Лекція 5.

Тема. Пряма на площині. Площина в просторі. Пряма в просторі.

2. Параметричне та канонічне рівняння прямої.

Якщо пряма l розглядається на площині і задається точкою $M_0(x_0;\ y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s}=(m;n)$, то, прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0+\vec{s}t$ за формулою (1.4), маємо

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt. \qquad (1.5)$$

Звідки, виражаючи параметр t з обох частин формул (1.5) і прирівнюючи їх, отримаємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (1.6)$$

Рівняння (1.5) називаються параметричними рівняннями прямої, а рівняння (1.6) — її канонічним рівнянням.

Зокрема, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно осі Ox, то її напрямний вектор $\vec{s}=(m;0)$, тому рівняння (1.6) набирає вигляду

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{0}$$

Як відомо, добуток середніх членів пропорції дорівнює добутку крайніх членів. Тому маємо $(y-y_0)\cdot m=(x-x_0)\cdot 0$, звідки $y=y_0$. Це і є рівняння прямої, яка паралельна осі Ox.

Аналогічно, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно осі Oy, то її рівнянням є $x=x_0$.

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$, дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (1.7)$$

Рівняння (12) називається рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.

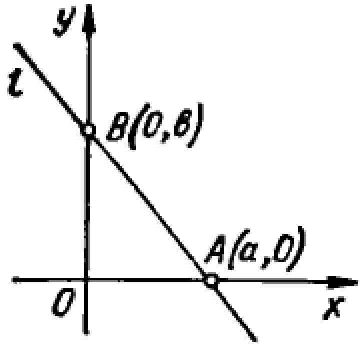

Рис. 10

4. Рівняння прямої у відрізках на осях.

Якщо пряма проходить через точки $A(a;0)$ та $B(0;b)$, тобто відтинає на осях відрізки a та b (рис. 11), то з рівняння (1.7) маємо

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \quad \text{або} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1.8)$$

Рівняння (1.8) називається рівнянням прямої у відрізках на осях.

5. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого ненульового вектора.

Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1;\ y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n}=(A;B)$.

Візьмемо на прямій l довільну точку (рис. 11) $M(x;y)$ і введемо вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0\ . \qquad (1.9)$$

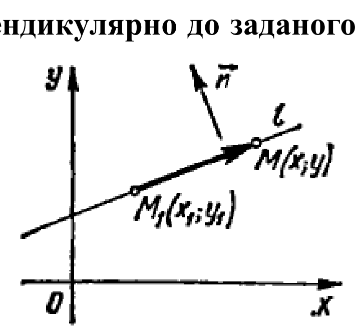

Рис. 11

Рівняння (1.9) називається рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

Вектор $\vec{n}=(A;B)$ називається нормальним вектором прямої. Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, отже, їхні відповідні координати пропорційні.

6. Загальне рівняння прямої та його дослідження.

Розкриємо дужки в рівнянні (1.9), в результаті отримаємо рівняння

$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0.$$

Якщо ми позначимо в ньому через C вираз $C = -Ax_1 - By_1$, то отримаємо загальне рівняння прямої на площині.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1.10)$$

Коефіцієнти A і B при невідомих x і y загального рівняння є координатами її нормального вектора.

Дослідимо загальне рівняння, тобто розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат Oxy залежно від значень коефіцієнтів A, B і C.

1. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то рівняння (1.10) зводиться до рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$,

тобто пряма перетинає осі координат в точках з координатами $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ *і* $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$.

2. Якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox і проходить через точку $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$, *оскільки нормальний вектор $\vec{n} = (0; B)$ прямої перпендикулярний до осі Ox, а координати даної точки задовольняють рівняння прямої.*

3. Аналогічно попередньому, якщо $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

4. Якщо $C = 0$, то пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат, тому що координати точки $O(0; 0)$ задовольняють рівняння прямої.

5. Якщо $A = C = 0$, то згідно з попереднім рівняння $By = 0$ або $y = 0$ визначає вісь Ox.

6. Якщо $B = C = 0$, то рівняння $Ax = 0$ або $x = 0$ визначає вісь Oy.

7. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Якщо в рівнянні (1.10) $B \neq 0$, то знайдемо з нього y. Тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, і якщо ми введемо позначення $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, то отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b\,. \qquad (1.11)$$

Значення $k = tg\,\alpha$, де α — кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox (рис. 1), називається кутовим коефіцієнтом прямої, а величина b — ордината точки перетину прямої з віссю Oy. Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння такої прямої має вигляд

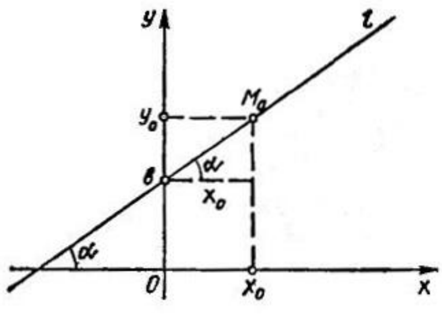

Рис. 1

$$y = kx \qquad (1.12)$$

Пряма, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k, задається рівнянням:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (1.13)$$

2.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами. При цьому слід зазначити, що, вибравши на одній із прямих напрямний вектор, напрямлений в протилежну сторону, дістанемо другий кут, який доповнює перший до π.

а) Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}\ ;\ \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$$

і φ — кут між цими прямими: $\varphi = \left(l_1,^\wedge l_2\right)$, $0 < \varphi < \pi$. Оскільки вектори $\vec{s}_1 = (m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$ є напрямними векторами даних прямих (рис. 2) і $\varphi = \left(\vec{s}_1,^\wedge \vec{s}_2\right)$, то за формулою (4.7) (див. лекцію 4) маємо

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\ |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\ \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \qquad (1.14)$$

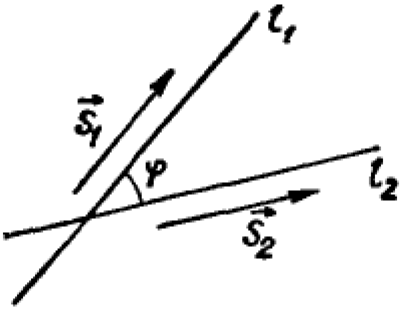

Рис. 2

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ колінеарні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (1.15)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж перпендикулярні і їхній скалярний добуток дорівнює нулю, отже,

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad (1.16)$$

— умова перпендикулярності двох прямих.

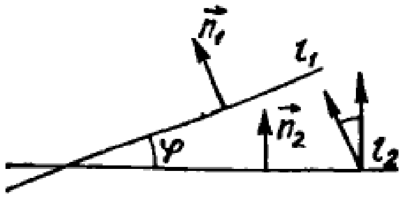

Рис. 3

б) Нехай тепер прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тоді кут φ між ними (рис. 3.) дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$; тому аналогічно випадку а) дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\ |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\ ; \qquad (1.17)$$

2) умову паралельності прямих l_1 і l_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \qquad (1.18)$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \qquad (1.19)$$

в) Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = tg\ \alpha_1$, $k_2 = tg\ \alpha_2$ — кутові коефіцієнти, то з рис. 4 видно, що

$$tg\varphi = tg(\ \alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1\ tg\ \alpha_2}$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (1.20)$$

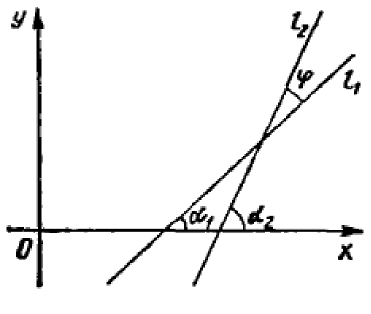

Рис. 4

Зауважимо, що формула (1.20) визначає кут, на який треба повернути пряму l_1 (проти годинникової стрілки), щоб вона збіглась з прямою l_2. Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $tg\varphi = 0$, тому з формули (1.20) маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2 \qquad (1.21)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^\circ$ і $tg\varphi$ не існує, тому що знаменник дробу (1.20) дорівнює нулю. Таким чином, умова перпендикулярності прямих має вигляд

$$k_1 k_2 + 1 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (1.22)$$

Формули (1.14), (1.17) і (1.20) дають змогу визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих. Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа в цих формулах записують по модулю, тоді визначається гострий кут між прямими.

Приклади.

1. Знайти кут між прямими $4x + 3y - 7 = 0$ і $12x - 5y + 9 = 0$.

Розв'язання. Прямі задані своїми загальними рівняннями. Тому відомі їх вектори нормалі $\vec{n}_1 = (4; 3)$ і $\vec{n}_2 = (12; -5)$. Тоді за формулою (1.17) маємо

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\ |\vec{n}_2|} = \frac{4 \cdot 12 + 3 \cdot (-5)}{\sqrt{4^2 + 3^2}\ \sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{48 - 15}{\sqrt{25}\sqrt{169}} = \frac{33}{5 \cdot 13} = \frac{33}{65},$$

$$\varphi = arccos\frac{33}{65}.$$

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-5; 3)$ паралельно прямій $4x - y - 15 = 0$.

Розв'язання. Приведемо задане рівняння до вигляду (1.11): $y = 4x - 15$, отже, кутовий коефіцієнт прямої $k = 4$.

Оскільки шукана і задана прямі паралельні, то за умовою (1,21) їхні кутові коефіцієнти рівні між собою, тому, скориставшись рівнянням (1.13). дістанемо $y - 3 = 4(x + 5)$ або $y = 4x + 23$ або $4x - y + 23 = 0$.

2.3. Відстань від точки до прямої.

Нехай задано пряму l рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точку $M_0(x_0;\ y_0)$. Відстань d (рис. 5) від точки M_0 до прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1;\ y_1)$ —довільна точка прямої l, на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A; B)$. Отже,

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Оскільки $Ax_1 + By_1 + C = 0$, то $-Ax_1 - By_1 = C$, тому

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (1.23)$$

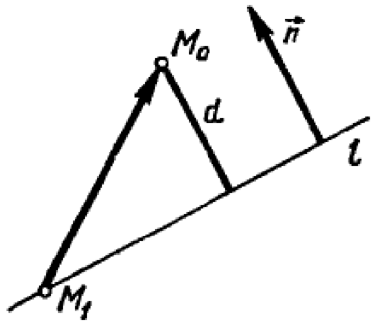

Рис. 5

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(2;\ -7)$ до прямої $4x - 5y + 8 = 0$.
Розв'язання.

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4\cdot2-5\cdot(-7)+8|}{\sqrt{4^2+(-5)^2}} = \frac{|8+35+8|}{\sqrt{16+25}} = \frac{51}{\sqrt{41}} \text{ (лін. од.)}$$

§ 3. Площина в просторі.

3.1. Загальне рівняння площини та його дослідження.

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину Π (рис. 6) точкою $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярним до цієї площини. Візьмемо на площині точку $M(x; y; z)$ і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$. При будь-якому положенні точки M на площині Π вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\ . \qquad (3.1)$$

або

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3.2)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Рівняння (3.1) називається рівнянням площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, а рівняння (3.2) — загальним рівнянням площини.

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ називається нормальним вектором площини. Кожна площина має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні між собою, а їхні координати пропорційні. Отже, всяка площина в прямокутній системі координат визначається рівнянням першого степеня.

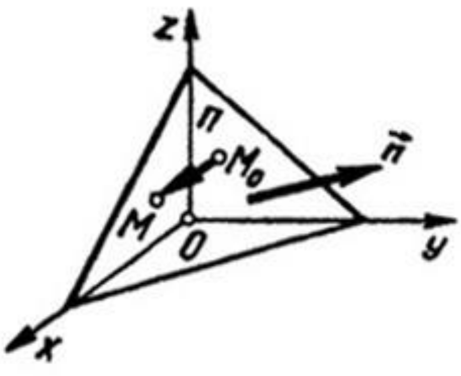

Рис. 6

Дослідимо загальне рівняння площини.

1. Якщо в рівнянні (3.2) $D = 0$, то воно має вигляд $Ax + By + Cz = 0$ Це рівняння задовольняє точка $O = (0; 0; 0)$. Отже, якщо в загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то така площина проходить через початок координат.

2. Якщо $A = 0$, то рівняння (3.2) має вигляд $By + Cz + D = 0$ і визначає площину, нормальний вектор якої $\vec{n} = (0; B; C)$ перпендикулярний до осі Ox. Отже, якщо в загальному рівнянні площини коефіцієнт при змінній x дорівнює нулю, то таке рівняння визначає площину, що паралельна осі Ox.

Аналогічно рівняння $Ax + Cz + D = 0$ визначає площину, паралельну осі Oy, а рівняння $Ax + By + D = 0$ — площину, паралельну Oz.

3. Якщо $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то рівняння (3.2) має вигляд $Cz + D = 0$ або $z = -\frac{D}{C}$. З випадку 2 випливає, що це рівняння визначає площину, яка паралельна осям Ox та Oy (коефіцієнти при x і y дорівнюють 0), тобто площину, паралельну площині Oxy.

Аналогічно площина $By + D = 0$ паралельна площині Oxz, а площина $Ax + D = 0$ паралельна площині Oyz.

4. Якщо в рівнянні (3.2) $A = D = 0$, то площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Ox. Справді, згідно з попереднім, при $D = 0$ площина проходить через початок координат, а при $A = 0$ — паралельно осі Ox, отже, проходить через вісь Ox.

Аналогічно площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy, а площина $Ax + By = 0$ — через вісь Oz.

5. Якщо в рівнянні площини $A = B = D = 0$, то площина $Cz = 0$ або $z = 0$ збігається з площиною Oxy. Аналогічно площина $Ax = 0$ або $x = 0$ збігається з площиною Oyz, а площина $y = 0$ — з площиною Oxz.

Приклади.

I. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;\ -3;\ 4)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (5; -2;\ 7)$,

Розв'язання. Шукане рівняння знаходимо за формулою (3.1):

$$5 \cdot (x-2) + (-2) \cdot \big(y - (-3)\big) + 7 \cdot (z-4) = 0,$$

або

$$5x - 2y + 7z - 32 = 0.$$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;\ -5;\ 2)$ перпендикулярно до осі Oz.

Розв'язання. Орт $\vec{k} = (0; 0;\ 1)$ перпендикулярний до площини, тому його можна розглядати як нормальний вектор. Отже, шукане рівняння має вигляд

$0 \cdot (x-3) + 0 \cdot \big(y - (-5)\big) + 1 \cdot (z-2) = 0$ або $z = 2$.

3.2. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях.

Нехай на площині Π задано три точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину. Знайдемо її рівняння. Візьмемо на площині довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ і запишемо рівняння шуканої прямої:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.3)$$

Маємо рівняння площини, що проходить через три точки.

Зокрема, нехай площина відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c, тобто проходить через точки $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$ і $C(0;\ 0;\ c)$. Підставляючи координати цих точок у формулу (3.3) і розкриваючи визначник, дістанемо

$$xbc + yac + zab - abc = 0 \qquad \text{або} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\,. \qquad (3.4)$$

Рівняння (3.4) називається рівнянням площини у відрізках на осях. Ним зручно користуватись при побудові площини.

Приклади.

1. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;\ -3;\ 1)$, $M_2(4;\ -1;\ 5)$, $M_3(1;\ 4;\ -1)$.

Розв'язання. Підставимо координата точок у рівняння (3.3):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-(-3) & z-1 \\ 4-2 & -1-(-3) & 5-1 \\ 1-2 & 4-(-3) & -1-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 7 & -2\end{vmatrix}-(y+3)\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 7\end{vmatrix}=0$$

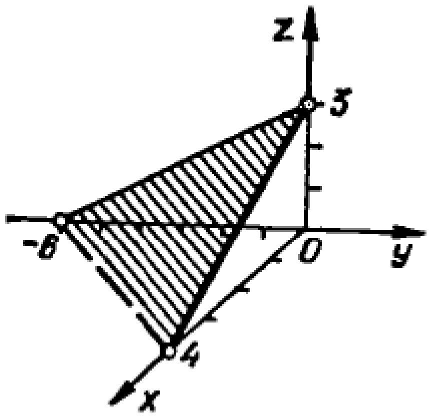

Рис. 7.

Обчислюючи визначники другого порядку, знаходимо шукане рівняння:
$(x-2)\cdot(-4-28)-(y+3)\cdot(-4+4)+(z-1)\cdot(14+2)=0$ або $(x-2)\cdot(-32)-(y+3)\cdot 0+(z-1)\cdot 16=0$ або $2(x-2)-(z-1)=0$ або $2x-z-3=0$.

2. Побудувати площину $3x-2y+4z-12=0$.
Розв'язання. Запишемо задане рівняння у відрізках на осях. Для цього перенесемо у праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1,$$

Звідкн $a=4$, $b=-6$, $c=3$.
Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рнс. 7).

3.3. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.
Нехай задано дві площини Π_1 і Π_2 відповідно рівняннями
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ цих площин (рис. 8). Отже, з формули (4.7) (див. лекцію 4) маємо

$$cos\,\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.5)$$

Якщо площини Π_1 і Π_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (3.6)$$

є умовою перпендикулярності площин.

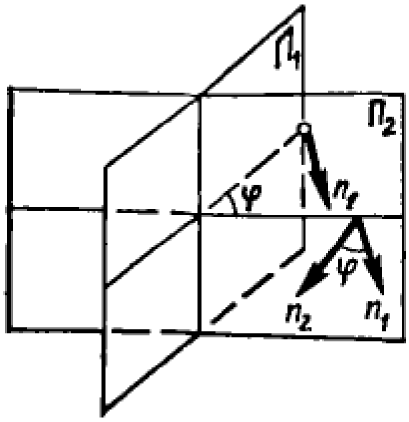

Рис. 8.

Якщо площини Π_1 і Π_2 паралельні, то координати нормальних векторів пропорційні, тобто умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.7)$$

Приклад. Знайти кут між площинами $3x-y+4z-2=0$ і $5x+7y-2z+9=0$.
Розв'язання. За формулою (3,5) маємо

$$cos\,\varphi=\frac{3\cdot5+(-1)\cdot7+4\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}\,\sqrt{5^2+7^2+(-2)^2}}=0,$$

отже, дані площини перпендикулярні.

3.4. Відстань від точки до площини.
Якщо задане рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини Π і точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини Π знаходиться за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.8)$$

Доведення формули (3.8) таке саме, як і формули (1.23).

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(3;5;\ -6)$ до площини $2x-4y+3z-5=0$.
Розв'язання. За формулою (3.8) знаходимо шукану відстань

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot3-4\cdot5+3\cdot(-6)-5|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+3^2}}=\frac{|6-20-18-5|}{\sqrt{4+16+9}}=\frac{37}{\sqrt{29}}$$ (лін. од.)