Тема: Добутки векторів

1. Скалярний добуток векторів

<u>Означення 1</u>. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Для скалярного добутку введемо позначення $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначимо через φ або $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Тоді за означенням скалярного добутку можна записати

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad (0\le\varphi\le\pi). \qquad (1)$$

Властивості скалярного добутку.

Алгебраїчні:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативна властивість).

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (асоціативна властивість відносно множення на число λ).

3) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивна властивість відносно додавання векторів).

Геометричні:

4) $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ (для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$).

6) Якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, то $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ – гострий;

якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, то $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ – тупий.

Теорема 1 (про обчислення скалярного добутку в координатах)

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано своїми координатами в декартовій прямокутній системі координат $\vec{a}\left(x_1; y_1; z_1\right)$, $\vec{b}\left(x_2; y_2; z_2\right)$, то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 . \qquad (2)$$

(Доведення теореми у додатку 1)

Основні застосування скалярного добутку:

1) Кут між векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} . \qquad (3)$$

2) Критерій ортогональності векторів

для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 . \qquad (4)$$

3) Довжина вектора:

справедлива формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} \qquad (5)$$

(наслідок властивості 4) або у координатній формі

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} . \qquad (6)$$

4) Проекція вектора:

справедлива формула $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$. (7)

5) Робота постійної сили:

Робота A, яку виконує сила $\vec{F}$, що прямолінійно переміщує матеріальну точку з положення M у положення N. знаходиться за формулою

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|\cos\varphi, \qquad (8)$$

де $\vec{S}=\overrightarrow{MN}$ – вектор переміщення, φ – кут між напрямом сили та переміщенням.

Приклади

1. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\varphi=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

За формулою (1) маємо $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi=2\cdot3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=3$.

2. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\left(1;\,-2;\,3\right)$, $\vec{b}=\left(3;\,2;\,1\right)$.

За формулою (2) маємо $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=1\cdot 3+\left(-2\right)\cdot 2+3\cdot 1=2$.

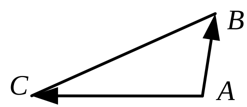
3. Показати, що вектори $\vec{a}=\left(1;\,-3;\,0\right)$ і $\vec{b}=\left(6;\,2;\,1\right)$ взаємно перпендикулярні.

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot6+\left(-3\right)\cdot2+0\cdot1=0$, то за властивістю 6 кут $\varphi=90^\circ$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

4. Трикутник заданий вершинами $A\left(0;\,-1;\,2\right)$, $B\left(-1;\,-2;\,7\right)$, $C\left(1;\,-2;\,6\right)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A.

Знаходимо: $\overrightarrow{AB}=\left(-1;\,-1;\,5\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(1;\,-1;\,4\right)$. Тоді за формулою (3)

$$\cos\angle A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\left(-1\right)\cdot1+\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)+5\cdot4}{\sqrt{\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2+5^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2+4^2}}=\frac{20}{9\sqrt{6}}\approx0{,}91,$$ звідки $\angle A\approx25^\circ$.



5*. (Самостійно) Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=(3;-2;-5)$, що прямолінійно переміщує матеріальну точку з положення $M(2;-3;5)$ у положення $N(3;-2;-1)$.

Знаходимо $\vec{S}=\overrightarrow{MN}=(1;1;-6)$.

Тоді шукана робота за формулою (8) $A=\vec{F}\cdot\vec{S}=3\cdot1+(-2)\cdot1+(-5)\cdot(-6)=31$.

6*. (Самостійно) Знайти проекцію вектора $3\vec{a}+2\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=60^\circ$.

З властивості 8 маємо, що $\text{пр}_{\vec{a}}\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)}{|\vec{a}|}$. Далі знаходимо

$$\text{пр}_{\vec{a}}\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)=\frac{3\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{3|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi}{|\vec{a}|}=\frac{3\cdot3^2+2\cdot3\cdot2\cos60^\circ}{3}=\frac{27+12\cdot\frac{1}{2}}{3}=11.$$

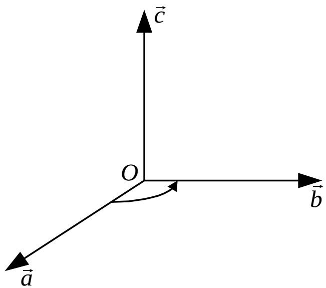
2. Векторний добуток векторів

<u>Означення 2</u>. *Векторним добутком* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що визначається такими трьома умовами:

а) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = \left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$;

в) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку:



упорядкована трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарних векторів називається *правою*, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ менший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти руху годинникової стрілки (див. рисунок); у противному разі трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *лівою*.

Векторний добуток позначають $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$;

2) $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$;

3) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a}\times\vec{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\parallel\vec{b}$;

5) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку;

6) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

Ілюструє геометричні властивості векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ наступний рисунок:

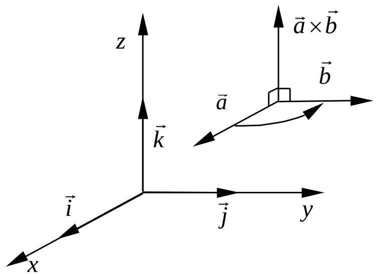


Рис. 1

Теорема (про обчислення векторного добутку в координатах)

Якщо $\vec{a}\left(x_1; y_1; z_1\right)$ і $\vec{b}\left(x_2; y_2; z_2\right)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

(Доведення у додатку 3)

Основні застосування векторного добутку:

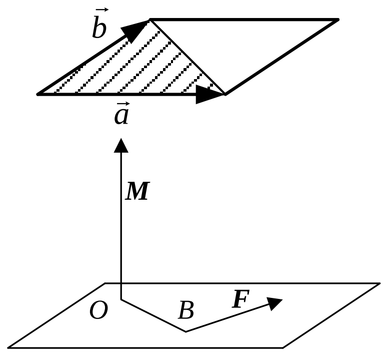
1) Обчислення площ паралелограма та трикутника побудованих на двох векторах віднесених до спільного початку:

$$S_{парал.} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \qquad (10)$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \qquad (10')$$

2) Момент $\overrightarrow{M}$ сили $\overrightarrow{F}$, прикладеної до точки A, відносно точки O знаходиться за формулою

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F}\,. \qquad (11)$$



Приклади

1. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1;\, -1;\, 2)$, $\vec{b} = (3;\, 2;\, 1)$.

За формулою (9) маємо $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$.

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (3;\, -1;\, -2)$ і $\vec{b} = (1;\, 2;\, -1)$.

За властивістю 5 шукана площа S паралелограма рівна $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Далі знаходимо

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}\ .$$

Тоді шукана площа $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{5^2+1^2+7^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ (кв. од).

3*. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;\,2;\,0)$, $B(0;\,-2;\,1)$, $C(-1;\,0;2)$. Обчислити довжину висоти CD.

Площа ΔABC рівна половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ (формула (10')).

Знаходимо $\overrightarrow{AB}=(-1;\,-4;\,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;\,-2;\,2)$ і

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k}\,.$$

Тоді $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+0^2+(-6)^2}=3\sqrt{2}$ (кв. од.)

З іншого боку, $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|$. Звідси $CD=\left|\overrightarrow{CD}\right|=\dfrac{2S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{2\cdot3\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=2$.

4*. Знайти момент сили $\vec{F}=(2;\,-4;\,5)$, прикладеної до точки $A(4;\,-2;\,3)$, відносно точки $B(3;\,2;\,-1)$.

Шуканий момент сили $\overrightarrow{M}$ знаходиться за формулою (11) $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}$. Оскільки $\overrightarrow{BA}=(1;-4;\,4)$, то

$$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=-4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\,.$$

3. Мішаний добуток векторів

<u>Означення 3</u>. ***Мішаним (векторно-скалярним) добутком*** трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ (спочатку знаходиться векторний добуток векторів $\vec{a}\times\vec{b}$, а потім одержаний вектор скалярно множиться на вектор $\vec{c}$).

Позначення: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Теорема (про обчислення мішаного добутку в координатах)

Якщо в декартовому прямокутному базисі задано три вектори $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)$, $\vec{c}\left(x_3;y_3;z_3\right)$, то їх мішаний добуток можна знайти за формулою (правило визначника):

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

<u>Доведення</u>. Дійсно, якщо $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ і $\vec{c}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3$. Справа в отриманій рівності маємо розклад визначника (10) за елементами третього рядка, що і доводить теорему.

Властивості мішаного добутку:

1) якщо у мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$;

2) при циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$;

3) у мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутку можна міняти місцями:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right);$$

4) якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ утворюють праву трійку; а якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$ – то ліву трійку векторів;

5) вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$;

6) **м**ішаний добуток трьох некомпланарних векторів дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, зі знаком “+”, якщо трійка векторів – права і зі знаком “-“, якщо ця трійка – ліва.

Доведення. (опрацювати самостійно) Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. Оскільки трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ також є правою, то вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}\times\vec{b}$ розміщені в одному півпросторі по відношенню до площини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1).

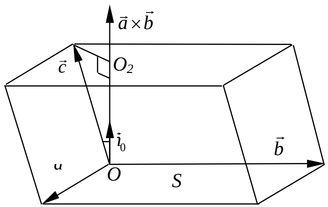


Рис. 1

Позначимо через $\vec{n}_0$ одиничний вектор у напрямку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, а через S – площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Очевидно, що кут $\angle\left(\vec{n}_0,\,\vec{c}\right)$ – гострий.

За означенням

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=S\vec{n}_0\cdot\vec{c},$$

але

$$\vec{n}_0\cdot\vec{c}=1\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\angle\left(\vec{n}_0,\,\vec{c}\right)=h,$$

де h – висота паралелепіпеда (рис. 1). Отже,

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = Sh = V \ \text{– об'єм паралелепіпеда}$$

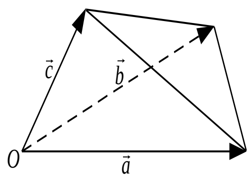
Нехай тепер вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють ліву трійку. Тоді трійка векторів $\vec{a},\vec{b},(-\vec{c})$ буде правою. Згідно з доведеним вище

$$\vec{a}\,\vec{b}\,(-\vec{c}) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot(-\vec{c}) = V \Leftrightarrow -\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = V \Leftrightarrow \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -V \ .$$

Отже, для будь-якої трійки векторів

$$V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|. \qquad (13)$$

Наслідок властивості 6. Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які віднесені до спільного початку (див. Додаток 4), рівний $V_{піраміди} = \dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.



Приклади.

1. Обчислити $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ двома способами, якщо $\vec{a} = (3;\, 6;\, 3)$, $\vec{b} = (1;\, 3;\, -2)$, $\vec{c} = (2;\, 2;\, 2)$.

а) За формулою (9) знаходимо спочатку векторний добуток:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -21\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k} \ .$$

Далі маємо
$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = (-21)\cdot 2 + 9\cdot 2 + 3\cdot 2 = -18$.

б) За формулою (12) знаходимо

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3(6+4) - 6(2+4) + 3(2-6) = -18 .$$

2. Яку трійку, праву чи ліву, утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (-1;\ 0;\ 2)$, $\vec{c} = (1;\ -2;\ 5)$?

Оскільки за формулою (12)

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0 ,$$

то згідно з властивістю 4 дані вектори утворюють праву трійку.

3. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = (1;\ 4;-3)$, $\vec{b} = (1;\ 0;\ 2)$ і $\vec{c} = (-2;\ 2;\ 5)$.

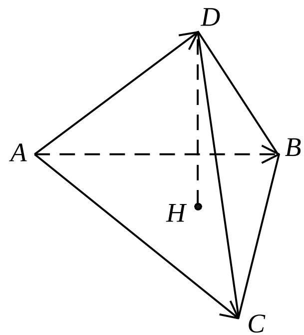
За формулою (12)

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -46 .$$

Тоді шуканий об'єм

$$V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = |-46| = 46 \text{ (куб. од.).}$$

4*. Дано вершини тетраедра $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(9;\ 6;\ 4)$, $C(3;\ 0;\ 4)$, $D(5;\ 2;\ 6)$. Обчислити довжину висоти DH тетраедра.



Скористаємося формулою $V = \frac{1}{3} S \left| \overrightarrow{DH} \right|$, де V – об'єм тетраедра, а S – площа ΔABC.

Знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{AB} = (8;\ 4;\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2;\ -2;\ 1)$, $\overrightarrow{AD} = (4;\ 0;\ 3)$.

За формулою (9) маємо $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 24\vec{k}$.

Далі, $S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-24)^2} = 9\sqrt{2}$ (кв. од.).

Тоді знаходимо $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AD} = 6 \cdot 4 + (-6) \cdot 0 + (-24) \cdot 3 = -48$.

За властивістю 6 знаходимо об'єм тетраедра

$$V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-48| = 8 \text{ (куб. од.).}$$

Отже,

$$DH = \left| \overrightarrow{DH} \right| = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 8}{9\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Додаток 1. Доведення теореми про обчислення скалярного добутку в координатах

Подамо вектори у вигляді розкладу за базисом: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)\cdot\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$
$$= x_1x_2\vec{i}\cdot\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\cdot\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\cdot\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\cdot\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\cdot\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\cdot\vec{k} =$$
$$= x_1x_2\vec{i}^{\,2} + 0 + 0 + 0 + y_1y_2\vec{j}^{\,2} + 0 + 0 + 0 + z_1z_2\vec{k}^{\,2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Спочатку ми скористались властивостями 2 і 3 скалярного добутку. Потім врахували, що базисні вектори попарно ортогональні (властивість 5: $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$) і використали властивіть 4 ($\vec{i}^{\,2} = \left|\vec{i}\right|^2$)та $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$.

Додаток 2*. Геометричний зміст декартових прямокутних координат

Нехай задано вектор $\vec{a}(x;\, y;\, z)_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}}$. Запишемо його розклад у базисі $\{\vec{i};\,\vec{j};\,\vec{k}\}$:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \qquad (1)$$

Помноживши обидві частини рівності (1) скалярно на вектор $\vec{i}$ і врахувавши, що $\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$, $\vec{i}\cdot\vec{k} = 0$, отримуємо

$$\vec{a}\cdot\vec{i} = x \;\Leftrightarrow\; x = \text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a}\,. \qquad (2)$$

Аналогічно, помноживши обидві частини рівності (1) скалярно на вектор $\vec{j}$, а потім скалярно на вектор $\vec{k}$, будемо мати

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{j} = y \;&\Leftrightarrow\; y = \text{пр}_{\vec{j}}\,\vec{a}, \\ \vec{a}\cdot\vec{k} = z \;&\Leftrightarrow\; z = \text{пр}_{\vec{k}}\,\vec{a}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Отже, декартові прямокутні координати вектора є ортогональними проекціями цього вектора на координатні осі. Тому розклад вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{i};\,\vec{j};\,\vec{k}\}$ (формулу (1)) можна подати у вигляді

$$\vec{a} = \left(\vec{a}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{a}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{a}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}\,. \qquad (4)$$

Відмітимо також, що формули (2) і (3) можна записати ще так:

$$x = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right),\; y = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right),\; z = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{k},\vec{a}}\right), \qquad (5)$$

де $\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{k},\vec{a}}\right)$ – кути між базисними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ і вектором $\vec{a}$.

Дійсно, наприклад, $x = \vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}||\vec{i}|\cos\left(\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right) = |\vec{a}|\cos\left(\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right)$.

Напрям вектора $\vec{a}$ повністю характеризується одиничним вектором $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Координати цього вектора отримуються з координат вектора $\vec{a}$ діленням на $|\vec{a}|$. Тому, використовуючи формули (5), для координат одиничного вектора можна записати

$$\vec{a}_0\left(\cos\left(\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right); \cos\left(\vec{j}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right); \cos\left(\vec{k}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right)\right)_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}}. \qquad (6)$$

<u>**Означення 1**</u>. Косинуси трьох кутів з (6), утворених координатними осями декартової прямокутної системи координат з вектором $\vec{a}$, називаються ***напрямними косинусами*** вектора $\vec{a}$.

Отже, напрям довільного вектора $\vec{a}$ повністю визначається напрямними косинусами цього вектора.

Оскільки $|\vec{a}_0|^2 = 1$, то маємо

$$\cos^2\left(\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right) + \cos^2\left(\vec{j}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right) + \cos^2\left(\vec{k}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right) = 1. \qquad (7)$$

Додаток 3. Доведення теореми про обчислення векторного добутку в координатах

Подамо вектори у вигляді розкладу за базисом: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тоді скористаємось властивостями 3 та 2 векторного добутку

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \times \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= x_1x_2\vec{i}\times\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\times\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\times\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\times\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\times\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\times\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\times\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\times\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\times\vec{k} \boxed{=}$$

Далі використаємо властивості 1 та 4 і згрупуємо подібні доданки:

$$\boxed{=} x_1x_2\cdot 0 + x_1y_2\vec{i}\times\vec{j} - x_1z_2\vec{k}\times\vec{i} - y_1x_2\vec{i}\times\vec{j} + y_1y_2\cdot 0 + y_1z_2\vec{j}\times\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\times\vec{i} - z_1y_2\vec{j}\times\vec{k} + z_1z_2\cdot 0 =$$

$$= \left(y_1z_2 - z_1y_2\right)\vec{j}\times\vec{k} - \left(x_1z_2 - z_1x_2\right)\vec{k}\times\vec{i} + \left(x_1y_2 - y_1x_2\right)\vec{i}\times\vec{j} =$$

$$= \left(y_1z_2 - z_1y_2\right)\vec{i} - \left(x_1z_2 - z_1x_2\right)\vec{j} + \left(x_1y_2 - y_1x_2\right)\vec{k} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Ми використали також властивість 6 і згорнули одержаний вираз у визначник, який називають *умовним*.

Додаток 4. Знаходження об'єму трикутної піраміди

Нехай дано трикутну піраміду $M_1M_2M_3M_4$ (рис. 2).

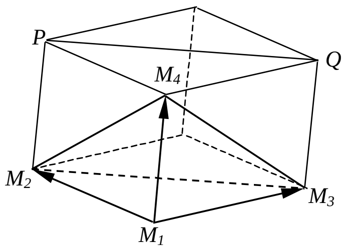


Рис. 2

На ребрах M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4 побудуємо паралелепіпед. Об'єм трикутної піраміди дорівнює $\frac{1}{3}$ об'єму призми $M_1M_2M_3M_4PQ$. Об'єм цієї призми у свою чергу дорівнює $\frac{1}{2}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

Тому об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$ дорівнює $\frac{1}{6}$ об'єму цього паралелепіпеда.

Отже,

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}\right)\right|. \qquad (*)$$

Якщо $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, $M_4(x_4;y_4;z_4)$, то формулу (*) можна записати у координатній формі:

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|.$$

Нагадаємо, що визначник береться по модулю тому, що мішаний добуток додатний, якщо трійка векторів – права, і від'ємний, якщо ця трійка – ліва.

Додаток 5**. Подвійний векторний добуток

Нехай $\vec{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(b_1;b_2;b_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{c}\left(c_1;c_2;c_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – довільні вектори.

<u>Означення 1</u>. Вектор $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ називається подвійним векторним добутком.

Наступна теорема дає просте правило знаходження подвійного векторного добутку.

Теорема 1. Для довільних трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедлива формула

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}, \qquad (1)$$

де $\vec{a}\cdot\vec{c}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$, а $\vec{a}\cdot\vec{b}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

<u>Доведення</u>. Оскільки

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\vec{k}, \quad \text{то}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ \begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_2b_1c_2-a_2b_2c_1+a_3b_1c_3-a_3b_3c_1\right)\vec{i}+\left(a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+a_3b_2c_3-a_3b_3c_2\right)\vec{j}+$$

$$+\left(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 + a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3\right)\vec{k} =$$

$$=\left[b_1\left(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3\right) - c_1\left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)\right]\vec{i} +$$

$$+\left[b_2\left(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3\right) - c_2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)\right]\vec{j} +$$

$$+\left[b_3\left(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3\right) - c_3\left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)\right]\vec{k} =$$

$$=\left(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3\right)\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) - \left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)\left(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\right) =$$

$$=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\,.$$

Теорема 2. Для довільних трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедлива тотожність

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) + \vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{0}\,. \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1 маємо:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\,,$$

$$\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{c} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\,,$$

$$\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a} - \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\,.$$

Додаючи почленно ці рівності і використовуючи комутативність скалярного добутку $\left(\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\right)$, приходимо до тотожності (2).