За означенням *частинна похідна* функції $z=f(x,y)$ у точці $P(x;y)$ *по змінній* x –

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Частинна похідна по змінній y –

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ використовують також інші позначення – відповідно z'_x, $f'_x(x,y)$ та z'_y, $f'_y(x,y)$.

Для похідних другого порядку використовують позначення

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Знайти частинні похідні функцій:

$$z = x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1 .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x' = \left(x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1\right)_x' = 3x^2 y^4 + 4x ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y' = \left(x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1\right)_y' = 4x^3 y^3 - 3y^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(3x^2 y^4 + 4x\right)_x' = 6xy^4 + 4 ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(4x^3 y^3 - 3y^2\right)_y' = 12x^3 y^2 - 6y ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(3x^2 y^4 + 4x\right)_y' = 12x^2 y^3 ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(4x^3 y^4 - 3y^2\right)_x' = 12x^2 y^3 .$$

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Знайти повні диференціали функцій:

$$z = x^2 y^3 .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 y^3\right)_x' = 2xy^3 ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y^3\right)_y'=x^2\cdot 3y^2=3x^2y^2;$$

$$dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy. \quad \lrcorner$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\ulcorner \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_x'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_y'=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy. \quad \lrcorner$$

Якщо рівняння $F(x, y, z)=0$, де $F(x, y, z)$ – диференційовна функція змінних x, y і z, визначає z як функцію незалежних змінних x і y і $F_z'(x, y, z)\neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)},$$

де $z=z(x,y)$.

Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

$\ulcorner$ Позначимо $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y$.

Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x, y, z) = 2x$, $F_y'(x, y, z) = -4y - z + 1$, $F_z'(x, y, z) = 6z - y$.

За формулами (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{6z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}. \quad \lrcorner$$