Частинні похідні складених функцій кількох змінних

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u, v – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовні функції), то частинні похідні z по u і v знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 y - y^2 x$, де $x = u \cdot \cos v$,

$$y = u \cdot \sin v.$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^2 - y^2 x\right)_x' = 2xy - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - y^2 x\right)_y' = x^2 - 2xy$,

$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot \cos v)_u' = \cos v$, $\frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot \cos v)_v' = -u \sin v$,

$\frac{\partial y}{\partial u} = (u \cdot \sin v)_u' = \sin v$, $\frac{\partial y}{\partial v} = (u \cdot \sin v)_v' = u \cos v$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \cos v + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \sin v =$$

$$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \cos v +$$

$$+ \left(u^2 \cos^2 v - 2u \cos v \cdot u \sin v\right) \cdot \sin v =$$

$$= u^2 \sin v \cos v \left(2\cos v - \sin v\right) + u^2 \sin v \cos v \left(\cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^2 \sin v \cos v \left(2\cos v - \sin v + \cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^2 \sin v \cos v \left(3\cos v - 3\sin v\right) = 3u^2 \sin v \cos v \left(\cos v - \sin v\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(2xy - y^2\right)\cdot\left(-u\sin v\right) + \left(x^2 - 2xy\right)\cdot u\cos v =$$

.....

Похідна функції за напрямом

Похідною функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ *за напрямом* $\vec{e} = \overrightarrow{PP_1}$ називається

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \lim_{PP_1 \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{PP_1},$$

де $f(P)$ і $f(P_1)$ – значення функції у точках P і P_1, PP_1 – відстань між цими точками.

Якщо функція z диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

де α – кут, що утворює вектор $\vec{e}$ з віссю Ox.

Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(3; 1)$ у напрямі від цієї точки до точки $N(6; 5)$.

$\ulcorner$ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3\cdot 1 + 3\cdot 1^2 = 12;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -3\cdot 3^2 + 6\cdot 3\cdot 1 = -9.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{e} = \overrightarrow{PN}$: $\vec{e} = \{6-3; 5-1\} = \{3; 4\}$.

Знайдемо координати орта $\vec{e}_0$ вектора $\vec{e}$:

$$|\vec{e}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5, \quad \vec{e}_0 = \left\{\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right\}.$$

Звідси $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

$$\frac{\partial z}{\partial e} = 12 \cdot \frac{3}{5} + (-9) \cdot \frac{4}{5} = 0 .$$

Градієнт функції

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} .$$

Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P(1; 1)$.

$\ulcorner$ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1$.

Отже, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} z = 2\vec{i} + \vec{j}$. $\lrcorner$