Приклад 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}.$$

Підстановкою значення $x=1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

Розглянемо рівняння $2x^2+x-3=0$. Його коренями є числа $x_1=1$ та $x_2=-\frac{3}{2}$.

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2+5x-6=0$, одержимо $x_1=1$, $x_2=-6$ та $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$.

Тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+6}=\frac{2\cdot 1+3}{7+6}=\frac{5}{7}.$$

Правило 1. *Для того щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при* $x\to x_0$ *чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність* $\frac{0}{0}$*), потрібно скоротити дріб на* $(x-x_0)$ *і перейти до границі.*

Приклад 2.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$. При $x=-2$ знаменник не дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}=\frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2-(-2)-2}=\frac{0}{4}=0,$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}.$$

При $x=2$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю, тобто маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x+7-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{2+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Правило 2. *Для того щоб знайти границю функції, яка є часткою двох ірраціональних функцій, у випадку, коли при $x\to x_0$ чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність $\frac{0}{0}$), потрібно помножити чисельник та знаменник дробу на вираз спряжений до кожного ірраціонального виразу, скоротити після цього дріб на $(x-x_0)$ і перейти до границі.*

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x}.$$

Тобто, ми маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$.

Щоб розкрити дану невизначеність, поділимо чисельник та знаменник дробу на x^2 і одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2+0-0}{4-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Правило 3. *Для обчислення границі частки двох многочленів при* $x \to \infty$ *(невизначеність типу* $\frac{\infty}{\infty}$*) потрібно поділити чисельник та знаменник дробу на найвищий степінь змінної, що зустрічається під знаком границі, та скористатись тим, що всі функції вигляду* $\frac{a}{x^n}$ $\left(a \in R,\, n \in N\right)$ *при* $x \to \infty$ *є нескінченно малими.*