1. Продиференціювати показниково-степеневу функцію

Для диференціювання показниково-степеневої функції $y = u^{v}$

$\ln y = \ln u^{v}$ $\ln y = v \ln u$.

Знайдемо похідну неявної функції $\ln y$ зліва і похідну добутку функцій справа.

$$(\ln y)' = (v \ln u)'; \ \frac{1}{y} y' = v' \ln u + v(\ln u)'; \ y' = y\left(v' \ln u + v \frac{1}{u} u'\right),$$

$$y' = u^{v}\left(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u} u'\right).$$

$$\boxed{y' = u^{v} \ln u \cdot v' + u^{v-1} \cdot v \cdot u'}.$$

$y = x^{\sin 5x}$. Тут $u = x$; $v = \sin 5x$.

$$y' = x^{\sin 5x} \ln x \cdot (\sin 5x)' + x^{\sin 5x - 1} \cdot \sin 5x (x)' =$$
$$= 5x^{\sin 5x} \ln x \cdot \cos 5x + x^{\sin 5x - 1} \cdot \sin 5x.$$

2. Знайти похідну функції, що задана неявно

$$x^{3} + \ln y - x^{2} e^{y} = 0.$$

⌈ 1) Диференціюючи ліву і праву частини рівняння по x, одержуємо

$$3x^2+\frac{1}{y}y'-\left(2xe^y+x^2e^yy'\right)=0.$$

2) Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$3x^2+\frac{y'}{y}-2xe^y-x^2e^yy'=0, \quad y'\left(\frac{1}{y}-x^2e^y\right)=2xe^y-3x^2,$$

$$y'\cdot\frac{1-x^2ye^y}{y}=x\left(2e^y-3x\right), \quad y'=\frac{xy\left(2e^y-3x\right)}{1-x^2ye^y}. \quad ⌋$$

3. Знайти похідну вищого порядку

Якщо функція $y=f(x)$ *диференційовна на* деякому *інтервалі* (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку (друга похідна)* цієї функції знаходиться за формулою $y''=(y')'$. Таким чином, друга похідна від заданої функції є похідна від її першої похідної.

$$y=x^5-7x^3+2; \; y'''=?.$$

$$y'=5x^4-7\cdot 3x^2=5x^4-21x^2;$$

$$y''=(y')'=\left(5x^4-21x^2\right)'=20x^3-21\cdot 2x=20x^3-42x.$$

$$y'''=(y'')'=\left(20x^3-42x\right)'=60x^2-42=6\left(10x^2-7\right). \quad ⌋$$

4. Знайти похідну функції, що задана параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ t \text{ – параметр, } t \in T.$$

Її похідна обчислюється за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Маємо $\quad x'_t = \dfrac{1}{\cos^2 t}, \quad y'_t = \cos t$.

$$y' = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{\cos t}{\dfrac{1}{\cos^2 t}} = \cos^3 t.$$

5. Обчислити наближено значення функції, використовуючи диференціал

Оскільки $\Delta y \approx dy$, то при малих Δx

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x}.$$

Приклад. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

$$\operatorname{arctg}(1 + 0{,}05) \approx \operatorname{arctg} 1 + (\operatorname{arctg} x)'\Big|_{x=1} \cdot 0{,}05$$

$$\approx \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)\Bigg|_{x=1} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}811.$$