.9, при розв’язанні задачі не підставляти числового значення $R$, поки не буде визначене положення точки $M$ в момент часу $t_1$=1 с і кут між радіусами $CM$ і $CA$ в цей момент.

## 8.3. Приклад розв’язання задачі К4а (складний рух точки у просторі)

**Умова задачі.** Пластинка *KDABE* обертається у просторі навколо нерухомої осі $OO_1$, яка лежить у площині пластинки, за законом $\varphi=f_1(t)$ (додатній напрямок відліку кута $\varphi$ показано на рис. К4а дуговою стрілкою). Відносно пластинки по колу радіуса $R$ рухається точка $M$ за законом $s=f_2(t)$ (додатній напрямок відліку $s$ – від $A$ до $M$).

**Дано:** $R$=0,7 *м*; $\varphi=2t^2-5t$; $s=\breve{AM}=\dfrac{\pi R}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$ ($\varphi$ – в радіанах, $s$ – в метрах, $t$ – в секундах).

**Знайти:** абсолютну швидкість та абсолютне пришвидшення точки $M$ в момент часу $t_1$=1 с.

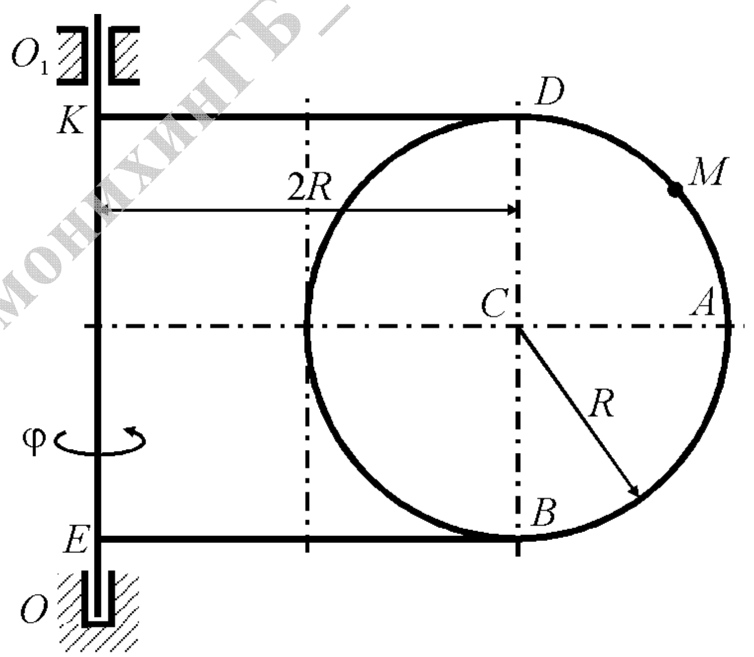



Рис. К4а

## Розв'язок

**1. Визначимо швидкості при відносному і переносному русі точки** *M* (рис. К4б).

Будемо розглядати рух точки *M*, як складний. Тоді рух точки по колу будемо називати відносним рухом (пластинка при цьому умовно нерухома), а рух точки разом з пластинкою – переносним рухом (при цьому точка і пластинка обертаються, як одне жорстке ціле).

Спочатку визначаємо положення точки *M* на траєкторії. При $t_1$ матимемо:

$$s = \frac{\pi R}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi R}{6} > 0 \ \text{м}.$$

Кут $\alpha = \angle ACM = s/R = \pi/6$ (рис. К4б). Так як $s>0$, то відлік $AM$ співпадає із вказаним на рисунку. Покажемо положення точки *M* на траєкторії при $\alpha = \pi/6$ (рис. К4б).

Швидкість точки *M* при її відносному русі має вигляд:

$$v_r = \dot{s} = \left[\frac{\pi R}{3}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]' = -\frac{\pi^2 R}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1$, матимемо

$$v_r = -\frac{(3{,}14)^2 \cdot 0{,}7}{9}\cdot 0{,}866 = -0{,}664 \ \text{м/с}.$$

Знак "–" вказує на те, що вектор $\vec{v}_r$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати $s$ по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі.

Швидкість точки *M* при її переносному русі має вигляд:

$$v_e = \omega r,$$

де

$$\omega = \dot{\varphi} = \left(2t^2 - 5t\right)' = 4t - 5; \quad r = NM = 2R + R\cos\alpha.$$

При $t_1$

$$\omega = 4\cdot 1 - 5 = -1 \ \text{рад/с}; \quad r = 2\cdot 0{,}7 + 0{,}7\cdot 0{,}866 = 2 \ \text{м};$$

$$v_e = |\omega|\cdot r = |-1|\cdot 2 = 2 \ \text{м/с}.$$

Знак "–" вказує на те, що напрямок кутової швидкості ω буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ. Вектор $\vec{v}_e$ перпендикулярний площині пластинки і направлений в сторону кутової швидкості.

**2. Знайдемо абсолютну швидкість точки** *M*. Абсолютна швидкість точки *M* має вигляд:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r .$$

Так як вектори $\vec{v}_e$ і $\vec{v}_r$ взаємно перпендикулярні, то тоді

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{2^2 + (-0{,}664)^2} = 2{,}1 \ \text{м/с}.$$

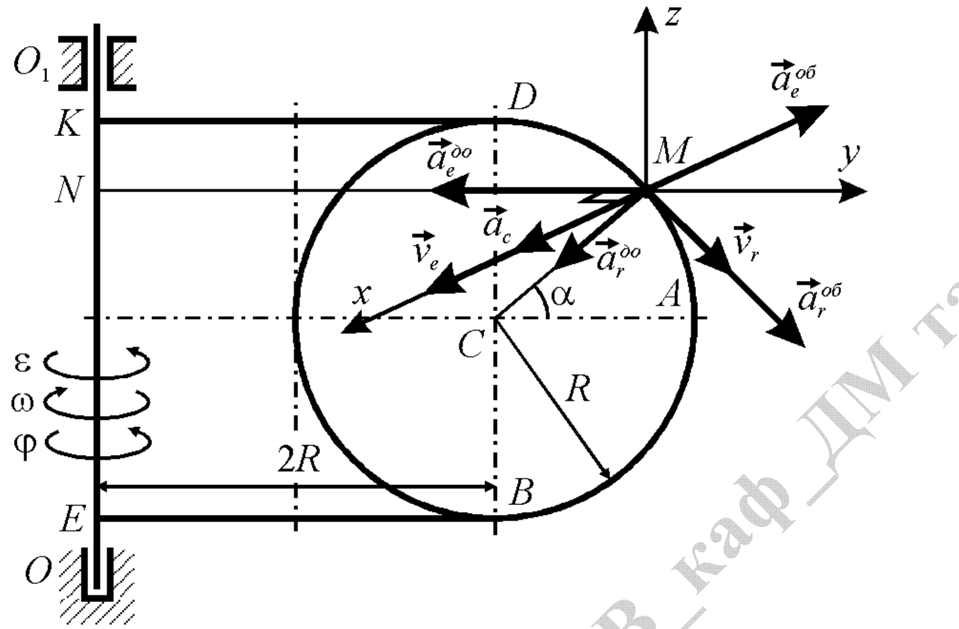



Рис. К4б

**3. Визначимо пришвидшення переносного і відносного руху точки** $M$ та пришвидшення Коріоліса. Так як у відносному русі точка $M$ здійснює рух по колу (рис. К4б), то її пришвидшення при відносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{об} + \vec{a}_r^{до},$$

де

$$a_r^{об} = \dot{v}_r = \left[ -\frac{\pi^2 R}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^3 R}{27} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \ a_r^{до} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\pi^4 R}{81} \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1$, матимемо

$$a_r^{об} = -\frac{(3{,}14)^3 \cdot 0{,}7}{27} \cdot 0{,}5 = -0{,}4 \ \text{м/с}^2; \ a_r^{до} = \frac{(3{,}14)^4 \cdot 0{,}7}{81} \cdot 0{,}866^2 = 0{,}63 \ \text{м/с}^2.$$

Знак “–” вказує на те, що вектор $\vec{a}_r^{об}$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати $s$ по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі; вектор $\vec{a}_r^{до}$ направлений до центра $C$ кола.

Пришвидшення точки $M$ при її переносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_e = a_e^{до} + a_e^{об},$$

де

$$a_e^{до} = \omega^2 r; \ \ a_e^{об} = \varepsilon r; \ \ \varepsilon = \dot{\omega} = (4t - 5)' = 4 \ \text{рад/с}.$$

Напрямок кутового пришвидшення ε співпадає з напрямком додатнього відліку кута φ. При $t_1$

$$a_e^{до} = (-1)^2 \cdot 2 = 2 \ м/с^2; \ \ a_e^{об} = 4 \cdot 2 = 8 \ м/с^2.$$

Вектор пришвидшення $\vec{a}_e^{до}$ направлений по прямій $MN$ до осі обертання, а вектор $\vec{a}_e^{об}$ – перпендикулярно площині пластинки і в сторону кутового пришвидшення.

Знайдемо пришвидшення Коріоліса. Так як кут між вектором $\vec{v}_r$ і віссю обертання (вектором $\vec{\omega}$) рівний $30^0$, то пришвидшення Коріоліса в момент часу $t_1$ дорівнюватиме:

$$a_c = 2 \cdot |v_r| \cdot |\omega| \cdot \sin 30^0 = 2 \cdot |-0{,}664| \cdot |-1| \cdot 0{,}5 = 0{,}664 \ м/с^2.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_c$ знайдемо використовуючи правило Жуковського. Для цього вектор $\vec{v}_r$ спроектуємо на площину перпендикулярну осі обертання (проекція буде направлена протилежно вектору $\vec{a}_e^{до}$) і потім цю проекцію повертаємо на кут $90^0$ в сторону ω, тобто за ходом стрілки годинника; в результаті отримаємо напрямок вектора пришвидшення Коріоліса. Вектор $\vec{a}_c$ направлений так само, як і вектор $\vec{v}_e$.

**4. Знайдемо абсолютне пришвидшення точки** $M$ при її складному русі. За теоремою Коріоліса абсолютне пришвидшення точки $M$ має вигляд:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{об} + \vec{a}_e^{до} + \vec{a}_r^{об} + \vec{a}_r^{до} + \vec{a}_c .$$

Для визначення абсолютного пришвидшення проведемо координатні осі $Mxyz$ і обчислимо його проекції на ці осі:

$$a_{ax} = a_c - a_e^{об} = 0{,}664 - 8 = -7{,}336 \ м/с^2;$$

$$a_{ay} = |a_r^{об}| \sin 30^0 - a_r^{до} \cos 30^0 - a_e^{до} = |-0{,}4| \cdot 0{,}5 - 0{,}63 \cdot 0{,}866 - 2 = -2{,}34 \ м/с^2;$$

$$a_{az} = -|a_r^{об}| \cdot \cos 30^0 - a_r^{до} = -|-0{,}4| \cdot 0{,}866 - 0{,}63 = -0{,}976 \ м/с^2.$$

Остаточно

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{(-7{,}336)^2 + (-2{,}34)^2 + (-0{,}976)^2} = 7{,}76 \ м/с^2.$$

**Відповідь:** $v_a = 2{,}1 \ м/с, \ a_a = 7{,}76 \ м/с^2$.

## 8.4. Приклад розв'язання задачі К4б (складний рух точки у площині)

**Умова задачі.** Пластинка *ODAB* обертається навколо осі, що проходить через точку *O* перпендикулярно площині пластинки, за законом $\varphi=f_1(t)$ (додатній напрямок відліку кута φ показано на рис. К4в дуговою стрілкою). Відносно пластинки по колу радіуса *R* рухається точка *M* за законом $s=f_2(t)$ (додатній напрямок відліку *s* – від *A* до *M*).

**Дано:** $R$=0,5 *м*; $\varphi=t^2-0{,}5t^3$; $s = \overset{\smile}{AM} = \pi R\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$ (φ – в радіанах, *s* – в метрах, *t* – в секундах).

**Знайти:** абсолютну швидкість та абсолютне пришвидшення точки *M* в момент часу $t_1$=2 с.

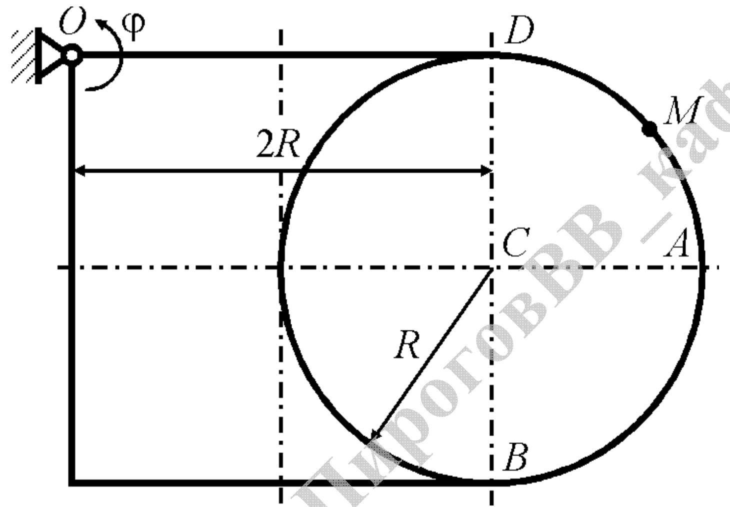



Рис. К4в

**Розв'язок**

**1. Визначимо швидкості при відносному і переносному русі точки** *M* (рис. К4г).

Будемо розглядати рух точки *M*, як складний. Тоді рух точки по колу будемо називати відносним рухом (пластинка при цьому умовно нерухома), а рух точки разом з пластинкою – переносним рухом (при цьому точка і пластинка обертаються, як одне жорстке ціле).

Спочатку визначаємо положення точки *M* на траєкторії. При $t_1$ матимемо:

$$s = \pi R\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi R}{2} < 0 \ \text{м}.$$

Кут $\alpha=\angle ACM=s/R=-\pi/2$ (рис. К4г). Так як $s<0$, то точка *M* буде розташована по інший бік від точки *A* (рис. К4г). Покажемо положення точки *M* на траєкторії при $\alpha=-\pi/2$ (рис. К4г).

Швидкість точки $M$ при її відносному русі має вигляд:

$$v_r = \dot{s} = \left[\pi R\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]' = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1$, матимемо

$$v_r = -\frac{(3{,}14)^2\cdot 0{,}5}{3}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\approx -1{,}42\ \text{м/с}.$$

Знак "–" вказує на те, що вектор $\vec{v}_r$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати $s$ по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі.

Швидкість точки М при її переносному русі має вигляд:

$$v_e = \omega r\ ,$$

де

$$\omega = \dot{\varphi} = (t^2 - 0{,}5t^3)' = 2t - 1{,}5t^2;\quad r = OM = 2R\sqrt{2}\ .$$

При $t_1$

$$\omega = 2\cdot 2 - 1{,}5\cdot 2^2 = -2\ \text{рад/с};\quad r = 2\cdot 0{,}5\sqrt{2}\approx 1{,}414\ \text{м};$$

$$v_e = |\omega|\cdot r = |-2|\cdot 1{,}414\approx 2{,}83\ \text{м/с}.$$

Знак "–" вказує на те, що напрямок кутової швидкості ω буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ. Вектор $\vec{v}_e$ направлений в сторону кутової швидкості і так, що $\vec{v}_e \perp OM_1$.

**2. Знайдемо абсолютну швидкість точки** $M$. Абсолютна швидкість точки $M$ має вигляд:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r\ .$$

Для визначення абсолютної швидкості $\vec{v}_a$ проведемо координатні осі $Mxy$ і обчислимо його проекції на ці осі:

$$v_{ax} = -|v_e|\cos 45^0 = -2{,}83\cdot 0{,}707 = -2\ \text{м/с};$$

$$v_{ay} = |v_r| + |v_e|\cos 45^0 = 1{,}42 + 2{,}83\cdot 0{,}707 = 3{,}42\ \text{м/с}^2.$$

Остаточно

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3{,}42^2} = 3{,}96\ \text{м/с}^2.$$

**3. Визначимо пришвидшення переносного і відносного руху точки** $M$ та пришвидшення Коріоліса.

Так як у відносному русі точка $M$ здійснює рух по колу (рис. К4г), то її пришвидшення у відносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,об} + \vec{a}_r^{\,до}\ ,$$

де

$$a_r^{об} = \dot{v}_r = \left[-\frac{\pi^2 R}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]' = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right),\ a_r^{до} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\pi^4 R}{9}\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1$, матимемо

$$a_r^{об} = -\frac{(3{,}14)^3 \cdot 0{,}5}{9}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0{,}86\ м/с^2;$$

$$a_r^{до} = \frac{(3{,}14)^4 \cdot 0{,}5}{9}\cdot 0{,}866^2 \approx 4{,}06\ м/с^2.$$

Знак "+" вказує на те, що вектор $\vec{a}_r^{об}$ направлений в сторону зміни дугової координати $s$ по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі; вектор $\vec{a}_r^{до}$ направлений до центра $C$ кола.

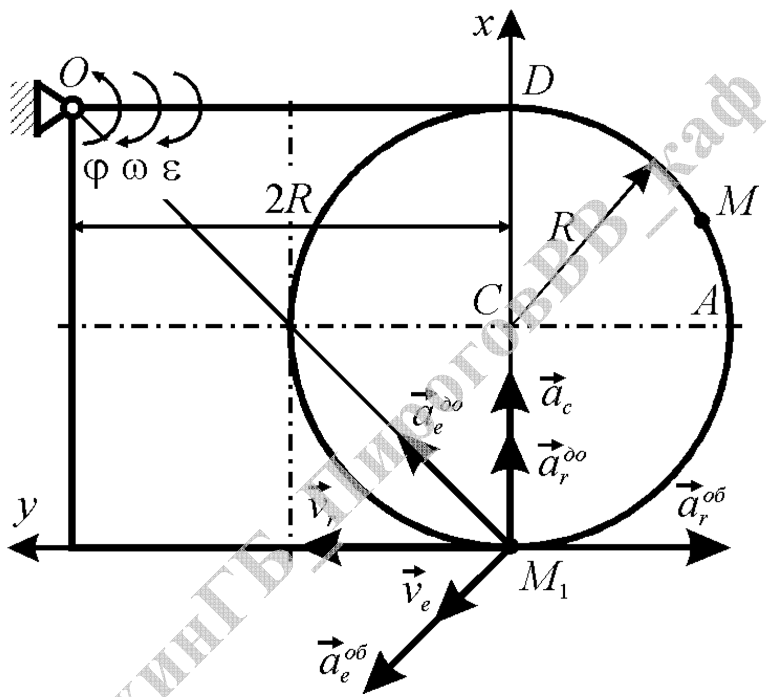



Рис. К4г

Пришвидшення точки $M$ при її переносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_e = a_e^{до} + a_e^{об},$$

де

$$a_e^{до} = \omega^2 r;\ \ a_e^{об} = |\varepsilon| r;\ \ \varepsilon = \dot{\omega} = \left(2t - 1{,}5t^2\right)' = 2 - 3t.$$

При $t_1$

$$\varepsilon = 2 - 3\cdot 2 = -4\ рад/с^2;\ \ a_e^{до} = (-2)^2\cdot 1{,}414 = 5{,}656\ м/с^2;$$

$$a_e^{об} = 4\cdot 1{,}414 = 5{,}656\ м/с^2.$$

Знак "–" вказує на те, що напрямок кутового пришвидшення ε буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ.

Вектор пришвидшення $\vec{a}_e^{\,до}$ направлений по прямій $OM_1$ до центра обертання – точки $O$, а вектор $\vec{a}_e^{\,об}$ направлений в сторону кутового пришвидшення і так, що $\vec{a}_e^{\,об} \perp OM_1$.

Знайдемо пришвидшення Коріоліса. Так як кут між вектором $\vec{v}_r$ і віссю обертання (вектором $\vec{\omega}$) рівний $90^0$, то пришвидшення Коріоліса в момент часу $t_1$ дорівнюватиме:

$$a_c = 2\cdot\left|v_r\right|\cdot\left|\omega\right|\cdot\sin 90^0 = 2\cdot\left|-1{,}42\right|\cdot\left|-2\right| = 5{,}68 \ м/с^2.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_c$ знайдемо використовуючи правило Жуковського. Так як вектор $\vec{v}_r$ знаходиться в площині перпендикулярній осі обертання, то повернемо його на кут $90^0$ в сторону $\omega$, тобто за ходом стрілки годинника; в результаті отримаємо напрямок вектора пришвидшення Коріоліса. Вектор $\vec{a}_c$ направлений так само, як і вектор $\vec{a}_r^{\,до}$.

**4. Знайдемо абсолютне пришвидшення точки** $M$ при її складному русі. За теоремою Коріоліса абсолютне пришвидшення точки $M$ має вигляд:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{\,об} + \vec{a}_e^{\,до} + \vec{a}_r^{\,об} + \vec{a}_r^{\,до} + \vec{a}_c \,.$$

Для визначення абсолютного пришвидшення $\vec{a}_a$ проведемо кординатні осі $Mxyz$ і визначимо його проекції на ці осі:

$$a_{ax} = a_r^{до} + a_c + a_e^{до}\cos 45^0 - a_e^{об}\cos 45^0 =$$
$$= 4{,}06 + 5{,}68 + 5{,}656\cdot 0{,}707 - 5{,}656\cdot 0{,}707 = 9{,}74 \ м/с^2;$$
$$a_{ay} = a_e^{до}\cos 45^0 + a_e^{об}\cos 45^0 - a_r^{об} =$$
$$= 5{,}656\cdot 0{,}707 + 5{,}656\cdot 0{,}707 - 0{,}86 \approx 7{,}14 \ м/с^2.$$

Остаточно

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{9{,}74^2 + 7{,}14^2} \approx 12{,}08 \ м/с^2.$$

**Відповідь:** $v_a = 3{,}96 \ м/с, \ a_a = 12{,}08 \ м/с^2.$

# Література


1. *Кільчевський М. О.* **Курс теоретичної механіки**. – Т. 1–2. – К., 1955–1957.
2. *Павловський М.А.* **Теоретична механіка: Підручник** / Павловський М.А. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
3. *Філімоніхін Г.Б.* **Теоретична механіка. Статика. Навчальний посібник.** – Кіровоград.: КНТУ, -2010. 115 с.
4. *Філімоніхін Г.Б.* **Теоретична механіка. Кінематика. Навчальний посібник.** – Кіровоград.: КНТУ, -2011. 68 с.
5. *Філімоніхін Г.Б.* **Теоретична механіка. Динаміка. Навчальний посібник.** – Кіровоград.: ПП "КОД", -2000. 111 с.
6. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / Под ред. С.М.Тарга – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. – 111 с.
7. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* **Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. –** К.: "Радянська школа", - 1955. 391 с.
8. *Мещерский И.В.* **Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. –** М., 1986 (и пред. изд.)
9. *Г.Б.Філімоніхін* Методичні вказівки і завдання до курсової роботи з теоретичної механіки (розділ "Динаміка"). –К: "ВІПОЛ", 1993. 31 с., іл.
10. *Бертяев В.Д.* **Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум** /В.Д. Бертяев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. –752 с.

# Практикум з теоретичної механіки. Статика. Кінематика.

## Навчальний посібник

д.т.н., проф. Геннадій Борисович Філімоніхін,
к.ф.-м.н., ст. викл. Володимир Васильович Пирогов



Комп'ютерний набір
кафедра ДМ та ПМ
т. (0522) 390-547

Підп. до друку 18.12.2014 Формат 60x84 1/16 (А5). Папір друк №3. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. Ум.фарбо-відб. 3,33 Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.
Зам.№

Кіровоградський національний технічний університет
25006, м. Кіровоград. пр. Університетський, 8