6. Комплексні числа

Комплексним числом називають вираз

$$z = a + bi, \qquad 7$$

де a та b – дійсні числа, $i = \sqrt{-1}$ – *уявна одиниця.* Числа a та b називають відповідно *дійсною* та *уявною частиною* комплексного числа z. При цьому пишуть $a = \mathrm{Re} z$, $b = \mathrm{Im} z$.

Праву частину формули 7 називають *алгебраїчною формою* комплексного числа.

Модуль комплексного числа z знаходиться за формулою

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad 8$$

Спряженим до комплексного числа 7 називають комплексне число $\overline{z} = a - bi$.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважають рівними $(z_1 = z_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексні числа можна зображати на площині. Якщо користуватись декартовою системою координат, то число 7 зображається точкою $M(a;b)$. Таку площину називають *комплексною площиною* змінної z, вісь Ox – *дійсною віссю,* вісь Oy – *уявною.*

Комплексне число $z = a + bi$ при $b = 0$ є дійсним числом a: $z = a + 0 \cdot i = a$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних і зображаються точками осі Ox. Комплексні числа $z = a + bi$, в яких $b = 0$, називають *суто уявними.* Такі числа зображаються точками осі Oy.

Полярні координати точки $M(a;b)$ на комплексній площині позначимо ρ та φ. Оскільки $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$ (рис. 1), то з 7 маємо

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad 9$$

Праву частину формули 9 називають *тригонометричною формою* комплексного числа.

Очевидно, що $\rho = |z|$. Кут φ називають *аргументом* комплексного числа z і позначають $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$. Він визначається з точністю до $2\pi k$:

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in Z,$$

де $\arg z$ називають *головним значенням* аргументу, яке знаходиться на проміжку $[0, 2\pi)$ і відраховується від додатного напряму осі Ox проти руху стрілки годинника.

Якщо $z = 0$, то вважають, що $|z| = 0$, а $\arg z$ невизначений. У загальному випадку модуль та аргумент комплексного числа 7 знаходять за формулами

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, & a < 0, b > 0,, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi, & a < 0, b < 0. \end{cases} \qquad 10$$

Розглянемо дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$, заданими в алгебраїчній формі.

а) Дії додавання та віднімання виконують за формулами:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i, \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i. \end{aligned} \qquad 11$$

Відзначимо, що $z + \bar{z} = 2a$ – дійсне число.

б) Множення виконують за правилом множення двочленів з урахуванням того, що $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned} \qquad 12$$

Відзначимо, що $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ – дійсне число.

в) Дію ділення зводять до дії множення наступним чином:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}. \qquad 13$$

Множення та ділення комплексних чисел $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданими в тригонометричній формі, виконують за формулами:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big). \end{aligned} \qquad 14$$

Перша з цих формул, узагальнюється на довільне скінченне число множників і приводить, зокрема, до наступної формули піднесення до степеня (*формула Муавра*):

$$z^n = \left(\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = \rho^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), \quad n \in N. \qquad 15$$

Наслідком формули Муавра є формула коренів n-го степеня з комплексного числа z:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad 16$$

де $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

З *формули Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

випливає, що комплексне число 9 можна записати в *показниковій формі*

$$z = \rho e^{i\varphi}. \qquad 17$$

Дії множення, ділення та піднесення до степеня комплексних чисел, записаних у формі 17 , можна виконувати за відомими властивостями степеня:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \qquad 18$$

$$z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}.$$

Приклад. Задано два комплексних числа $z_1 = 2 - i$ та $z_2 = 1 + 3i$. Виконати дії: 1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - \overline{z}_2$; 3) $z_1 \cdot z_2$; 4) $\frac{z_1}{z_2}$; 5) $z_1^{\,3}$.

Приклад. Записати комплексне число $z_1 = -\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$ в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Знайти z^5 та $\sqrt{z}$.

Γ 1) За правилом 7 маємо

$$z_1 + z_2 = \left(2 - i\right) + \left(1 + 3i\right) = \left(2 + 1\right) + \left(-1 + 3\right)i = 3 + 2i;$$

2) Оскільки спряжене до комплексного числа z_2: $\overline{z}_2 = 1 - 3i$, то

аналогічно до 1) маємо:

$$z_1 - \overline{z}_2 = (2-i)-(1-3i) = (2-1)+(-1+3)i = 1+2i\ ;$$

3) $z_1 \cdot z_2 = (2-i)(1-3i) = 2\cdot 1 + 2\cdot 3i - i - 3i^2 =$

$= 2+6i-i-3(-1) = 2+3+(6-1)i = 5+5i$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2-i}{1+3i} = \dfrac{2-i}{1+3i}\cdot\dfrac{1-3i}{1-3i} = \dfrac{(2-i)(1-3i)}{1^2+3^2} =$

$= \dfrac{2-6i-i+3}{10} = \dfrac{5-7i}{10} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{10}i$;

5) Скористаємося формулою $a-b\ ^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$z_1^{\ 3} = (2-i)3 = 2^3 - 3\cdot 2^2 \cdot i = 3\cdot 2\cdot i^2 - i^3 = 8-12i-6+i = 2-11i$. $\lrcorner$

$\ulcorner$ Аналогічно п. 4 прикладу

$$z = \frac{-2}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-2}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{-2\left(1+\sqrt{3}i\right)}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{2\left(1+\sqrt{3}i\right)}{4} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ -$$

алгебраїчна форма числа z .

Аналогічно прикладу маємо $\rho = |z| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$;

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} + \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}\ .$$

Тому $z = 1\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ – тригонометрична форма числа z .

За формулою (17) одержимо запис числа z у показниковій формі:

$$z = 1\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}\ . \quad \lrcorner$$

Обчислимо за формулою Муавра

$$z^5 = \left(1\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^5 = 1^5\cdot\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^5 = 1\cdot e^{i\frac{20\pi}{3}} = e^{i\frac{20\pi}{3}}\ .$$

За формулою () коренів комплексного числа одержимо значення

$$w_k = \sqrt{z}\ :$$

$$w_0=\sqrt{1}\cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}}=1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}};$$

$$w_1=\sqrt{1}\cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}}=1\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}. \quad \lrcorner$$

Приклад. Записати комплексне число $z=-2+2\sqrt{3}i$ у тригонометричній та показниковій формах.

$\ulcorner$ Знайдемо модуль комплексного числа z

$$\rho=|z|=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16}=4.$$

За формулою (10), оскільки $\begin{cases} x=-2<0 \\ y=2\sqrt{3}>0 \end{cases}$ маємо

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right)+\pi=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

Тому з (9) та (17) маємо

$z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ – тригонометрична форма комплексного числа z.

$z=4\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$ – показникова форма комплексного числа z. $\lrcorner$

Приклад. Знайти кубічні корені з комплексного числа $z=4\sqrt{3}-4i$.

$\ulcorner$ Запишемо число z в тригонометричній формі, для цього знайдемо $\rho=|z|=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+(-4)^2}=8$,

$$Arg\,z=\operatorname{arctg}\frac{-4}{4\sqrt{3}}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}.$$

Звідки

$$\varphi=A\mathrm{rg}\,z+2\pi=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{4\pi}{6}.$$

Тобто

$$z=8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Звідки за формулою (16) маємо

$$w_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi\cdot 0}{3}\right)=2\left(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}\right),$$

$$w_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi\cdot 1}{3}\right)=2\left(\cos\frac{23\pi}{18}+i\sin\frac{23\pi}{18}\right),$$

$$w_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi\cdot 2}{3}\right)=2\left(\cos\frac{35\pi}{18}+i\sin\frac{35\pi}{18}\right). \quad \lrcorner$$

Приклад. Задано $f(z)=z^2-3z+2$ та $z_0=1+2i$.

Обчислити: $f(z_0)$, $f(\overline{z}_0)$.

$\ulcorner$ За правилом (12) маємо

$$f(z_0)=(1+2i)^2-3(1+2i)+2=1+4i-4-3-6i+2=-4-2i$$

$$f(\overline{z}_0)=(1-2i)^2-3(1-2i)+2=1-4i-4-3+6i+2=-4+2i.$$

Тобто, у нашому випадку $f(\overline{z}_0)=\overline{f(z_0)}$. (Ця властивість виконується для довільного многочлена). $\lrcorner$

Приклад. Зобразити в комплексній площині множину точок z ,що визначається умовою: а) $\operatorname{Re} z\ge -1$, б) $|z|>1$, $|z-2|\le 1$.

$\ulcorner$ а) Для числа $z=x+iy$ умова $\operatorname{Re} z\ge -1$ може бути подана у вигляді $x\ge -1$ (рис.1)

б) Умову $|z|>1$ можна подати у вигляді $x^2+y^2>1$ ($x^2+y^2=1$ – рівняння кола радіуса 1). Тому відповідна область (рис.2) це – зовнішня частина відповідного круга

в) Умову $|z-2|\le 1$ можна подати у вигляді $|x-2+iy|\le 1$ або

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}\le 1.$$

Тобто $(x-2)^2+y^2\le 1^2$ – круг радіуса 1 з центром у точці $(2,0)$: (рис. 3) $\lrcorner$

Приклад. Знайти z^2 та z^{-2}, якщо $z = 2 - i$.

┌ За правилом (12) маємо

$$z^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i - 4i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i .$$

Оскільки $z^{-2} = \dfrac{1}{z^2}$, то з врахуванням попереднього одержимо:

$$z^{-2} = \frac{1}{3-4i} = \frac{1}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i}{9+16} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i . \quad ┘$$

Приклад. Задано комплексні числа $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ та $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Обчислити 1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\dfrac{z_1}{z_2}$; 3) $z_2^{\,3}$.

┌ 1) За формулою (14) одержимо

$$z_1 \cdot z_2 = \left[4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right] =$$

$$= 4\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}\right)\right) = 8\cos\frac{11\pi}{24} + i\sin\frac{11\pi}{24} ;$$

2) За формулою (14) маємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{4}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{8}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right) ;$$

3) За формулою Муавра (15) одержимо

$$z_2^3 = \cdot\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) =$$

$$= 8\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) . \quad ┘$$