Лабораторна робота 4

МЕТОДИ ПЕРЕТВОЕРННЯ НЕПРЕРІВНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ В ЦИФРОВУ СИСТЕМУ

Мета роботи: ознайомитися з можливостями програми Matlab по моделюванню цифрових систем управління та дослідити їх характеристики

1 Теоретичні відомості

1.1 Дискретні системи

Дискретні системи - це системи, що містять елементи, які перетворять безперервний сигнал в дискретний. У дискретних системах сигнали описуються дискретними функціями часу.

1.1.1 Класифікація дискретних систем

Головним напрямком розвитку систем автоматизації в останні десятиріччя є широке використання засобів обчислювальної техніки та мікропроцесорних пристроїв, об'єднаних в мережі різного рівня і призначення. За характером сигналів такі системи є дискретними, тобто ці сигнали є послідовністю імпульсів, які несуть в собі всю необхідну інформацію. Дискретні системи мають ряд переваг перед неперервними (аналоговими):

- можливість багатоточкового керування з багатократним використанням ліній зв'язку, по яких одночасно передається множина сигналів за рахунок їх особливостей: імпульс – пауза тощо;
- підвищена завадостійкість за рахунок того, що завада діє лише на протязі імпульсу, який може бути як завгодно коротким. В паузах між імпульсами система розімкнена і перешкода на неї не діє.

В дискретних системах об'єкт керування, як правило, неперервний за своєю природою, тому відбувається перетворення неперервного сигналу в дискретний, тобто його квантування за рівнем та за часом. **Квантування** - процес перетворення безперервного сигналу в дискретний.

Види квантування сигналів, що застосовуються, лежать в основі класифікації дискретних систем.

В **релейних** (позиційних) системах відбувається квантування за рівнем (рис.4.1,а), коли виділяється значення $\Delta X = const$, і для цих значень визначається рівень неперервного сигналу.

В **імпульсних** системах здійснюється квантування за часом при $\Delta t = const$ (рис.4.1,б). Для збереження певного рівня сигналу між сусідніми точками використовуються екстраполятори: нульового порядку (зберігають сигнал постійним); першого та другого порядків (змінюють сигнал за лінійним чи нелінійним законами).

В **цифрових** системах здійснюється змішане квантування (рис.5.1,в) – за часом та за рівнем ($\Delta t, \Delta X$). Значення квантового сигналу береться на перетині відповідних ліній.

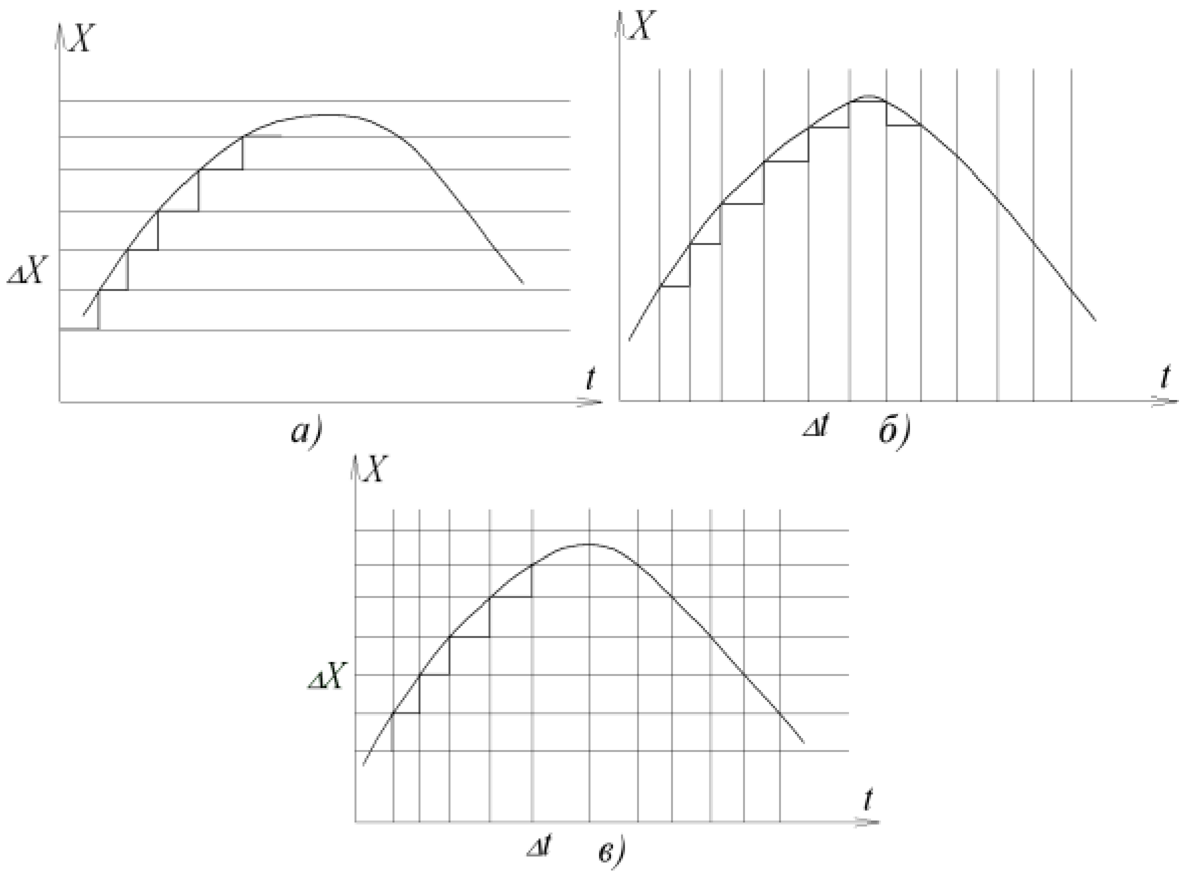


Рис.4.1. Види квантування сигналу: *а – за рівнем, б – за часом, в – за часом та рівнем.*

1.1.2 Загальна характеристика імпульсних систем (ІС)

Процес квантування неперервного сигналу за часом – це є імпульсна модуляція, тобто перетворення неперервного вхідного сигналу в послідовність, наприклад, амплітудно – модульованих імпульсів з обвідною, яка співпадає з вхідним сигналом.

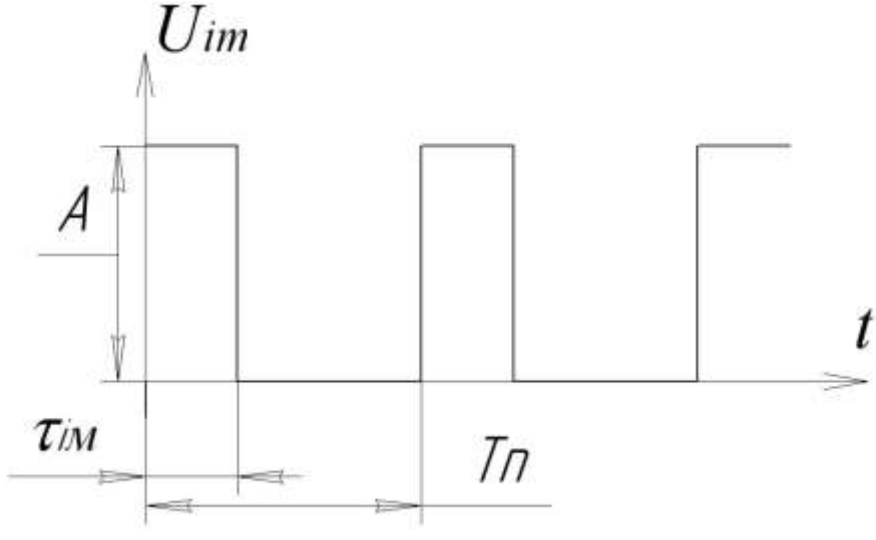


Рис.4.2. Вихідний сигнал імпульсного елемента

Вихідний сигнал імпульсного елемента (рис.4.2) характеризується кількома основними параметрами:

А – амплітуда;

$\tau_{ім}$ - тривалість (ширина) імпульсу;

Тп – період повторення імпульсів; Тп - $\tau_{ім}$ - пауза;

$\gamma = \frac{\tau_{ім}}{T_n}$ - шпарність імпульсу.

Імпульсна модуляція – змінювання одного з параметрів вихідних імпульсів (модулюємого) у функції величини вхідного сигналу (модулюючого).

Може змінюватись (модулюватись) амплітуда, ширина імпульсу, пауза. Відповідно виділяють види імпульсної модуляції:

- амплітудно-імпульсна (АІМ) – рис.4.3, а;
- широтно-імпульсна (ШІМ) – рис.4.3, б;
- часо-імпульсна (ЧІМ) - рис. 4.3, в.

На рис. 4.3 через x позначено вхідний сигнал імпульсного елемента (ІЕ).

При АІМ змінюється амплітуда A=$f(x)$, $\tau_{ім}, T_n - const$.

При ШІМ: $\tau_{ім}$=$f(x)$, A, $T_n - const$.

При ЧІМ (різновид – фазоімпульсна модуляція): $\tau_{зп}$=$f(x)$, $A, \tau_{ім}$, $T_n - const$.

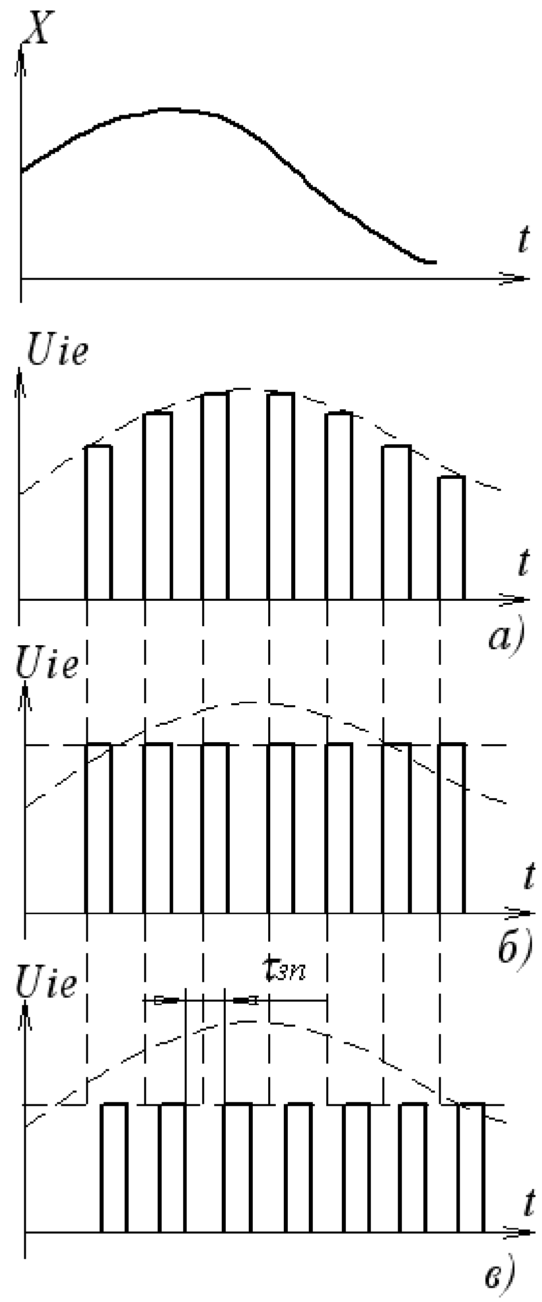


Рис.4.3. Види імпульсної модуляції: *а - амплітудно-імпульсна, б - широтно-імпульсна, в - часо-імпульсна.*

1.1.3. Математичний опис цифрових та імпульсних систем з АІМ

Для математичного опису цифрових та ІС, всі сигнали, в тому числі в неперервній частині, розглядаються в дискретні моменти часу $t = 0T_n;1T_n,2T_n..iT_n...\infty.$ Неперервні сигнали подаються у вигляді решітчастих функцій (рис.4.4):

$$x^*(t) = x(iT_n) = x(t)\big|_{t=iT_n} \qquad (4.1)$$

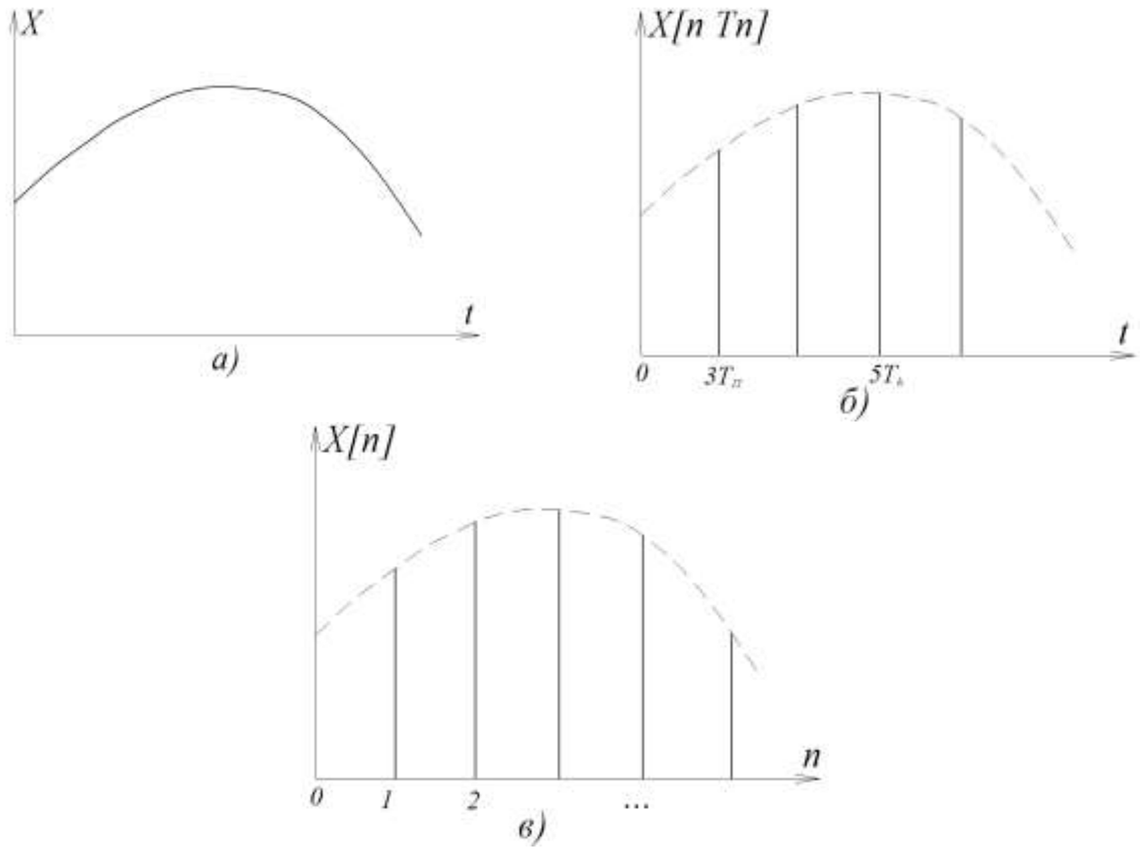


Рис.4.4. Решітчасті функції: *а – неперервний сигнал; б, в – форми представлення решітчастих функцій*.

Між дискретними значеннями аргументу решітчаста функція дорівнює нулю, а неперервний сигнал є обвідною для решітчастої функції. Послідовність неодиночних імпульсів, які утворюють решітчасту функцію на інтервалі $0 \le iT_n \le \infty$, можна подати у вигляді нескінченного ряду:

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_n) \cdot \delta(t - iT_n), \qquad (4.2)$$

де: $\delta(t - iT_n)$ - зміщена δ - функція, яка існує лише в моменти часу $t=iT_n$ і дорівнює нулю при всіх інших значеннях t. Для решітчастої функції існує дискретне перетворення Лапласа:

$$x^*(p) = L(x^*(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_n) \cdot e^{-piT_n} \qquad (4.3)$$

Вираз (4.3) отримано з урахуванням того, що зображення суми оригіналів дорівнює сумі їх зображень, а зображення зміщеної δ-функції дорівнює e^{-piT_n}. Дискретне перетворення Лапласа включає трансцендентний множник e^{-piT_n}, тому зображення $X^*(p)$ та передаточні функції стають ірраціональними функціями аргументу p, що утруднює їх використання. Для отримання передаточних функцій в дрібно-раціональній формі (як для неперервних систем) замінюють аргумент

$$z = e^{pT_n} \qquad (4.4)$$

і отримують зручне для використання *z* – перетворення решітчастої функції:

$$X(z) = L(x(iT_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_n) \cdot z^{-i} \qquad (4.5)$$

В табл. 4.1 наведені z – зображення для деяких функцій часу.

Зручність z – перетворення полягає в тому, що сама форма запису дає простий спосіб прямого та зворотного перетворення:

- для знаходження z – перетворення за відомою функцією часу необхідно кожне дискретне значення $X(iT_n)$ помножити на z^{-i}, а потім згорнути отриманий степеневий ряд в кінцеву суму;
- для знаходження оригіналу за відомим зображенням $X(z)$ необхідно зображення подати у вигляді степеневого ряду за спадаючими степенями z^{-i}, а отримані при цьому числові коефіцієнти ряду і є дискретними значеннями $X(iT_n)$ сигналу $X(t)$.

Таблиця 4.1

z – зображення функцій часу

№ п/п	X(t) (t ≥ 0)	X(iTn)	X(p)	X(z)
1.	$\delta(t)$	$\delta(iT_n)$	1	1
2.	1(t)	$1(iT_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - iT_n)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
3.	t	(iT_n)	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_n \cdot z}{(z-1)^2}$
4.	t²	$(iT_n)^2$	$\frac{2!}{p^3}$	$\frac{T_n^{\,2} z(z+1)}{(z-1)^3}$
5.	$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha \cdot i \cdot T_n} = d^i$ $(d = e^{-\alpha \cdot T_n})$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-d}$

z – перетворення має властивості, аналогічні властивостям звичайного перетворення Лапласа:

- лінійність:

$$L(a_1 x_1(t) \pm a_2 x_2(t)) = a_1 x_1(z) \pm a_2 x_2(z), \qquad (4.6)$$

- теорема про початкове значення оригіналу:

$$\lim_{i \to 0} X(iT_n) = \lim_{Z \to \infty} X(z), \qquad (4.7)$$

- теорема про кінцеве значення оригіналу:

$$\lim_{i \to \infty} X(iT_n) = \lim \frac{z-1}{z} X(z), \qquad (4.8)$$

- теорема про зміщення аргументу оригінала (теорема запізнювання):

$$L(X(iT_n - lT_n)) = X(z)\cdot z^{-l} \tag{4.9}$$

1.1.4 Стійкість та якість цифрових та імпульсних систем

За динамічними властивостями цифрові та імпульсні системи з АІМ багато в чому аналогічні неперервним системам, що дає можливість застосовувати аналоги методів дослідження неперервних систем. Імпульсна або цифрова система буде стійкою, коли вільна складова перехідного процесу $X_B(iT_п)$ з часом затухає, тобто:

$$\lim_{i\to\infty} X_B(iT_n) = 0 \tag{4.10}$$

Для дослідження стійкості імпульсних та цифрових систем можна використовувати алгебраїчні та частотні критерії стійкості, застосувавши відповідні *z*-перетворення.

Імпульсний елемент не впливає на стійкість розімкненого контуру, але для замкненої системи необхідно врахувати таке:

- при малих періодах повторення T_n частотна характеристика розімкненого контура співпадає з частотною характеристикою неперервної частини, яка визначає стійкість імпульсної системи;
- при збільшенні періоду повторення в більшості систем зменшується граничний передаточний коефіцієнт, погіршуються динамічні властивості;
- в окремих випадках (структурно-нестійкі неперервні системи, системи із запізнюванням) імпульсний елемент справляє стабілізуючу дію. Для таких систем рекомендується обирати період повторення T_n з умови:

$$T_n \ge \frac{\pi}{\omega_0}, \tag{4.11}$$

де: ω_0 - частота, при якій АФХ неперервної частини перетинає додатну уявну вісь.

Для оцінки **якості** імпульсних та цифрових систем використовуються такі ж показники, як і для неперервних: точність в усталених режимах, тривалість перехідного процесу та інше.

Тривалість і перерегулювання оцінюють безпосередньо за перехідною характеристикою. Для її отримання записують *z*-зображення вихідної величини при одиничному ступінчастому сигналі:

$$X(z) = \frac{z}{z-1}\cdot W(z) \tag{4.12}$$

і за зображенням знаходять оригінал – решітчасту функцію $x(iT_n)$. В простих випадках для цього достатньо таблиць оберненого *z* – перетворення, розклавши попередньо зображення *X(z)* на прості дроби.

В більш складних випадках розкладають функцію *X(z)* в степеневий ряд за від'ємними степенями *z* (діленням чисельника на знаменник):

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^{-i} = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \ldots + C_l z^{-l} + \ldots \tag{4.13}$$

Точність імпульсної системи оцінюють за усталеним значенням сигналу похибки:

$$\Delta x_{уст}(\infty) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}W^{n}{}_{зд}(z)\cdot x_{зд}(z) \tag{4.14}$$

При ступінчастому сигналі $x_{зд}(t) = a1(t)$ усталена похибка буде:

$$\Delta x_{уст}(\infty) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{1}{1+W_{роз}(z)}\cdot\frac{az}{z-1} = \frac{a}{1+W_{роз}(1)} \tag{4.15}$$

Видно, що при ступінчастому сигналі похибка дорівнює нулю, якщо передаточна функція $W_{роз}(z)$ має хоча б один полюс, який дорівнює одиниці. При лінійному сигналі для цього потрібно не менше 2-х полюсів.

1.1.5 Цифрові системи

В цифрових системах відбувається квантування сигналів за часом і рівнем. Квантування за часом робить цифрову систему дискретною, а квантування за рівнем – нелінійною. В цифрових системах є пристрої, які перетворюють неперервні сигнали в цифрові коди і виконують математичні операції над цими кодами. Цифровий регулятор виконує властиві йому операції і видає результати у дискретні моменти часу $t = T_n, 2T_n, 3T_n\ldots$ В інтервалах між цими моментами на виході регулятора зберігається певний сигнал, тобто вихідний сигнал – ступінчаста функція $x(iT_n)$, яка відповідає квантуванню за часом. Квантування за рівнем обумовлюється тим, що внаслідок цифрової подачі інформації вихідний сигнал може набувати лише певних фіксованих рівнів, які відрізняються один від одного на величину q. Ця величина відповідає одиниці молодшого розряду цифрового регулятора, тобто неперервний сигнал подається у виді:

$$x(t) = x^{*}(iT_n) + \sigma, \tag{4.16}$$

де: $|\sigma| < q,$ а $x^{*}(iT_n)$ містить ціле число рівнів q. При малих q впливом квантування за рівнем на динаміку систем можна знехтувати, тобто вважати $q \to 0$. У загальному випадку для дослідження цифрових систем можна застосувати математичний апарат, який використовується для лінійних імпульсних систем з амплітудно - імпульсною модуляцією: z – перетворення і різницеві рівняння.

В системах автоматичного керування технологічними об’єктами функції регулятора виконує мікропроцесорний контролер. Така система відноситься до неперервно-дискретних і описується диференційними і різницевими рівняннями, а також включає функціональні залежності, які відображають перетворення сигналів з неперервної форми в дискретну і навпаки. Така структура математичного опису громіздка і незручна.

Більш зручним методом є заміна диференційних рівнянь різницевими, тоді в цілому аналіз і синтез систем виконується методами теорії неперервних систем, а синтезований регулятор реалізується в цифровому виді. При цьому необхідно врахувати, що при вказаних замінах виникають похибки, які можуть привести до різних оцінок, наприклад, щодо стійкості.

Узагальнена функціональна структура цифрової системи показана на рис.4.5.

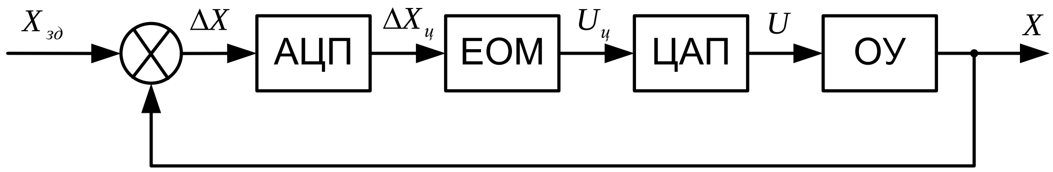


Рис.4.5 Функціональна структура цифрової системи управління

Об’єкт управління ОУ – неперервна частина системи (НЧ). Аналогово – цифровий перетворювач АЦП призначений для отримання з неперервного сигналу цифрового коду, який обробляється в ЕОМ або мікропроцесорному контролері (МПК). Для формування сигналу керування *U*, який поступає на об’єкт, необхідно забезпечити зворотнє перетворення, для чого призначений цифро – аналоговий перетворювач ЦАП. Перетворювач АЦП включає імпульсний елемент для квантування за часом і квантувач за рівнем. В результаті отримують число у вигляді коду, як правило, двійкового, яке подається в ЕОМ (МПК). Після перетворення за певними алгоритмами результат видається у вигляді чисел $U_ц(iT_п)$. Перетворювач ЦАП складається з квантувача за рівнем, ідеального δ-імпульсного елемента і формуючого елемента (екстраполятора). Крім екстраполяторів нульового порядку, які утримують сигнал на постійному рівні між сусідніми імпульсами, застосовуються також екстраполятори першого порядку, сигнал яких змінюється за лінійним законом, і другого – за квадратичною параболою.

Число рівнів квантування вхідного і вихідного сигналів різне: на вході необхідно забезпечити високу точність обробки сигналів, і число рівнів вхідного сигналу визначається розрядністю ЕОМ (МПК). Вихідний сигнал може мати мінімальну кількість рівнів, тобто сигнал може бути релейним.

В порівнянні з аналоговими (неперервними) системами цифрові системи керування мають ряд особливостей, які визначають їх динаміку:

- квантування сигналів за часом і рівнем;
- цифро-аналогове і аналого-цифрове перетворення. В сучасних системах можна забезпечити необхідну точність цих перетворень, але необхідно врахувати, що в алгоритмах керування використовуються прирости вхідних та вихідних сигналів. Це потребує узгодження розрядності технічних засобів, швидкодії, періоду опитування датчиків тощо;
- часовий зсув між вхідним сигналом і видачею сигналів керування, тобто наявність запізнювання. Це має особливе значення, коли здійснюється багатооб’єктне керування, виконується множина необхідних алгоритмів.

1.2 Методи переходу від безперервної системи до цифрової системи

Перехід від безперервної системи до цифрової може відбуватися декількома методами:

– c2d перетворення (імпульсний елемент з екстраполятором);
– білінійне перетворення;
– Impinvar перетворення на основі інваріантної імпульсної характеристики.

За допомогою програми Matlab вказані види перетворення відбувається наступним чином (рис.4.6-4.14):

```
>> W=tf([1],[1 10 20]);
>> Wd = c2d(W,0.01,'zoh')
Transfer function:
4.837e-005 z + 4.678e-005
-------------------------
 z^2 - 1.903 z + 0.9048

Sampling time: 0.01>> impulse(Wd,10)
>>step(Wd)
>>impulse(Wd)
>>bode(Wd)
```

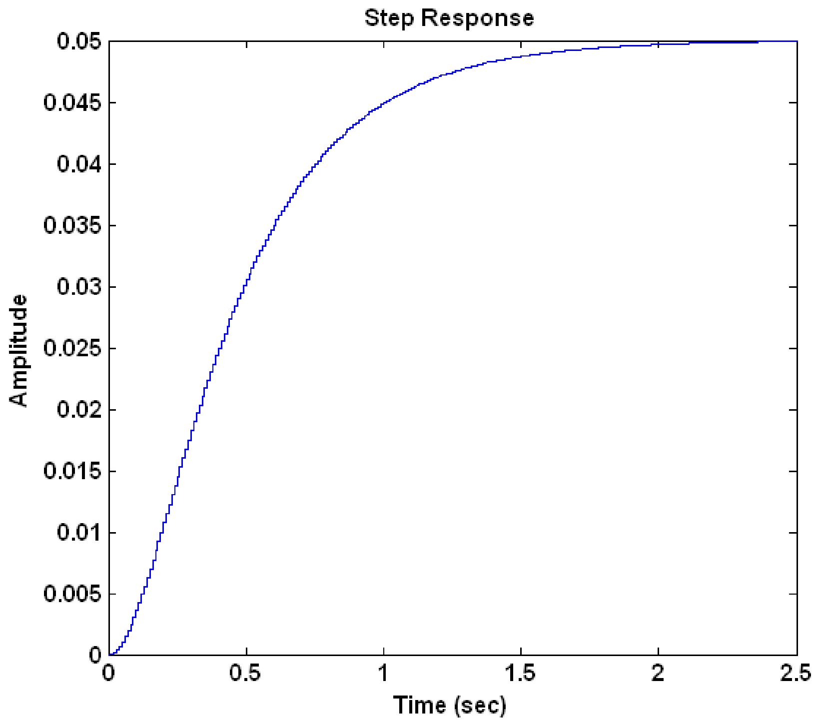


Рис.4.6. Перехідна характеристика цифрової САУ на основі c2d перетворення

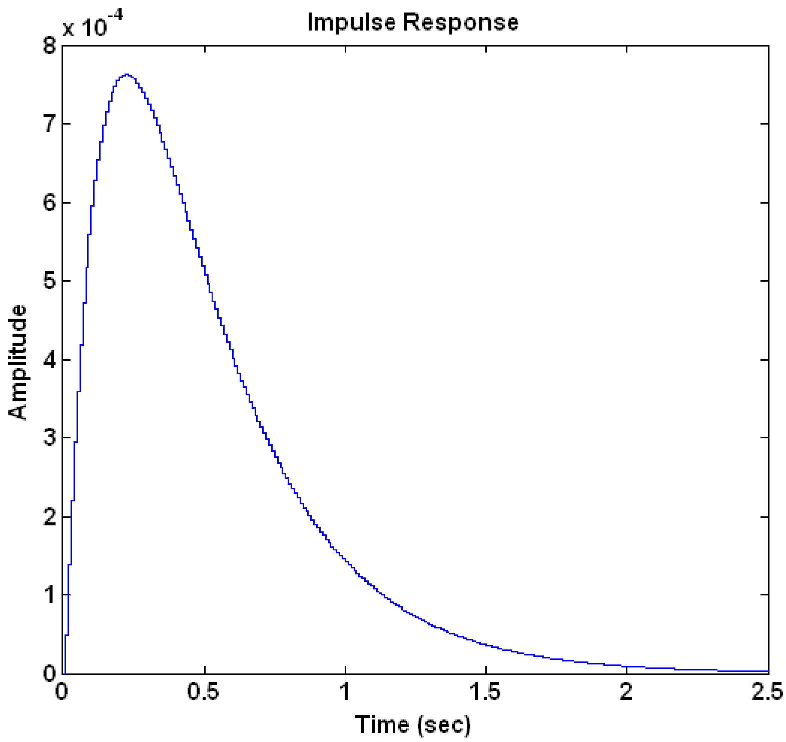


Рис.4.7. Імпульсна характеристика цифрової САУ на основі c2d перетворення

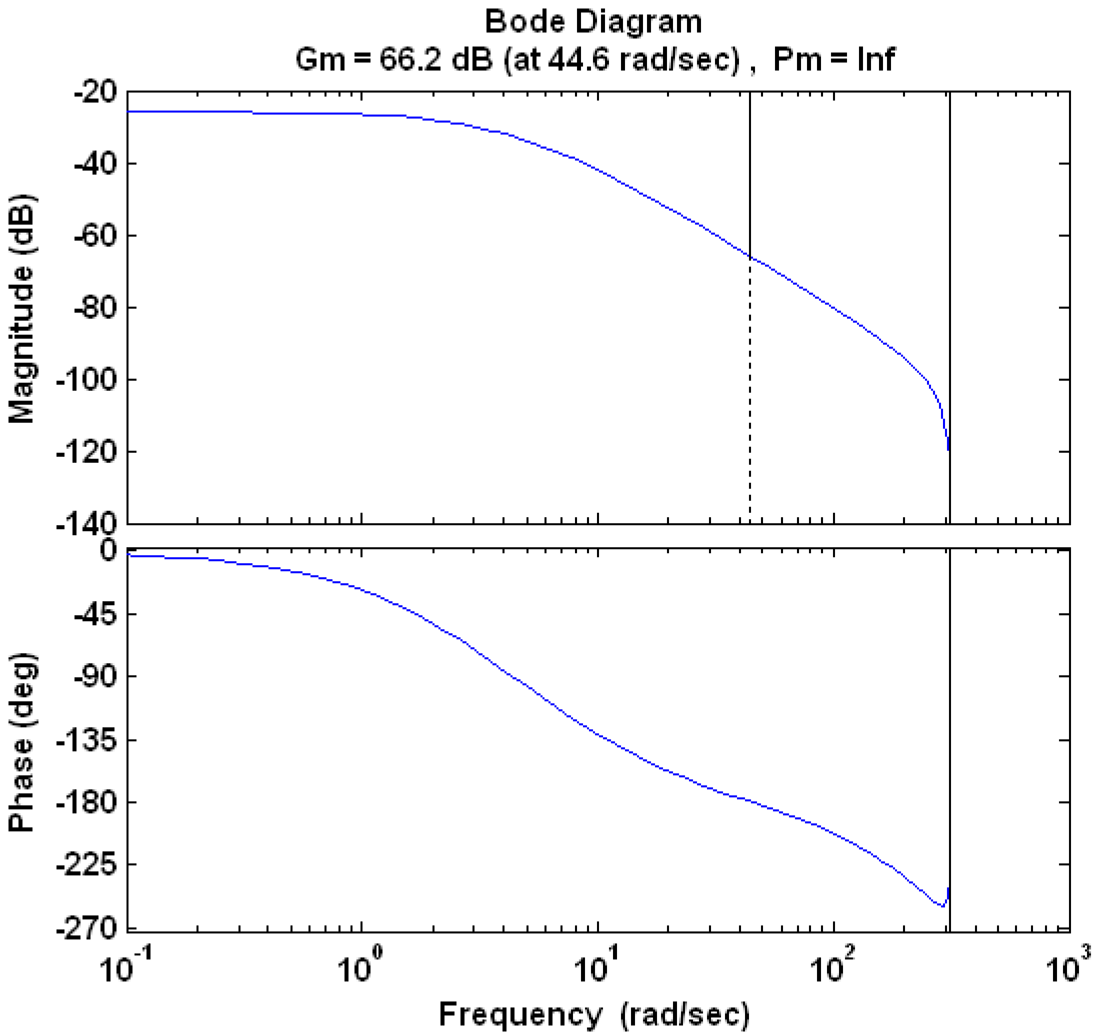


Рис.4.8. Логарифмічна амплітудна характеристика цифрової САУ на основі c2d перетворення

```
>>num=1; den=[1 10 20];
>> [numd1,dend1] = bilinear(num,den,200);

>> Wd1=tf(numd1, dend1, 0.01)

Transfer function:
6.097e-006 z^2 + 1.219e-005 z + 6.097e-006
------------------------------------------
          z^2 - 1.951 z + 0.9512

Sampling time: 0.01
>> impulse(Wd1,10)
>> step(Wd1,10)
>> bode(Wd1)
```

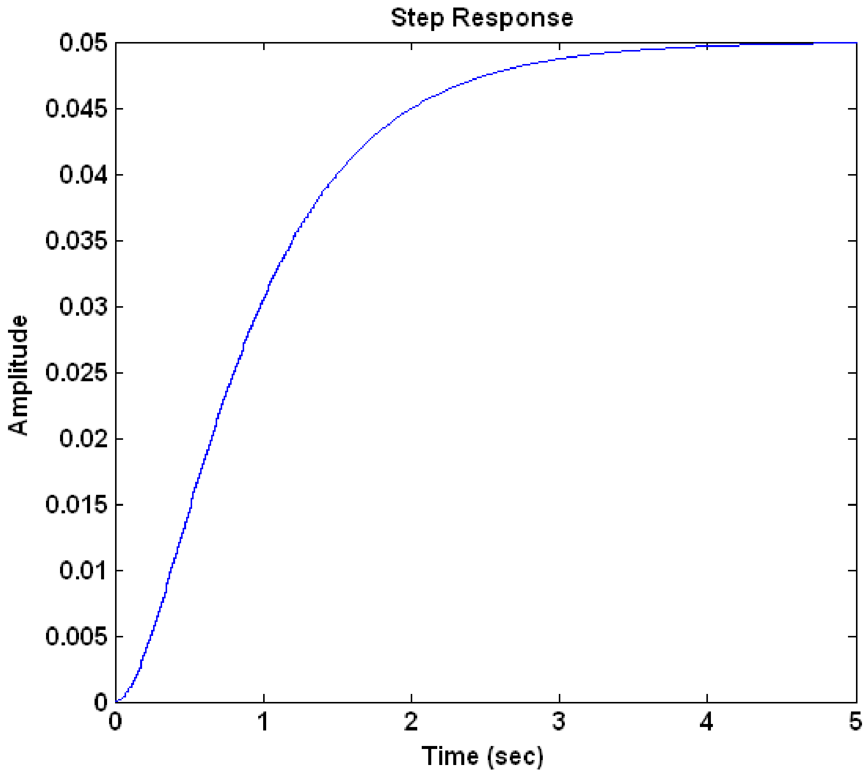


Рис.4.9. Перехідна характеристика цифрової САУ на основі білінійного перетворення

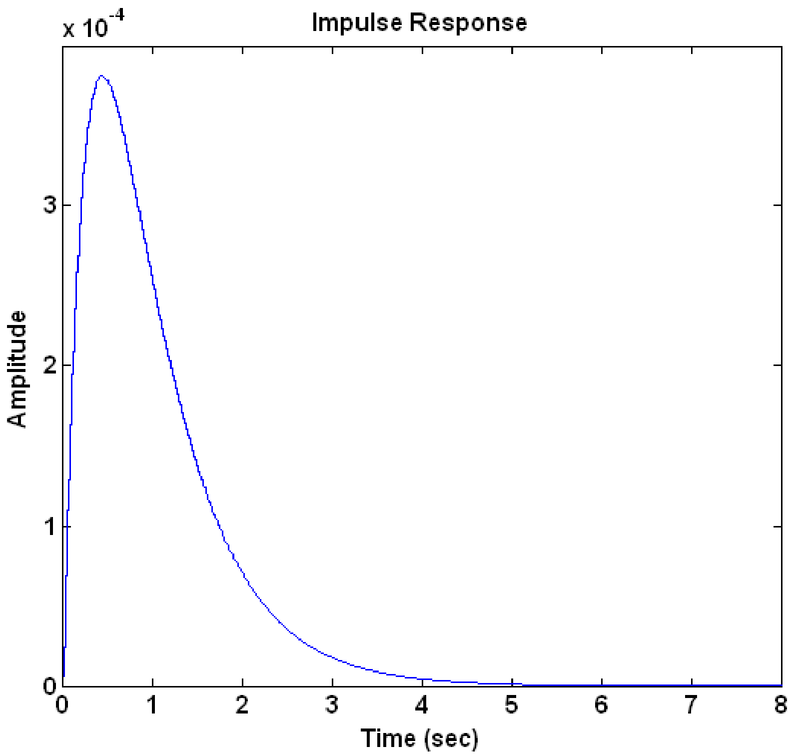


Рис.4.10. Імпульсна характеристика цифрової САУ на основі білінійного перетворення

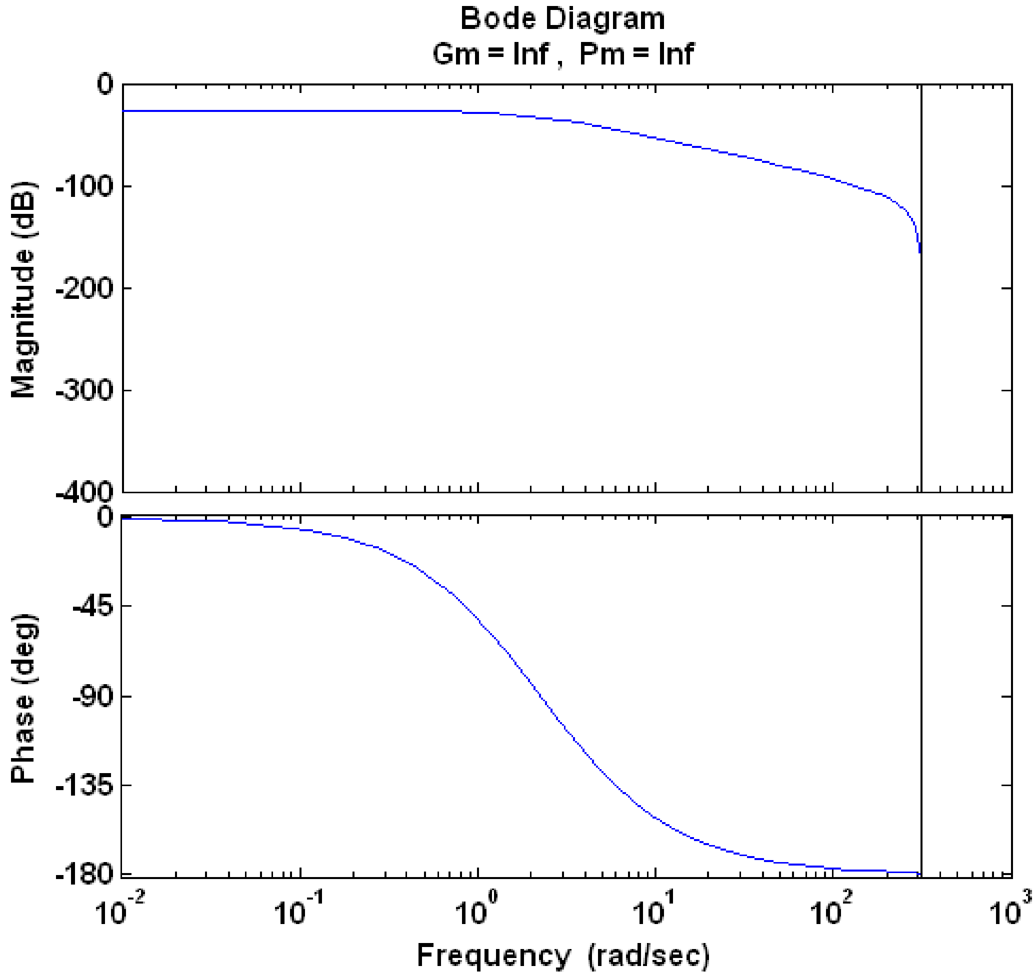


Рис.4.11. Логарифмічна амплітудна характеристика цифрової САУ на основі білінійного перетворення

```
>> [numd2, dend2]=impinvar (num, den, 200);

>> Wd2 =tf(numd2, dend2, 0.01)

Transfer function:
      2.438e-005
----------------------
z^2 - 1.951 z + 0.9512

Sampling time: 0.01
>> impulse(Wd2,10)
>> bode(Wd2)
>> step(Wd2,10)
```

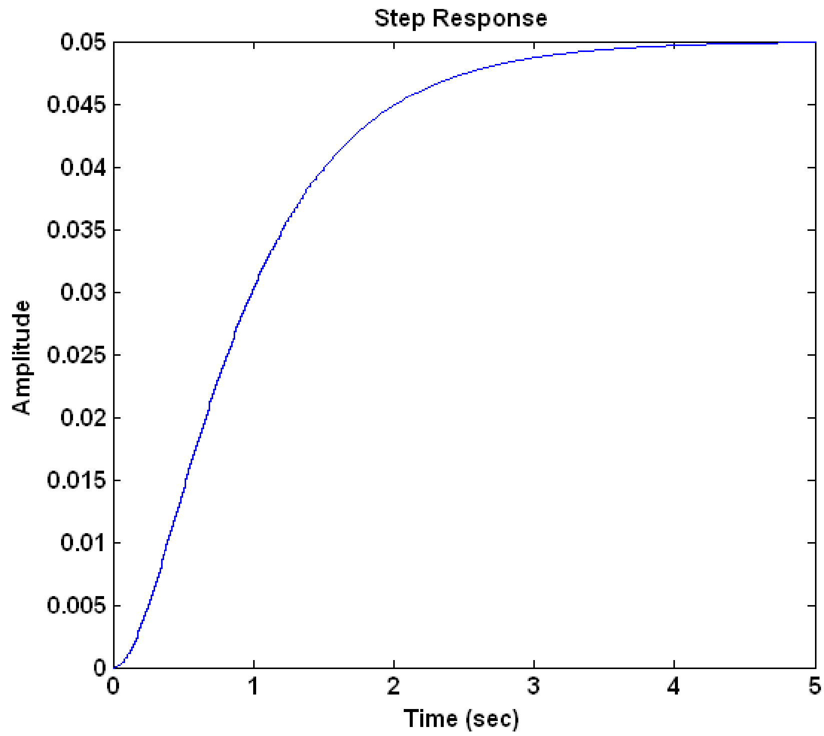


Рис.4.12. Перехідна характеристика цифрової САУ для методу інваріантної імпульсної характеристики

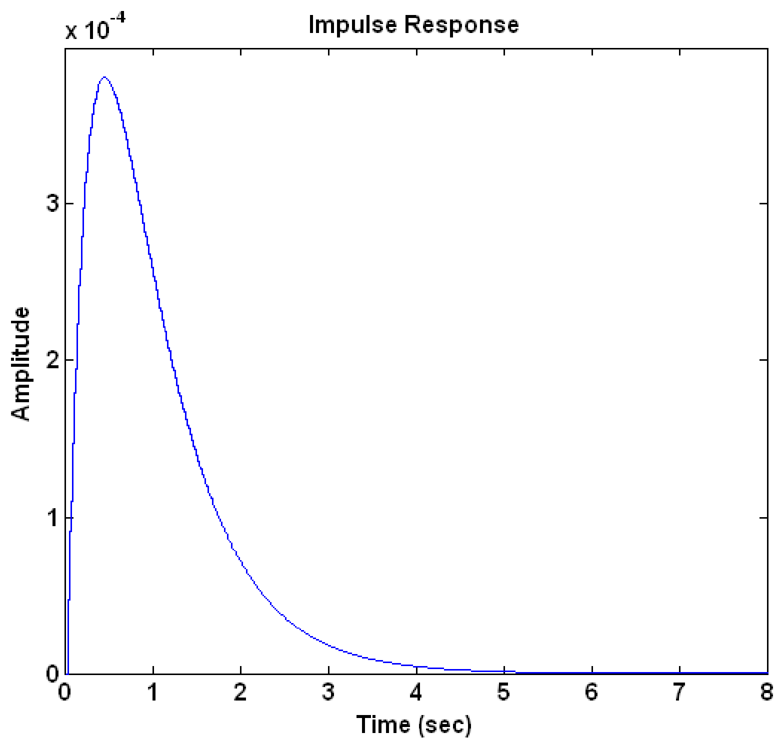


Рис.4.13. Імпульсна характеристика цифрової САУ для методу інваріантної імпульсної характеристики

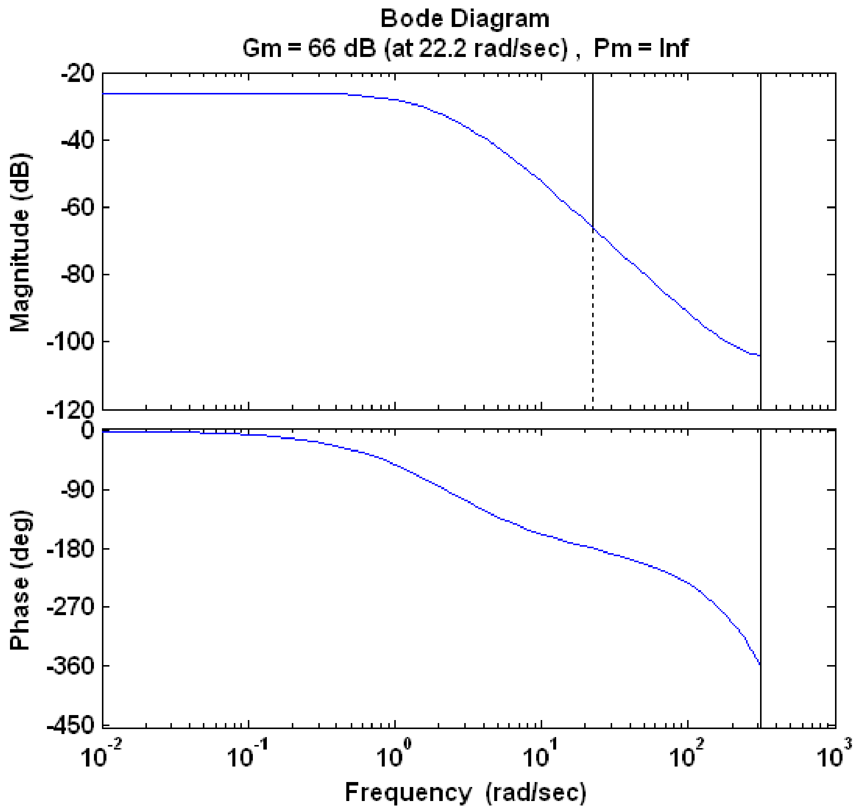


Рис.4.14. Логарифмічна амплітудна характеристика цифрової САУ для методу інваріантної імпульсної характеристики

За допомогою програми Matlab в пакеті Simulink цифрову САУ, перетворену різними методами, можна представити наступним чином (рис.4.15-4.17).

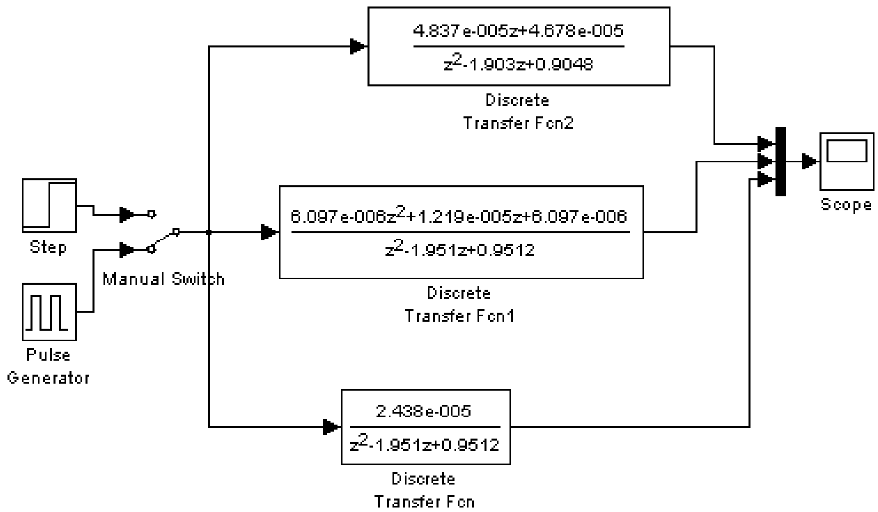
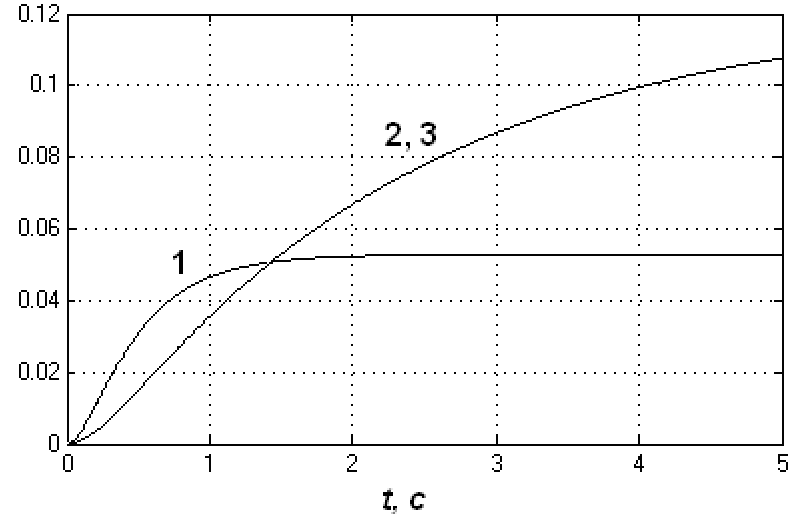
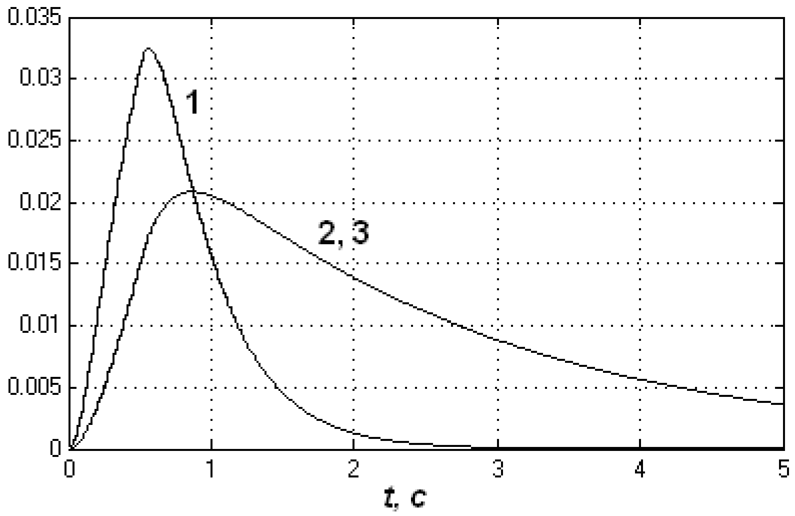


Рис.4.15. Цифрові САУ, перетворені різними методами



4.16. Перехідні характеристики цифрових САУ, перетворених різними методами: *1- метод c2d, 2,3- методи bilinear та impinvar*.



4.17. Імпульсні характеристики цифрових САУ, перетворених різними методами: *1- метод c2d, 2,3- методи bilinear та impinvar*.

2 Завдання для лабораторної роботи

2.1 Згідно свого варіанту обрати структурну схему системи автоматичного управління (додаток 1) та параметри цієї схеми (додаток 2).

2.2 Перетворити безперервну САУ (отриману в лабораторній роботі 1, п.2.4) в цифрову систему (z – перетворення) різними методами та отримати перехідну, імпульсну, логарифмічно-амплітудну характеристики.

2.3 Промоделювати за допомогою пакету Simulink цифрові передаточні функції, отримані в п.2.2, та отримати перехідну та імпульсну характеристику.

2.4 Оцінити на стійкість системи автоматичного управління за перехідною, імпульсною та логарифмічно-амплітудною характеристикою.

2.5 Порівняти графіки характеристик, отримані різними методами моделювання.

2.6 Порівняти безперервну та цифрову системи автоматичного керування шляхом аналізу отриманих графіків характеристик.

3 Зміст звіту

3.1 Назва та мета роботи.
3.2 Структурна схема системи автоматичного управління згідно варіанту свого завдання.
3.3 Результат перетворення безперервної системи в цифрову різними методами та графіки характеристик.
3.3 Результат моделювання цифрових САУ в Simulink та графіки характеристик.
3.4 Оцінювання на стійкість системи автоматичного управління.
3.5 Аналіз графіків характеристик, що отримані різними методами моделювання.
3.6 Аналіз та порівняння безперервної та дискретної цифрової системи автоматичного управління.
3.7 Висновки по роботі.

4 Контрольні питання

4.1 Дайте визначення дискретним системам.
4.2 Наведіть класифікацію дискретних систем.
4.3 Наведіть приклад зв’язку звичайної і дискретної (на основі z - перетворення) передаточних функцій.
4.4 В чому особливості частотних характеристик імпульсних та цифрових систем?
4.5 Як оцінюється стійкість імпульсних та цифрових систем?
4.6 Які особливості цифрових систем?
4.7 Як записуються передаточні функції цифрових систем?