

1. Знайти рівняння дотичної та нормалі до функції в точці

Рівняння дотичної в точці $M(x_0; y_0)$ запишеться у вигляді

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі в цій точці буде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

$$y = x^3 - 4x + 6; M_0(1; 3).$$

┌ Знайдемо похідну заданої функції: $y' = 3x^2 - 4$. За умовою

$$x_0 = 1. \text{ Тому } y'(1) = 3(1)^2 - 4 = 3 - 4 = -1.$$

Тоді шукане рівняння дотичної

$$y - 3 = (-1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = -x + 1 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0. \quad \lrcorner$$

Рівняння нормалі $x - y + 2 = 0$.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}, \quad [0, 5].$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

а) $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3;$

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

Обчислимо значення функції в точках $x=1$, $x=3$ і на кінцях відрізка: $f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 - \frac{1}{3} = 1$, $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$,
 $y(0) = -\frac{1}{3}$, $f(5) = \frac{19}{3}$.

Серед знайдених чисел вибираємо найбільше і найменше:
 $M = \max_{[0,5]} f(x) = f(5) = \frac{19}{3}$, $m = \min_{[0,5]} f(x) = f(0) = f(3) = -\frac{1}{3}$. \perp

3. Знайти границю за допомогою правила Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}.$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)'}{(x^2)'} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 \sin 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos 3x}{2} = \frac{9}{2} = 4,5. \quad \perp$$

4. Виконати загальне дослідження функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність (непарність).
3. Дослідити функцію на періодичність.
4. Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями.
5. Знайти рівняння асимптот (якщо вони існують).
6. Дослідити поведінку функції в точках розриву.
7. Знайти інтервали монотонності функції.
8. Дослідити функцію на екстремум.
9. Знайти інтервали опуклості та вгнутості функції та точки перегину.
10. Побудувати графік функції (з огляду на виконані пункти 1-9).