Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний технологічний університет

Методичні вказівки
та варіанти завдань до теми

ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В ЕКОНОМІЦІ

для студентів I курсу економічних спеціальностей

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол №6
від 31.01.2005 р.

Житомир – 2005

Методичні вказівки та варіанти завдань до теми «Застосування лінійної алгебри в економіці». – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 24 с.

Укладач: Коваль Валерій Олександрович.

Тираж 400 примірників

Житомир, РВВ ЖДТУ, 2005

1. Матриці та дії над ними

Матрицею розміру $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел, в якій m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо конкретний вигляд елементів a_{ij} (i – номер рядка, j – номер стовпця) матриці A несуттєвий, то використовують простіший запис – $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$.

Матриці можна множити на числа; матриці однакового розміру можна додавати та віднімати. Розглянемо складнішу операцію множення матриць: *добутком* матриць $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times k}$ та $B = \left(b_{ij}\right)_{k \times n}$ називають матрицю $C = \left(c_{ij}\right)_{m \times n}$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Позначення: $C = AB$. В загальному випадку $AB \neq BA$.

Матрицю A^T розміру $n \times m$ називають *транспонованою* до матриці A розміру $m \times n$, якщо їх відповідні рядки і стовпці співпадають.

Задача 1. Підприємство виготовляє n типів виробів, використовуючи m видів сировини. Норми витрат a_{ij} сировини i-го виду для виробництва одиниці продукції j-го типу задані матрицею витрат $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$. План випуску виробів кожного типу задано матрицею B розміру $1 \times n$. Вартість одиниці сировини кожного виду в грошових одиницях (гр.од.) задано матрицею P розміру $1 \times m$. Знайти: а) матрицю C витрат сировини при заданому плані випуску виробів; б) загальну вартість S необхідної сировини.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 30 & 50 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Р о з в’я з а н н я.

а) $C = AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 30 + 3\cdot 50 \\ 4\cdot 30 + 1\cdot 50 \\ 5\cdot 30 + 3\cdot 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 170 \\ 300 \end{pmatrix}$,

тобто при заданому плані випуску $B = \ 30 \quad 50$ потрібно 210 од. сировини 1-го виду, 170 од. – 2-го виду і 300 од. – 3-го виду.

б) $S = PC = \ 10 \quad 12 \quad 8 \ \begin{pmatrix} 210 \\ 170 \\ 300 \end{pmatrix} = 10\cdot 210 + 12\cdot 170 + 8\cdot 300 = 6540$ (гр.од.).

Завдання для самостійної роботи

Знайти $C = AB^T$ та $S = PC$, якщо:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \ 10 \quad 20 \quad 15$, $P = \ 5 \quad 2$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \ 35 \quad 20$, $P = \ 7 \quad 10 \quad 6$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \ 30 \quad 15 \quad 20$, $P = \ 3 \quad 4$.

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \ 40 \quad 25$, $P = \ 8 \quad 6 \quad 10$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \ 25 \quad 30 \quad 35$, $P = \ 2 \quad 3$.

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \ 20 \quad 40$, $P = \ 6 \quad 5 \quad 7$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \ 40 \quad 35 \quad 30$, $P = \ 5 \quad 4$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \ 30 \quad 45$, $P = \ 8 \quad 5 \quad 3$.

9. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}25 & 40 & 30\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}20 & 25\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

2. Системи лінійних рівнянь

Система m *лінійних рівнянь з* n *невідомими* $x_1, x_2, ..., x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

де a_{ij} та b_j – довільні задані числа, які називають відповідно *коефіцієнтами при невідомих* та *вільними членами*. Універсальним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є *метод Гаусса*, який ще називають *методом послідовного виключення невідомих*. Використовуючи цей метод, доцільно виписати розширену матрицю $A|B$ системи (1), де A – матриця коефіцієнтів при невідомих, B – стовпець вільних членів. Далі матрицю $A|B$ з допомогою елементарних перетворень над її рядками зводять до матриці східчастого вигляду. За одержаною матрицею виписують систему рівнянь (рівносильну заданій) і розв'язують її, починаючи з останнього невідомого.

Задача 2. Швейна фабрика на протязі трьох днів виготовляла плащі, костюми і куртки. Відомі об'єми випуску продукції за три дні та грошові витрати на виробництво за ці дні:

День	Об'єм випуску продукції (одиниць)			Витрати (гр. од.)
	плащі	костюми	куртки	
Перший	25	35	20	16800
Другий	10	50	30	17600
Третій	20	40	30	18400

Знайти собівартість одиниці продукції кожного виду.

Р о з в ’ я з а н н я. Позначимо через x_1, x_2, x_3 відповідно собівартість плаща, костюма та куртки. Згідно поданої таблиці складемо систему рівнянь для знаходження невідомих x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} 25x_1 + 35x_2 + 20x_3 = 16800 \\ 10x_1 + 50x_2 + 30x_3 = 17600 \\ 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 = 18400. \end{cases}$$

Розв’яжемо дану систему методом Гаусса. Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над нею потрібні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 35 & 20 & 16800 \\ 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 20 & 40 & 30 & 18400 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 25 & 35 & 20 & 16800 \\ 20 & 40 & 30 & 18400 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 0 & -90 & -55 & -27200 \\ 0 & -60 & -30 & -16800 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 0 & 2 & 1 & 560 \\ 0 & -90 & -55 & -27200 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 0 & 2 & 1 & 560 \\ 0 & 0 & -10 & -2000 \end{array}\right).$$

За отриманою розширеною матрицею випишемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10x_1 + 50x_2 + 30x_3 = 17600 \\ \qquad 2x_2 + x_3 = 560 \\ \qquad\qquad -10x_3 = -2000. \end{cases}$$

З останнього рівняння цієї системи знаходимо, що $x_3 = 200$; з другого – $x_2 = \frac{1}{2}\ 560 - x_3 = \frac{1}{2}\ 560 - 200 = 180$; з першого – $x_1 = \frac{1}{10}\ 17600 - 50x_2 - 30x_3 = \frac{1}{10}\ 17600 - 50 \cdot 180 - 30 \cdot 200 = 260$.

Отже собівартість плаща становить 260 гр. од., костюма – 180 гр. од., куртки – 200 гр. од.

Завдання для самостійної роботи

Підприємство виготовляє три види продукції $П_1$, $П_2$, $П_3$, використовуючи три види сировини C_1, C_2, C_3. Необхідні характеристики виробництва подані у таблиці. Знайти об'єм випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини.

1.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	Π_1	Π_2	Π_3	
C_1	3	5	4	2700
C_2	1	2	1	800
C_3	2	3	2	1600

2.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	Π_1	Π_2	Π_3	
C_1	5	6	4	2400
C_2	1	4	3	1450
C_3	3	5	2	1550

3.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	Π_1	Π_2	Π_3	
C_1	2	3	1	800
C_2	4	2	3	1300
C_3	1	3	4	900

4.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	Π_1	Π_2	Π_3	
C_1	3	1	2	900
C_2	1	2	4	800
C_3	2	2	3	900

5.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
C_1	3	2	4	1100
C_2	1	3	5	1200
C_3	4	2	1	900

6.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
C_1	4	2	1	900
C_2	2	3	2	1000
C_3	6	1	4	1200

7.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
C_1	4	3	2	1100
C_2	2	5	3	1300
C_3	2	1	2	700

8.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
C_1	4	3	3	1300
C_2	2	2	4	1200
C_3	1	3	2	800

9.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
C_1	3	2	2	1200
C_2	4	1	2	1300
C_3	1	5	3	1300

10.

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції (у вагових одиницях)			Запаси сировини (ваг. од.)
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
C_1	4	3	2	1100
C_2	2	1	3	700
C_3	8	2	1	1500

Задача 3. На двох пунктах відправлення $П_1$ і $П_2$ зосереджено відповідно 350 і 150 одиниць деякої продукції, яку потрібно відправити двом споживачам C_1 і C_2. Споживачі потребують відповідно 200 і 300 одиниць цієї продукції. Відомі витрати на перевезення одиниці продукції з пункту $П_i$ $i = 1, 2$ до споживача C_j $j = 1, 2$, які подані у таблиці.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	15	20
$П_2$	8	25

Потрібно скласти план перевезень так, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною.

Р о з в’я з а н н я. Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 кількість одиниць продукції, яку слід перевезти відповідно від $П_1$ до C_1, від $П_1$ до C_2, від $П_2$ до C_1 і від $П_2$ до C_2. Згідно умови задачі повинні виконуватись рівності:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 350 \\ x_3 + x_4 = 150 \\ x_1 + x_3 = 200 \\ x_2 + x_4 = 300. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв’яжемо дану систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

За отриманою розширеною матрицею випишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 350 \\ -x_2 + x_3 = -150 \\ x_3 + x_4 = 150. \end{cases}$$

Невідомому x_4 можемо надати будь-якого числового значення c: $x_4 = c$. Тоді з рівнянь системи, починаючи з останнього, послідовно знаходимо: $x_3 = 150 - c$, $x_2 = 300 - c$, $x_1 = 50 + c$. Отже розв’язок системи (2) має вигляд: $x_1 = 50 + c$, $x_2 = 300 - c$, $x_3 = 150 - c$, $x_4 = c$, де по змісту задачі c – довільне число, яке лежить в межах від нуля до 150.

Загальна вартість S перевезень згідно поданої в умові задачі таблиці буде становити

$$S = 15 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 25 \cdot x_4 = 15\ \ 50 + c\ \ + 20\ \ 300 - c\ \ +$$
$$+8\ \ 150 - c\ \ + 25 \cdot c = 7950 + 12c \text{ (гр.од.).}$$

Мінімальне значення цієї суми дістанемо при $c = 0$. Отже від $П_1$ до C_1 потрібно перевезти 50 од. продукції, від $П_1$ до C_2 – 300 од. і від $П_2$ до C_1 – 150 од. При цьому вартість перевезень (мінімальна) складе 7950 гр.од.

Завдання для самостійної роботи

На двох пунктах відправлення $П_1$ і $П_2$ зосереджено відповідно a_1 і a_2 одиниць деякої продукції, яку потрібно відправити двом споживачам C_1 і C_2. Споживачі потребують відповідно b_1 і b_2 одиниць цієї продукції. Витрати на перевезення одиниці продукції з пунктів відправлення до споживачів подані у таблиці. Скласти план перевезень, при якому загальна вартість перевезень буде мінімальною.

1. $a_1 = 150$, $a_2 = 250$; $b_1 = 180$, $b_2 = 220$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	12	8
$П_2$	9	10

2. $a_1 = 300$, $a_2 = 200$; $b_1 = 210$, $b_2 = 290$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	10	13
$П_2$	12	11

3. $a_1 = 170$, $a_2 = 230$; $b_1 = 210$, $b_2 = 190$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	14	10
$П_2$	12	16

4. $a_1 = 240$, $a_2 = 260$; $b_1 = 320$, $b_2 = 180$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	11	12
$П_2$	14	9

5. $a_1 = 220$, $a_2 = 280$; $b_1 = 240$, $b_2 = 260$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	15	9
$П_2$	16	20

6. $a_1 = 270$, $a_2 = 130$; $b_1 = 160$, $b_2 = 240$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	9	14
$П_2$	18	10

7. $a_1 = 200$, $a_2 = 300$; $b_1 = 240$, $b_2 = 260$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	13	7
$П_2$	10	12

8. $a_1 = 140$, $a_2 = 260$; $b_1 = 150$, $b_2 = 250$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	8	13
$П_2$	11	9

9. $a_1 = 270$, $a_2 = 230$; $b_1 = 200$, $b_2 = 300$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	12	10
$П_2$	7	13

10. $a_1 = 210$, $a_2 = 190$; $b_1 = 130$, $b_2 = 270$.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (гр. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	14	16
$П_2$	12	8

3. Лінійна модель обміну

Лінійна модель обміну (*модель міжнародної торгівлі*) дає можливість знайти співвідношення національних бюджетів країн для збалансованої торгівлі. Нехай є n країн, бюджети яких відповідно $x_1, x_2, ..., x_n$ витрачаються на закупку товарів всередині країни або із зовні (торговий бюджет). Позначимо через a_{ij} частку бюджету j-ї країни, яка витрачається на закупку товарів у i-ї країни. Матрицю $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ називають *структурною матрицею торгівлі*. Її елементи повинні задовольняти умову

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Для збалансованої торгівлі потрібно знайти вектор-стовпець $X = \left(x_1\ x_2 ...\ x_n\right)^T$, при якому

$$\left(A - E\right)X = 0, \qquad (3)$$

де E – одинична матриця розміру $n \times n$. (3) – однорідна система лінійних рівнянь, причому її визначник $|A - E| = 0$. Тому вона має ненульовий розв'язок X.

Задача 4. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Знайти співвідношення бюджетів x_1, x_2, x_3 цих країн для збалансованої торгівлі.

Р о з в'я з а н н я. В даному прикладі рівняння (3) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 0,2-1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4-1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

або

$$\begin{cases} -0,8x_1+0,3x_2+0,2x_3=0 \\ 0,6x_1-0,6x_2+0,6x_3=0 \\ 0,2x_1+0,3x_2-0,8x_3=0. \end{cases}$$

Розв'язуємо дану систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & -0,6 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 \\ 0 & 0,5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ -0,5x_2+x_3=0, \end{cases}$$

$x_3=c$, $x_2=2c$, $x_1=c$, де c – довільне число.

Отже система (4) має розв'язок $x_1=c$, $x_2=2c$, $x_3=c$. Звідси випливає, що для збалансованої торгівлі між цими країнами їх бюджети повинні задовольняти співвідношення $1:2:1$.

Завдання для самостійної роботи

Відома структурна матриця A торгівлі трьох країн. Потрібно знайти співвідношення бюджетів цих країн для збалансованої торгівлі.

1.
$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,2\\ 0,4 & 0,5 & 0,7\\ 0,3 & 0,1 & 0,1\end{pmatrix}$$

2.
$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,3 & 0,8\\ 0,6 & 0,1 & 0,1\\ 0,1 & 0,6 & 0,1\end{pmatrix}$$

3.
$$A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,3 & 0,5\\ 0,3 & 0,4 & 0,1\\ 0,1 & 0,3 & 0,4\end{pmatrix}$$

4.
$$A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,3 & 0,6\\ 0,4 & 0,3 & 0,1\\ 0,1 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}$$

5.
$$A=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3 & 0,4\\ 0,2 & 0,5 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}$$

6.
$$A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,3 & 0,2\\ 0,1 & 0,4 & 0,3\\ 0,5 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}$$

7.
$$A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,1 & 0,2\\ 0,3 & 0,6 & 0,4\\ 0,2 & 0,3 & 0,4\end{pmatrix}$$

8.
$$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,2 & 0,5\\ 0,8 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,6 & 0,1\end{pmatrix}$$

9.
$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,2\\ 0,4 & 0 & 0,7\\ 0,3 & 0,9 & 0,1\end{pmatrix}$$

10.
$$A=\begin{pmatrix}0 & 0,3 & 0,5\\ 0,5 & 0,6 & 0,3\\ 0,5 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}$$

4. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

Модель Леонтьєва є математичною моделлю міжгалузевого балансу багатогалузевої виробничої сфери господарства.

Нехай виробнича сфера складається з n галузей і розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад, за рік). Введемо наступні позначення:

x_i – об'єм *загального* (*валового*) *продукту* i-ї галузі $i=1,2,...,n$;

x_{ij} – об'єм продукції i-ї галузі, який споживається j-ю галуззю при виробництві свого валового продукту x_j $i,j=1,2,...,n$;

y_i – об'єм продукції i-ї галузі $i=1,2,...,n$, який призначений для невиробничої сфери (*кінцевий продукт*).

Співвідношення балансу записуються у вигляді

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \ , \ i = 1, 2, ..., n \,. \tag{5}$$

Так як продукція різних галузей має різні виміри, то зручно вважати, що всі величини в рівностях (5) мають вартісне вираження.

Важливу роль у балансовому аналізі відіграють *коефіцієнти прямих витрат* (*виробничі коефіцієнти*)

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad i, j = 1, 2, ..., n \ , \tag{6}$$

які показують витрати (у вартісному вираженні) продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі. Важливим є те, що протягом тривалого часу коефіцієнти a_{ij} залишаються сталими або змінюються несуттєво. Це пов'язано з тим, що вони залежать від технології виробництва, яка досить тривалий час залишається на одному і тому ж рівні. З урахуванням (6) співвідношення (5) наберуть вигляду

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \ , \ i = 1, 2, ..., n \,. \tag{7}$$

Покладемо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де X – *вектор валового продукту*; Y – *вектор кінцевого продукту*; A – *матриця прямих витрат*. Тоді (7) можемо записати у матричній формі

$$X = AX + Y \,. \tag{8}$$

Співвідношення (8) називають *моделлю Леонтьєва* багатогалузевої економіки.

Модель (8) використовується для двох цілей. По-перше, вона дає можливість за відомим вектором валового продукту X знайти вектор кінцевого продукту Y:

$$Y = \ E - A \ X \ , \tag{9}$$

де E – одинична матриця розміру $n \times n$.

По-друге, модель (8) дає можливість за відомим вектором кінцевого продукту Y знайти вектор валового продукту X. Це – *основна задача міжгалузевого балансу*. З формальної точки зору, якщо матриця $E-A$ невироджена (тобто її визначник $|E-A| \neq 0$), то використовуючи матричний метод розв’язання систем лінійних рівнянь, розв’язок X рівняння (8) знайдемо за формулою

$$X = \; E-A \;^{-1} Y , \qquad (10)$$

де $\; E-A \;^{-1}$ – обернена матриця до матриці $E-A$. Але по змісту задачі елементи матриці A та вектор-стовпців X, Y повинні бути невід’ємними (позначення: $A \geq 0$, $X \geq 0$, $Y \geq 0$). Тому доцільно виділити певний клас матриць.

Означення. Матрицю $A \geq 0$ називають *продуктивною*, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв’язок $X \geq 0$ рівняння (8).

В цьому випадку і модель Леонтьєва називають продуктивною. Таким чином, якщо матриця A – продуктивна, то основна задача міжгалузевого балансу має розв’язок, який знаходиться за формулою (10).

Наведемо просту умову продуктивності матриці: матриця $A \geq 0$ продуктивна, якщо сума елементів будь-якого її стовпця не перевищує одиницю, причому хоча б для одного стовпця ця сума строго менше одиниці.

Матрицю $S = \; E-A \;^{-1}$ називають *матрицею повних витрат*. Її елементи s_{ij} показують величину валового продукту i-ї галузі, яка потрібна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-ї галузі.

Задача 5. В таблиці наведено дані про роботу трьох галузей промисловості за певний період. 1) Знайти матрицю прямих витрат і визначити, чи є вона продуктивною. 2) Знайти кінцеві продукти кожної галузі, якщо валові продукти першої та другої галузі збільшаться вдвоє, а третьої – залишиться без змін.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	15	12	40	100
II	10	3	30	50
III	20	5	30	100

Р о з в’я з а н н я. 1) За формулою (6) знаходимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = 15:100 = 0,15;\; a_{12} = 12:50 = 0,24;\; a_{13} = 40:100 = 0,4;$$
$$a_{21} = 10:100 = 0,1;\; a_{22} = 3:50 = 0,06;\; a_{23} = 30:100 = 0,3;$$
$$a_{31} = 20:100 = 0,2;\; a_{32} = 5:50 = 0,1;\; a_{33} = 30:100 = 0,3.$$

Отже матриця прямих витрат має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,24 & 0,4 \\ 0,1 & 0,06 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця є продуктивною, так як сума елементів кожного її стовпця не перевищує одиницю, а сума елементів, наприклад, першого стовпця строго менше одиниці.

2) Новий вектор валового продукту буде мати вигляд $X = (200 \quad 100 \quad 100)^T$. Відповідний вектор кінцевого продукту знайдемо за формулою (9):

$$Y = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,15 & 0,24 & 0,4 \\ 0,1 & 0,06 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,85 & -0,24 & -0,4 \\ -0,1 & 0,94 & -0,3 \\ -0,2 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 44 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Отже кінцеві продукти галузей відповідно становитимуть 106, 44 і 20 (гр.од.).

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

В таблиці наведено дані про роботу трьох галузей промисловості за певний період. 1) Знайти матрицю прямих витрат і визначити, чи є вона продуктивною. 2) Знайти кінцеві продукти кожної галузі при збільшенні їх валових продуктів, що задано вектором валового продукту X .

1.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	12	18	25	150
II	20	13	10	140
III	15	17	14	100

$X = (180 \quad 200 \quad 150)^T$.

2.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	35	10	16	100
II	17	6	15	70
III	21	22	32	120

$X = (50 \quad 130 \quad 150)^T$.

3.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	18	28	24	80
II	21	23	9	120
III	13	7	14	60

$X = (00 \quad 150 \quad 120)^T$.

4.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	27	25	34	160
II	32	16	27	160
III	18	24	30	130

$X = (200 \quad 220 \quad 150)^T$.

5.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	8	10	14	80
II	12	7	18	90
III	5	15	7	100

$X = (00 \quad 120 \quad 150)^T$.

6.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	18	15	25	140
II	26	10	11	130
III	12	16	19	110

$X = (200 \quad 180 \quad 160)^T$.

7.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	3	11	9	80
II	17	6	4	60
III	8	10	12	80

$X = (30 \quad 120 \quad 140)^T$.

8.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	21	18	20	160
II	17	13	16	150
III	23	27	10	120

$X = (200 \quad 150 \quad 180)^T$.

9.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	5	13	8	90
II	14	2	10	50
III	6	17	15	80

$X = (60 \quad 120 \quad 100)^T$.

10.

Галузь	Споживання			Валовий продукт
	I	II	III	
I	22	19	25	130
II	10	13	18	90
III	16	24	8	140

$X = (80 \quad 160 \quad 140)^T$.

Задача 6. В таблиці наведено дані балансу двох галузей за звітний період:

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валовий продукт
	Енергетика	Машино-будування		
Енергетика	7	21	72	100
Машино-будування	12	15	123	150

Знайти необхідний об'єм валового продукту кожної галузі, якщо кінцевий продукт енергетичної галузі потрібно збільшити удвічі, а машинобудування – залишити на тому ж рівні.

Р о з в'я з а н н я. За формулою (6) знайдемо матрицю прямих витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця є продуктивною, так як сума елементів кожного її стовпця менше одиниці. Тому для будь-якого вектора кінцевого продукту Y можемо знайти вектор валового продукту X за формулою (10).

Знайдемо матрицю повних витрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}, \ |E - A| = 0,8202;$$

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,1 & 0,17 \\ 0,15 & 1,13 \end{pmatrix}.$$

Новий вектор кінцевого продукту за умовою задачі є $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$. За формулою (10) знаходимо відповідний вектор кінцевого продукту:

$$X = SY = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,17 \\ 0,15 & 1,13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179,31 \\ 160,59 \end{pmatrix}.$$

Отже валовий продукт енергетичної галузі слід збільшити до 179,31 гр.од., а машинобудівної – до 160,59 гр.од.

Завдання для самостійної роботи

В таблиці наведено дані балансу трьох галузей промисловості за звітний період. Знайти необхідний об'єм валового продукту кожної галузі, якщо кінцеві продукти кожної галузі заплановано збільшити відповідно до y_1, y_2, y_3.

1.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	9	35	26	70	140
II	10	15	25	60	110
III	20	16	14	20	70

$y_1 = 100$, $y_2 = 70$, $y_3 = 40$.

2.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	15	30	25	50	120
II	18	12	30	80	140
III	24	16	20	40	100

$y_1 = 70, \ \ y_2 = 100, \ \ y_3 = 50$.

3.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	25	10	15	40	90
II	20	17	13	50	100
III	16	24	20	70	130

$y_1 = 50, \ \ y_2 = 80, \ \ y_3 = 100$.

4.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	11	30	19	50	110
II	12	18	20	70	120
III	7	13	15	25	60

$y_1 = 90, \ \ y_2 = 120, \ \ y_3 = 60$.

5.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	10	24	16	40	90
II	18	11	21	50	100
III	23	8	19	30	80

$y_1 = 80, \ \ y_2 = 70, \ \ y_3 = 60$.

6.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	17	21	12	70	120
II	15	15	25	45	100
III	26	12	17	55	110

$y_1 = 70, \ \ y_2 = 100, \ \ y_3 = 80$.

7.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	13	16	21	80	130
II	6	12	17	35	70
III	20	18	12	40	90

$y_1 = 120,\ \ y_2 = 50,\ \ y_3 = 100$.

8.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	8	24	18	50	100
II	15	20	19	26	80
III	22	7	11	40	80

$y_1 = 100,\ \ y_2 = 50,\ \ y_3 = 40$.

9.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	7	21	18	54	100
II	17	10	24	39	90
III	12	15	13	60	100

$y_1 = 80,\ \ y_2 = 60,\ \ y_3 = 100$.

10.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	35	15	25	45	120
II	19	12	20	49	100
III	11	10	17	62	100

$y_1 = 60,\ \ y_2 = 100,\ \ y_3 = 80$.

11.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	20	25	15	40	100
II	35	10	20	75	140
III	45	15	10	30	100

$y_1 = 50,\ \ y_2 = 100,\ \ y_3 = 60$.

12.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	5	8	12	50	75
II	12	14	20	54	100
III	8	15	31	46	100

$y_1 = 50, \ \ y_2 = 100, \ \ y_3 = 70$.

13.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	10	25	26	39	100
II	13	17	30	60	120
III	14	20	14	22	70

$y_1 = 70, \ \ y_2 = 60, \ \ y_3 = 50$.

14.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	25	31	14	30	100
II	17	24	19	30	90
III	10	35	15	40	100

$y_1 = 60, \ \ y_2 = 90, \ \ y_3 = 40$.

15.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	4	12	14	50	80
II	18	6	26	60	110
III	20	13	18	49	100

$y_1 = 50, \ \ y_2 = 100, \ \ y_3 = 100$.

16.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	I	II	III		
I	14	28	20	40	100
II	10	22	8	40	80
III	6	30	16	58	110

$y_1 = 80, \ \ y_2 = 40, \ \ y_3 = 100$.