Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a; b)$ знаходимо

$$A = f''_x(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b), \quad \Delta = AC - B^2 .$$

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a; b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a; b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

ЗАДАЧА 1

Дослідити на екстремуми функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 , \qquad \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо чотири стаціонарні точки: $P_1(1; 2)$, $P_2(2; 1)$, $P_3(-1; -2)$, $P_4(-2; -1)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка P_1: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$, $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12$, $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$;

$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_1 екстремуму немає.

2) Точка P_2: $A=12$, $B=6$, $C=12$; $\Delta=144-36=108$. Оскільки $\Delta>0$ і $A>0$, то у точці P_2 функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при $x=2$, $y=1$: $z_{\min}=8+6-30-12=-28$.

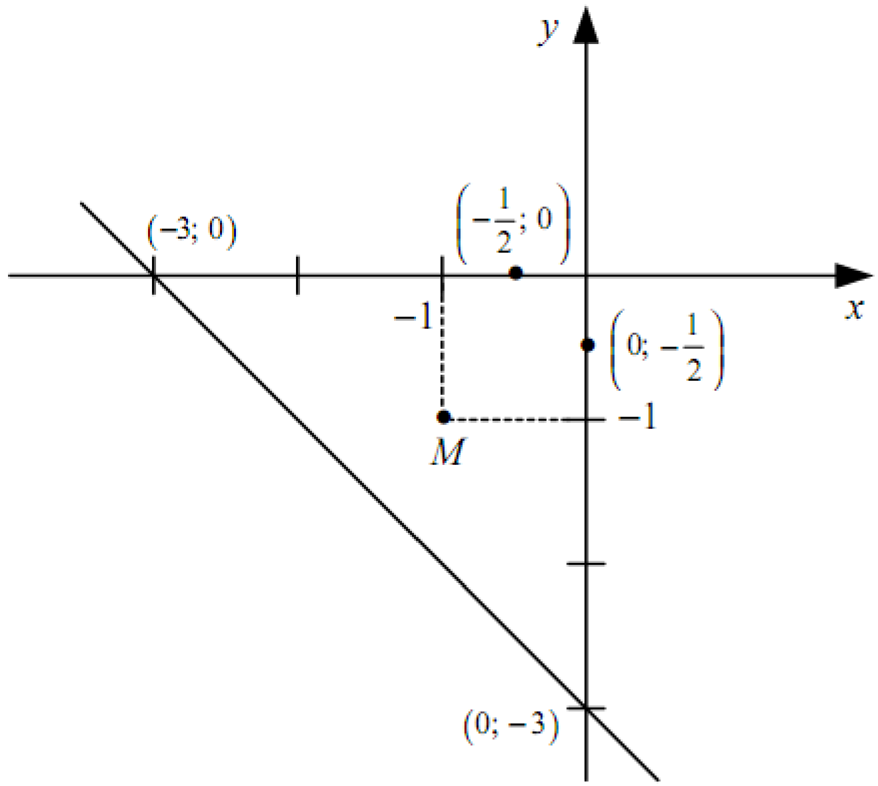
3) Точки P_3: $A=-6$, $B=-12$, $C=-6$; $\Delta=36-144=-108$. Оскільки $\Delta<0$, то у точці P_3 екстремуму немає.

4) Точка P_4: $A=-12$, $B=-6$, $C=-12$; $\Delta=144-36=108$. Оскільки $\Delta>0$ і $A<0$, то у точці P_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\max}=-8-6+30+12=28$. $\lrcorner$

ЗАДАЧА 2

Визначити найбільше і найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в області $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y\ge -3$.

Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1; -1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу (див. розділ 5) на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції:

$z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$: $2y + 1 = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le x \le 0$.

$z' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1$.

$z' = 0$: $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2} \in [-3, 0]$.

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $x+y=-3$, або $y=-3-x$ маємо функцію $z=x^2+(-3-x)^2-x\cdot(-3-x)+x+(-3-x)=3x^2+9x+6$ на відрізку $-3\le x\le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$z'=\left(3x^2+9x+6\right)'=6x+9$.

$z'=0$: $6x+9=0$, $x=-\dfrac{3}{2}\in[-3,\,0]$.

$z\left(-\dfrac{3}{2}\right)=3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+6=-\dfrac{3}{4}$,

$z(-3)=3\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)+6=6$,

$z(0)=0+0+6=6$.

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}}=6$ у точках $(0;-3)$ і $(-3;0)$; $z_{\text{найм.}}=-1$ у стаціонарній точці $M(-1;-1)$. ⌋

ЗАДАЧА 3

Знайти екстремуми функції $z=6-4x-3y$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $x^2+y^2=1$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$F(x,\,y,\,\lambda)=6-4x-3y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right).$$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-4+2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-3+2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1$.

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}-4+2\lambda x=0\\-3+2\lambda y=0\\x^2+y^2=1,\end{cases}$$

розв'язуючи яку знаходимо

$$\lambda_1=\frac{5}{2},\ x_1=\frac{4}{5},\ y_1=\frac{3}{5}\ \text{ і }\ \lambda_2=-\frac{5}{2},\ x_2=-\frac{4}{5},\ y_2=-\frac{3}{5}.$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x, y)$ має у точці (x_0, y_0, λ_0) умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda .$$

При $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $x = \dfrac{4}{5}$, $y = \dfrac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1,4 \\ 0 & 5 & 1,2 \\ 1,4 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0 .$$

Отже, у точці $\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$ функція має умовний мінімум.

При $\lambda = -\dfrac{5}{2}$, $x = -\dfrac{4}{5}$, $y = -\dfrac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0 .$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний максимум.

Таким чином,

$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11$, $\qquad$ $z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$.