

## Лінійна алгебра

**Завдання 1.** Дано матриці  $A$  та  $B$ . Знайти  $AB^T$ .

$$1.1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.2. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.5. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.7. A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.8. A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.9. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.11. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.12. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.13. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.14. A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.15. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Завдання 2.** Розв'язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

$$2.1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -5. \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = -1, \\ 4x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = 10. \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + x_2 = 11. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = -3. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$$

**Завдання 3.** Розв'язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

$$3.1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

$$3.12. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

### Векторна алгебра

**Завдання 4.** Дано вектори  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ . Знайти: 1)  $\vec{a} + \vec{b}$ ; 2)  $\vec{a} - \vec{b}$ ;

3)  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ; 4) скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; 5) векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

4.1.  $\vec{a} = (3; -2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-5; 4; 2)$ .

4.2.  $\vec{a} = (-4; -1; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; -4; 1)$ .

4.3.  $\vec{a} = (-3; 2; 4)$ ,  $\vec{b} = (1; -3; 5)$ .

4.4.  $\vec{a} = (2; -1; 4)$ ,  $\vec{b} = (3; -1; 5)$ .

4.5.  $\vec{a} = (-6; 2; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; -4)$ .

4.6.  $\vec{a} = (2; 3; -2)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; -4)$ .

4.7.  $\vec{a} = (3; -5; 2)$ ,  $\vec{b} = (-2; 3; 1)$ .

4.8.  $\vec{a} = (-4; 2; -3)$ ,  $\vec{b} = (1; -4; 1)$ .

4.9.  $\vec{a} = (4; -3; 5)$ ,  $\vec{b} = (2; -5; 1)$ .

4.10.  $\vec{a} = (1; -4; 5)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; 6)$ .

4.11.  $\vec{a}=(-1;2;-3)$ ,  $\vec{b}=(-2;4;-3)$ .

4.12.  $\vec{a}=(2;-4;5)$ ,  $\vec{b}=(1;-2;2)$ .

4.13.  $\vec{a}=(3;-2;3)$ ,  $\vec{b}=(-1;5;-2)$ .

4.14.  $\vec{a}=(4;-1;3)$ ,  $\vec{b}=(2;-3;3)$ .

4.15.  $\vec{a}=(1;-2;3)$ ,  $\vec{b}=(1;1;3)$ .

**Завдання 5.** Дано координати вершин трикутника  $A_1A_2A_3$ .

Знайти кут  $A_1A_2A_3$ .

5.1.  $A_1(3;1;2)$ ,  $A_2(5;0;-1)$ ,  $A_3(0;3;6)$ .

5.2.  $A_1(3;1;4)$ ,  $A_2(-1;6;1)$ ,  $A_3(-1;1;6)$ .

5.3.  $A_1(3;3;9)$ ,  $A_2(6;9;1)$ ,  $A_3(1;7;3)$ .

5.4.  $A_1(2;4;3)$ ,  $A_2(7;6;3)$ ,  $A_3(4;9;3)$ .

5.5.  $A_1(9;5;5)$ ,  $A_2(-3;7;1)$ ,  $A_3(5;7;8)$ .

5.6.  $A_1(0;7;1)$ ,  $A_2(4;1;5)$ ,  $A_3(4;6;3)$ .

5.7.  $A_1(5;5;4)$ ,  $A_2(3;8;4)$ ,  $A_3(3;5;10)$ .

5.8.  $A_1(6;1;1)$ ,  $A_2(4;6;6)$ ,  $A_3(4;2;0)$ .

5.9.  $A_1(7;5;3)$ ,  $A_2(9;4;4)$ ,  $A_3(4;5;7)$ .

5.10.  $A_1(6;6;2)$ ,  $A_2(5;4;7)$ ,  $A_3(2;4;7)$ .

5.11.  $A_1(-4;6;4)$ ,  $A_2(2;1;5)$ ,  $A_3(-1;-2;2)$ .

5.12.  $A_1(2;-1;9)$ ,  $A_2(1;1;5)$ ,  $A_3(7;3;1)$ .

5.13.  $A_1(1;-2;2), A_2(-1;-3;4), A_3(5;5;-1)$ .

5.14.  $A_1(1;1;3), A_2(7;1;1), A_3(4;1;-1)$ .

5.15.  $A_1(-3;1;-2), A_2(2;0;-1), A_3(3;4;-5)$ .

**Завдання 6.** Дано координати вершин піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ .

Знайти площу грані  $A_1A_2A_3$  та об'єм піраміди.

6.1.  $A_1(7;0;3), A_2(3;0;-1), A_3(3;0;5), A_4(4;3;-2)$ .

6.2.  $A_1(1;-1;6), A_2(2;5;-2), A_3(-3;3;3), A_4(4;1;5)$ .

6.3.  $A_1(3;6;1), A_2(6;1;4), A_3(3;-6;10), A_4(7;5;4)$ .

6.4.  $A_1(1;1;3), A_2(4;1;6), A_3(6;4;1), A_4(0;5;6)$ .

6.5.  $A_1(4;4;5), A_2(10;2;3), A_3(-3;5;4), A_4(6;-2;2)$ .

6.6.  $A_1(-1;2;5), A_2(-4;6;4), A_3(2;1;5), A_4(-1;-2;2)$ .

6.7.  $A_1(2;-1;9), A_2(1;1;5), A_3(7;3;1), A_4(2;6;-2)$ .

6.8.  $A_1(1;-2;2), A_2(-1;-3;4), A_3(5;5;-1), A_4(2;4;-5)$ .

6.9.  $A_1(1;1;3), A_2(7;1;1), A_3(2;2;2), A_4(4;1;-1)$ .

6.10.  $A_1(-3;1;-2), A_2(2;0;-1), A_3(0;-2;6), A_4(3;4;-5)$ .

6.11.  $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$ .

6.12.  $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$ .

6.13.  $A_1(7;2;2), A_2(-5;7;-7), A_3(5;-3;1), A_4(2;3;7)$ .

6.14.  $A_1(8;-6;4), A_2(10;5;-5), A_3(5;6;-8), A_4(8;10;7)$ .

6.15.  $A_1(1;-2;7), A_2(4;2;10), A_3(2;3;5), A_4(5;3;7)$ .

### Аналітична геометрія

Завдання 7. Дано координати вершин трикутника  $ABC$ .

Знайти: 1) рівняння сторони  $AB$ ; 2) рівняння висоти  $CH$ ; 3) рівняння медіани  $BM$ ; 4) точку перетину медіани  $BM$  і висоти  $CH$ .

7.1.  $A(7;3), B(3;-1), C(3;5)$ .

7.2.  $A(1;-1), B(2;5), C(-3;3)$ .

7.3.  $A(3;6), B(6;1), C(3;-6)$ .

7.4.  $A(1;3), B(1;6), C(6;2)$ .

7.5.  $A(4;5), B(2;3), C(-3;4)$ .

7.6.  $A(-1;2), B(-4;6), C(2;1)$ .

7.7.  $A(2;-1), B(1;5), C(3;1)$ .

7.8.  $A(1;-2), B(-1;-3), C(5;-1)$ .

7.9.  $A(1;3), B(7;1), C(2;-2)$ .

7.10.  $A(3;2), B(5;-1), C(0;6)$ .

7.11.  $A(2;3), B(-2;5), C(-2;-1)$ .

7.12.  $A(2;3), B(-1;4), C(-3;2)$ .

7.13.  $A(3;-2), B(2;-3), C(-5;-2)$ .

7.14.  $A(-3;1), B(-5;2), C(1;-1)$ .

**7.15.**  $A(-3; -2), B(2; -2), C(1; 4)$ .

**Завдання 8.** Дано координати вершин піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ .

Знайти: 1) довжину сторони  $A_1A_2$ ; 2) рівняння прямої  $A_1A_2$ ;

3) рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ; 4) рівняння висоти  $A_4O$ .

**8.1.**  $A_1(4; 2; 5), A_2(0; 7; 2), A_3(0; 2; 7), A_4(1; 5; 0)$ .

**8.2.**  $A_1(4; 4; 10), A_2(4; 10; 2), A_3(2; 8; 4), A_4(9; 6; 9)$ .

**8.3.**  $A_1(4; 6; 5), A_2(6; 9; 4), A_3(2; 10; 10), A_4(7; 5; 9)$ .

**8.4.**  $A_1(3; 5; 4), A_2(8; 7; 4), A_3(5; 10; 4), A_4(4; 7; 8)$ .

**8.5.**  $A_1(10; 6; 6), A_2(-2; 8; 2), A_3(6; 8; 9), A_4(7; 10; 3)$ .

**8.6.**  $A_1(1; 8; 2), A_2(5; 2; 6), A_3(5; 7; 4), A_4(4; 10; 9)$ .

**8.7.**  $A_1(6; 6; 5), A_2(4; 9; 5), A_3(4; 6; 11), A_4(6; 9; 3)$ .

**8.8.**  $A_1(7; 2; 2), A_2(5; 7; 7), A_3(5; 3; 1), A_4(2; 3; 7)$ .

**8.9.**  $A_1(8; 6; 4), A_2(10; 5; 5), A_3(5; 6; 8), A_4(8; 10; 7)$ .

**8.10.**  $A_1(7; 7; 3), A_2(6; 5; 8), A_3(3; 5; 8), A_4(8; 4; 1)$ .

**8.11.**  $A_1(4; 2; 5), A_2(0; 7; 1), A_3(0; 2; 7), A_4(1; 5; 0)$ .

**8.12.**  $A_1(4; 4; 10), A_2(7; 10; 2), A_3(2; 8; 4), A_4(9; 6; 9)$ .

**8.13.**  $A_1(4; 6; 5), A_2(6; 9; 4), A_3(2; 10; 10), A_4(7; 5; 9)$ .

**8.14.**  $A_1(3; 5; 4), A_2(8; 7; 4), A_3(5; 10; 4), A_4(4; 7; 8)$ .

**8.15.**  $A_1(1; 8; 2), A_2(5; 2; 6), A_3(5; 7; 4), A_4(4; 10; 9)$ .



**Завдання 9.** Визначити тип кривої другого порядку та знайти

її числові характеристики.

**9.1.**  $9y^2 - 16x^2 + 32x - 18y + 137 = 0.$

**9.2.**  $25x^2 + 16y^2 + 150x - 64y - 111 = 0.$

**9.3.**  $16x^2 - 32x + 36y - 164 = 0.$

**9.4.**  $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0.$

**9.5.**  $x^2 + 16y^2 - 4x + 32y + 4 = 0.$

**9.6.**  $9y^2 - 4x^2 + 24x + 18y - 63 = 0$

**9.7.**  $x^2 + 9y^2 + 4x - 54y + 76 = 0.$

**9.8.**  $36x^2 + 49y^2 + 72x - 294y - 1287 = 0.$

**9.9.**  $4y^2 - x^2 - 6x - 16y - 29 = 0.$

**9.10.**  $4x^2 + y^2 + 24x + 2y - 63 = 0.$

**9.11.**  $9y^2 - 15x - 36y - 9 = 0.$

**9.12.**  $25x^2 - 9y^2 + 50x + 72y - 344 = 0.$

**9.13.**  $x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 74 = 0.$

**9.14.**  $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0.$

**9.15.**  $16x^2 - 64x + 15y - 161 = 0.$

**Завдання 10.** Побудувати лінію в полярній системі координат.

$$10.1. \rho = \sin \varphi + \frac{1}{2}.$$

$$10.2. \rho = 3 \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{3} \right).$$

$$10.3. \rho = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2}.$$

$$10.4. \rho = 2 \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$10.5. \rho = 3 \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$10.6. \rho = -\sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$10.7. \rho = -\cos \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right).$$

$$10.8. \rho = \frac{3}{2} \sin \varphi - 1.$$

$$10.9. \rho = 5 \cos \left( \frac{\pi}{3} - \varphi \right).$$

$$10.10. \rho = 4 \sin \varphi - 2.$$

$$10.11. \rho = 2 \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right).$$

$$10.12. \rho = 3 \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$10.13. \rho = 2 - 3 \sin \varphi.$$

$$10.14. \rho = 4 \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$10.15. \rho = 5 \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right).$$

### Вступ до аналізу

**Завдання 11.** Знайти область визначення функції.

$$11.1. y = \frac{x-6}{x^2-3x+2}.$$

$$11.2. y = \frac{\sqrt{3-x}}{9+4x^2}.$$

$$11.3. y = \frac{2 \cos x}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$$11.4. y = x \ln(4 - x^2).$$

$$11.5. y = x - \frac{5}{\sqrt{1-x}}.$$

$$11.6. y = \frac{x^2}{\cos x - 1,5}.$$

$$11.7. y = \frac{\sin x}{2^x - 4}.$$

$$11.8. y = \frac{2^x}{27 + x^3}.$$

$$11.9. y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}.$$

$$11.10. y = \frac{x+4}{\ln x}.$$

$$11.11. y = \frac{x^2 - 4}{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}.$$

$$11.12. y = \frac{\sqrt{x+2}}{3^x - 1}.$$

$$11.13. y = \frac{2x-5}{8-x^3}.$$

$$11.14. y = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-9}.$$

$$11.15. y = \frac{x+4}{\log_2 x + 1}.$$

**Завдання 12.** Обчислити значення функції  $f(x)$  у точках  $x_1$

та  $x_2$ .

$$12.1. f(x) = 3x^2 - 2x - 3, \quad x_1 = -2, x_2 = 4.$$

$$12.2. f(x) = 5x^2 - 3x + 1, \quad x_1 = -1, x_2 = 3.$$

$$12.3. f(x) = 5 + 3x - 2x^2, \quad x_1 = -3, x_2 = 2.$$

$$12.4. f(x) = 2x^2 + x - 3, \quad x_1 = -3, x_2 = 2.$$

$$12.5. f(x) = x^2 + 6x - 1, \quad x_1 = -2, x_2 = 4.$$

$$12.6. f(x) = 3x^2 + x - 4, \quad x_1 = -2, x_2 = 1.$$

$$12.7. f(x) = 3 + 2x - x^2, \quad x_1 = -2, x_2 = 5.$$

$$12.8. f(x) = x^2 + 4x - 3, \quad x_1 = -4, x_2 = 3.$$

$$12.9. f(x) = 4x^2 - 5x + 2, \quad x_1 = -3, x_2 = 1.$$

$$12.10. f(x) = 3x^2 + x - 5, \quad x_1 = -3, x_2 = 2.$$

$$12.11. f(x) = 2x^2 + 3x - 8, \quad x_1 = -1, x_2 = 3.$$

$$12.12. f(x) = 4 + x - 2x^2, \quad x_1 = -3, x_2 = 2.$$

$$12.13. f(x) = 2 + 4x - 3x^2, \quad x_1 = -2, x_2 = 4.$$

$$12.14. f(x) = 3x^2 - 5x + 4, \quad x_1 = -2, x_2 = 4.$$

$$12.15. f(x) = 4x^2 + 2x - 3, \quad x_1 = -1, x_2 = 3.$$

**Завдання 13.** Знайти границю, не використовуючи правило Лопітала.

$$13.1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$13.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}.$$

$$13.3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}.$$

$$13.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}.$$

$$13.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}.$$

$$13.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}.$$

$$13.7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$13.8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}.$$

$$13.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}.$$

$$13.10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$13.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}.$$

$$13.12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}.$$

$$13.13. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x - 4}.$$

$$13.14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$13.15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

**Завдання 14.** Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

$$14.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^3 + 2x - 4}.$$

$$14.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 4x - 3}{4x^2 - x - 6}.$$

$$14.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 3}{-5x^2 + x + 2}.$$

$$14.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x - 1}{x^4 - 6x + 1}.$$

$$14.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x + 1}{2x^3 + 2x - 4}.$$

$$14.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x - 3}{4x^5 - x + 6}.$$

$$14.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{-3x^3 + 4x + 14}.$$

$$14.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^4 - 7x - 1}{9x^3 - 6x + 12}.$$

$$14.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{-3x^3 + 2x - 5}.$$

$$14.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x + 7}{4x^4 - 3x - 6}.$$

$$14.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x + 1}{4x^3 + 2x^2 - 5}.$$

$$14.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{-3x^2 + x - 2}.$$

$$14.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{3x^3 + x - 2}.$$

$$14.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x + 1}{x^4 - 3x + 1}.$$

$$14.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{4x^3 + 3x - 2}.$$

**Завдання 15.** Знайти границю, не використовуючи правило

Лопітала.

$$15.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{4-3x}-1}.$$

$$15.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}.$$

$$15.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4-3x^2}-1}{x^2+x}.$$

$$15.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}.$$

$$15.5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}.$$

$$15.6. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}.$$

$$15.7. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}.$$

$$15.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x-2x^2}.$$

$$15.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{5x}.$$

$$15.10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}.$$

$$15.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{6-x}-2}.$$

$$15.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x+x^2}.$$

$$15.13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}.$$

$$15.14. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2x+3}-1}.$$

$$15.15. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{2x+9}-1}.$$

**Завдання 16.** Знайти границю, скориставшись першою визначною границею.

$$16.1. \lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 5x.$$

$$16.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{\sin^2 2x}.$$

$$16.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

$$16.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 2x}.$$

$$16.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} 4x}{\sin^2 2x}.$$

$$16.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$16.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{1 - \cos 3x}.$$

$$16.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{arcsin} 4x}.$$

$$16.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{2x^2}.$$

$$16.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin}^2 3x}{4x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$16.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$16.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\sin^2 5x}.$$

$$16.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x}{\operatorname{arcsin}^2 5x}.$$

$$16.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$16.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arcsin} 5x}{\sin^2 4x}.$$

**Завдання 17.** Знайти границю, скориставшись другою визначною границею.

$$17.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-4} \right)^{2x}.$$

$$17.2. \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$17.3. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{3}{x-1}}.$$

$$17.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1}.$$

$$17.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+5} \right)^{3x+2}.$$

$$17.6. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}.$$

$$17.7. \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{x}{x-1}}.$$

$$17.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{2x+3}.$$

$$17.9. \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{\frac{5x}{x-2}}.$$

$$17.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x}.$$

$$17.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x+3} \right)^{3x-2}.$$

$$17.12. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$17.13. \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{3}{x-2}}.$$

$$17.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{2x-1}.$$

$$17.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-2}{4x+7} \right)^{2x}.$$

**Завдання 18.** Задано два комплексних числа  $z_1$  та  $z_2$ .

Виконати дії: 1)  $z_1 + z_2$ ; 2)  $z_1 - \bar{z}_2$ ; 3)  $z_1 \cdot z_2$ ; 4)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; 5)  $z_1^3$ .

$$18.1. z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3 + i.$$

$$18.2. z_1 = 3 + i, z_2 = 1 - 2i.$$

$$18.3. z_1 = 4 - 3i, z_2 = 2 + i.$$

$$18.4. z_1 = -1 + 3i, z_2 = 4 - i.$$

$$18.5. z_1 = 3 + 2i, z_2 = 1 - 3i.$$

$$18.6. z_1 = 4 - 3i, z_2 = 2 + 2i.$$

$$18.7. z_1 = -2 - 3i, z_2 = 1 + 3i.$$

$$18.8. z_1 = 4 + i, z_2 = 3 + 2i.$$

$$18.9. z_1 = -2 - 3i, z_2 = 1 + 2i.$$

$$18.10. z_1 = -1 + i, z_2 = -3 - i.$$

$$18.11. z_1 = 4 + 5i, z_2 = 3 - i.$$

$$18.12. z_1 = 2 + 3i, z_2 = -1 - i.$$

$$18.13. z_1 = 5 + 4i, z_2 = 2 + 3i.$$

$$18.14. z_1 = -3 + 5i, z_2 = 4 + i.$$

$$18.15. z_1 = -4 + i, z_2 = -3 - i.$$



**Завдання 19.** Записати комплексне число  $z$  :

- 1) в алгебраїчній формі; 2) в тригонометричній формі;  
3) в показниковій формі. Знайти  $z^5$  та  $\sqrt{z}$ .

$$19.1. z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i}.$$

$$19.2. z = \frac{2}{1+i}.$$

$$19.3. z = \frac{-2}{\sqrt{3} - i}.$$

$$19.4. z = \frac{8}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}.$$

$$19.5. z = \frac{2\sqrt{2}}{-1+i}.$$

$$19.6. z = \frac{4}{\sqrt{3}+i}.$$

$$19.7. z = \frac{-3}{1+\sqrt{3}i}.$$

$$19.8. z = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}.$$

$$19.9. z = \frac{1}{-1-i}.$$

$$19.10. z = -\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}.$$

$$19.11. z = \frac{-8}{1+i}.$$

$$19.12. z = \frac{4}{-1+\sqrt{3}i}.$$

$$19.13. z = \frac{6}{-\sqrt{3}+i}.$$

$$19.14. z = \frac{2}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}.$$

$$19.15. z = \frac{2}{-1-\sqrt{3}i}.$$

### Диференціальне числення

**Завдання 20.** Продиференціювати задану функцію.

$$20.1. y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x.$$

$$20.2. y = \frac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x.$$

$$20.3. y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x.$$

$$20.4. y = \frac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \arcsin x.$$

$$20.5. y = \frac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x.$$

$$20.6. y = \frac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x.$$

$$20.7. y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x.$$

$$20.8. y = \frac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x.$$

$$20.9. y = \frac{1}{2x^4} - 5\sqrt[5]{x^2} + 6\sin x.$$

$$20.10. y = \frac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x.$$

$$20.11. y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt[5]{x^2} - 2\arccos x.$$

$$20.12. y = \frac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5 \cdot 4^x.$$

$$20.13. y = \frac{2}{5}x^5 + 8\sqrt[4]{x} - 3\operatorname{arcctg} x.$$

$$20.14. y = \frac{1}{2}x^4 + 6\sqrt[6]{x^2} - 4\log_3 x.$$

$$20.15. y = 7x^3 + 3\sqrt{x^5} - 3^x.$$

**Завдання 21.** Продиференціювати задану функцію.

$$21.1. y = \sqrt[4]{3x^2 + 5x - 4}. \quad 21.2. y = \cos(4x^2 + 3x - 2).$$

$$21.3. y = \operatorname{ctg}(2x^2 + x - 4). \quad 21.4. y = \ln(2x^2 - 3x + 5).$$

$$21.5. y = \sqrt{x^3 - 4x + 5}. \quad 21.6. y = \operatorname{tg}(3x^2 + x - 2).$$

$$21.7. y = \operatorname{arctg}(2x^2 - 1). \quad 21.8. y = 3^{2x^3 - 4x + 3}.$$

$$21.9. y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x + 5)^2}. \quad 21.10. y = \arccos(3x^2 + 5).$$

$$21.11. y = \log_3(2x^2 - 4x + 3). \quad 21.12. y = 2e^{4x^2 + 3x - 2}.$$

$$21.13. y = \sqrt[3]{(2x^2 + 5x - 3)^2}. \quad 21.14. y = \sin(2x^2 - 3x + 5).$$

$$21.15. y = \log_4(x^2 + 2x + 7).$$

**Завдання 22.** Продиференціювати задану функцію.

$$22.1. y = 3^x \ln(4x - 3). \quad 22.2. y = \frac{e^{5x}}{2x^2 - 3}.$$

$$22.3. y = x^4 \cos(2x^2 - 5). \quad 22.4. y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(2x + 3)}.$$

$$22.5. y = e^{-2x^2} \operatorname{arctg} x. \quad 22.6. y = \frac{\sin(3x + 2)}{\ln x}.$$

$$22.7. y = \cos x \cdot \ln(2x - 3). \quad 22.8. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(2x - 1)}.$$

$$22.9. y = \frac{e^{\cos x}}{3x^2 - 4}. \quad 22.10. y = \frac{\ln x}{\sin(4x + 3)}.$$

$$22.11. y = 3^{\sin x} (4x - 3).$$

$$22.12. y = \frac{7^{5x}}{2x^2 - 3}.$$

$$22.13. y = \frac{4^{-x}}{2x^2 - 5}.$$

$$22.14. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2x + 3)}.$$

$$22.15. y = \frac{\operatorname{arcctg} 6x}{7x^3 - 3x + 2}.$$

**Завдання 23.** Продиференціювати задану функцію.

$$23.1. y = x^{\sin x}.$$

$$23.2. y = (\sin x)^{2x}.$$

$$23.3. y = x^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$23.4. y = (\cos x)^{\sqrt{x}}.$$

$$23.5. y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$23.6. y = (\arcsin x)^x.$$

$$23.7. y = x^{\arccos x}.$$

$$23.8. y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}.$$

$$23.9. y = (\sqrt{x-1})^{\sin x}.$$

$$23.10. y = (\ln x)^{x^2-3}.$$

$$23.11. y = (\operatorname{tg} x)^x.$$

$$23.12. y = (\log_2 x)^{2x}.$$

$$23.13. y = x^{\sqrt{x}}.$$

$$23.14. y = x^{e^x}.$$

$$23.15. y = (\arccos x)^x.$$

**Завдання 24.** Знайти похідну функції  $y(x)$ , що задана неявно рівнянням.

$$24.1. x^3 + y^2 - 3xy = 0.$$

$$24.2. x - y = \cos(xy).$$

$$24.3. y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

$$24.4. y \ln y = x.$$

$$24.5. x^4 + y^4 = 3x^2y^2.$$

$$24.6. x^3 + xy^2 - y = 4x.$$

$$24.7. y = 1 + xe^y.$$

$$24.8. \ln y - \frac{y}{x} = 7.$$

$$24.9. \sin y = xy^2 + 5.$$

$$24.10. y - \cos(x - y) = 0.$$

$$24.11. x^4 + y^3 + \sin x = 0.$$

$$24.12. x - y = \sqrt{xy}.$$

$$24.13. y^2 \sin x - \cos x = e^y.$$

$$24.14. x \log_3 y = x^4 - 3xy.$$

$$24.15. x^3 + y^4 = 3xy^3.$$

**Завдання 25.** Знайти похідну вказаного порядку.

$$25.1. y = x \cos x^2, \quad y''' - ?$$

$$25.2. y = (5x - 1) \ln^2 x, \quad y''' - ?$$

$$25.3. y = (4x^3 + 5)e^{2x+1}, \quad y^{IV} - ?$$

$$25.4. y = (x^2 + 3) \ln(x - 3), \quad y^{IV} - ?$$

$$25.5. y = \frac{\sin 2x}{x}, \quad y''' - ?$$

$$25.6. y = (4x + 3)2^{-x}, \quad y''' - ?$$

$$25.7. y = x \ln(1 - 3x), \quad y^{IV} - ?$$

$$25.8. y = \frac{\log_3 x}{x^2}, \quad y''' - ?$$

$$25.9. y = \frac{\ln(x - 2)}{x - 2}, \quad y^V - ?$$

$$25.10. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y''' - ?$$

$$25.11. y = x^2 \cos x, \quad y''' - ?$$

$$25.12. y = (5x^3 - 1) \ln x, \quad y'' - ?$$

$$25.13. y = (2x^2 - 3)e^{2x}, \quad y''' - ?$$

$$25.14. y = (x^2 + 3) \sin x, \quad y''' - ?$$

$$25.15. y = \frac{\cos 3x}{x}, \quad y'' - ?$$

**Завдання 26.** Знайти похідну функції  $y(x)$ , що задана параметрично.

$$26.1. \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \frac{2}{\cos^2 t} \end{cases}.$$

$$26.2. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}.$$

$$26.3. \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}.$$

$$26.4. \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}.$$

$$26.5. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \frac{1}{\sin 2t} \end{cases}.$$

$$26.6. \begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1} \\ y = \ln t \end{cases}.$$

$$26.7. \begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}.$$

$$26.8. \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}.$$

$$26.9. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln \cos t \end{cases}.$$

$$26.10. \begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}.$$

$$26.11. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{2}{t} \end{cases}.$$

$$26.12. \begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2} \\ y = \operatorname{tg} 2t \end{cases}.$$

$$26.13. \begin{cases} x = \cos t \\ y = e^t + 3t \end{cases}.$$

$$26.14. \begin{cases} x = 6\sqrt[3]{t^2} \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}.$$

$$26.15. \begin{cases} x = 3t^3 - 9t \\ y = \arcsin t \end{cases}.$$

**Завдання 27.** Обчислити наближено значення функції  $y = f(x)$  у точці  $x_0$ , використовуючи диференціал функції.

$$27.1. y = \sqrt[3]{x}, x_0 = 7,76.$$

$$27.2. y = \arcsin x, x_0 = 0,08.$$

$$27.3. y = \sqrt{4x-1}, x_0 = 2,56.$$

$$27.4. y = x^6, x_0 = 2,01.$$

$$27.5. y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, x_0 = 1,58.$$

$$27.6. y = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = 1,03.$$

$$27.7. y = x^{11}, x_0 = 1,02.$$

$$27.8. y = \sqrt{4x-3}, x_0 = 1,78.$$

$$27.9. y = \sqrt{x^2 + x + 3}, x_0 = 1,97.$$

$$27.10. y = x^5, x_0 = 2,97.$$

$$27.11. y = \sqrt{x}, x_0 = 8,87.$$

$$27.12. y = \arctg x, x_0 = 0,05.$$

$$27.13. y = \sqrt{2x+1}, x_0 = 3,92.$$

$$27.14. y = x^4, x_0 = 4,01.$$

$$27.15. y = \sqrt[3]{3x-1}, x_0 = 3,06.$$

**Завдання 28.** Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y = f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$ .

$$28.1. y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}, x_0 = 1.$$

$$28.2. y = \frac{x}{x^2+1}, x_0 = -2.$$

$$28.3. y = 2x + \frac{1}{x}, x_0 = 1.$$

$$28.4. y = \frac{x^2+3}{x-4}, x_0 = 2.$$

$$28.5. y = \frac{x^2-3x+6}{x^2}, x_0 = 3.$$

$$28.6. y = \frac{x^3+2}{x^3-2}, x_0 = 2.$$

$$28.7. y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, x_0 = 4.$$

$$28.8. y = \sqrt[3]{x^2} - 20, x_0 = -8.$$

$$28.9. y = 8\sqrt[4]{x} - 70, x_0 = 16.$$

$$28.10. y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x_0 = 4.$$



$$28.11. y = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x_0 = -3.$$

$$28.12. y = \frac{5x - x^2}{3 - 2x}, \quad x_0 = -1$$

$$28.13. y = \frac{x^3}{2 + x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$28.14. y = 5x + \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 2.$$

$$28.15. y = \frac{5x + 6}{x^2}, \quad x_0 = -1.$$

**Завдання 29.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ .

$$29.1. y = \left( \frac{x+1}{x} \right)^3, \quad x \in [1, 3].$$

$$29.2. y = (x+2) \cdot e^{1-x}, \quad x \in [-2, 2].$$

$$29.3. y = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x \in [0, 3].$$

$$29.4. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}, \quad x \in [1, 2].$$

$$29.5. y = (x-1) \cdot e^x, \quad x \in [0, 3].$$

$$29.6. y = x \cdot \ln x, \quad x \in \left[ \frac{1}{e^2}, 1 \right].$$

$$29.7. y = e^{4x-x^2}, \quad x \in [1, 3].$$

$$29.8. y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [-1, 3].$$

$$29.9. y = x^3 + 6x - 4, \quad x \in [-2, 2].$$

$$29.10. y = x^3 \cdot e^{1+x}, \quad x \in [-4, 0].$$

$$29.11. y = \frac{x}{9-x^2}, \quad x \in [-2, 2].$$

$$29.12. y = 2\sqrt{x} - x, \quad x \in [0, 4].$$

$$29.13. y = x - 4\sqrt{x} + 5, \quad x \in [1, 9].$$

$$29.14. y = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \left[ \frac{1}{2}, 2 \right].$$

$$29.15. y = \frac{x-1}{x+2}, \quad x \in [0, 4].$$

**Завдання 30.** Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя.

$$30.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}.$$

$$30.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 6x}.$$

$$30.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$30.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\ln \cos x}.$$

$$30.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{\ln x}.$$

$$30.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - e^{-x}} \right).$$

$$30.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x}.$$

$$30.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{-x} - 1)}{x}.$$

$$30.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(1+x)}.$$

$$30.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$30.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{tg} x}{x \sin x}.$$

$$30.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{x-1}.$$

$$30.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$30.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{1 - \cos 3x}.$$

$$30.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x - 2}{\ln \cos x}.$$

**Завдання 31.** Виконати загальне дослідження функції.

$$31.1. y = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x^2 - 12x + 3.$$

$$31.2. y = 2x^3 + 15x^2 + 36x - 5.$$

$$31.3. y = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + 3.$$

$$31.4. y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5.$$

$$31.5. y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 3.$$

$$31.6. y = x^3 + x^2 - 5x + 4.$$

$$31.7. y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 3.$$

$$31.8. y = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + 3.$$

$$31.9. y = x^3 - 12x^2 + 21x + 5.$$

$$31.10. y = \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 20x + 4.$$

$$31.11. y = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 - 20x + 3.$$

$$31.12. y = 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 18x + 27.$$

$$31.13. y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 3.$$

$$31.14. y = \frac{2}{3}x^3 + 7x^2 + 12x + 5.$$

$$31.15. y = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

**Завдання 32.** Виконати загальне дослідження функції.

$$32.1. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

$$32.2. y = \frac{5x}{4-x^2}.$$

$$32.3. y = \frac{x^2-5}{x-3}.$$

$$32.4. y = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

$$32.5. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$32.6. y = \frac{3x+6}{x^2-4}.$$

$$32.7. y = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

$$32.8. y = \frac{4x}{4+x^2}.$$

$$32.9. y = \frac{5x}{4-x^2}.$$

$$32.10. y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}.$$

$$32.11. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}.$$

$$32.12. y = \frac{3x^2}{8-x^3}.$$

$$32.13. y = \frac{x^3}{3(x-1)^2}.$$

$$32.14. y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$32.15. y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}.$$

**Завдання 33.** Виконати загальне дослідження функції.

$$33.1. y = (2x+3)e^{-2x-2}.$$

$$33.2. y = 2 \ln \frac{x}{x+1} - 1.$$

$$33.3. y = (4-x)e^{x-3}.$$

$$33.4. y = x \ln x.$$

$$33.5. y = e^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$33.6. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$33.7. y = \ln \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$33.8. y = (x+1)^2 e^{2x}.$$

$$33.9. y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$33.10. y = x e^{\frac{1}{x}}.$$

$$33.11. y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$33.12. y = x - \ln(1+x^2).$$

$$33.13. y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$33.14. y = \ln \left( \frac{x}{x+2} \right) + 2.$$

$$33.15. y = \sqrt[3]{x} e^{\frac{2}{3x}}.$$

## Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною *схемою*.

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак  $y'$  на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак  $y''$  на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки ( $x$ )	
$y'$	
$y''$	
$y$	

а) Використовуючи  $y'$  з'ясуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи  $y''$ , досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

**6.** Будуємо графік функції.

**Приклад 1.** Виконати загальне дослідження функції

$$y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

**1** а) Область визначення функції –  $D = (-\infty; +\infty)$ .

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю  $Oy$  обчислимо значення функції у точці  $x = 0$ :

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь  $Oy$  у точці  $y = 0$ , тобто проходить через початок координат – точку  $O(0;0)$ .

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю  $Ox$  слід розв'язати рівняння  $y(x) = 0$ :

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x \left( 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь  $Ox$  у точках  $x_1 \approx -6,4$ ,  $x_2 \approx 1,9$  та у точці  $x = 0$  (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки  $y(-x) \neq y(x)$  та  $y(-x) \neq -y(x)$ .

**2** Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b, \quad (1)$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx), \quad (2)$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма  $x = x_0 \in$  *вертикальною асимптотою* графіка функції  $y(x)$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \infty. \quad (3)$$



Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

**3** Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left( 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а)  $y' = 0$ ; б)  $y'$  не існує.

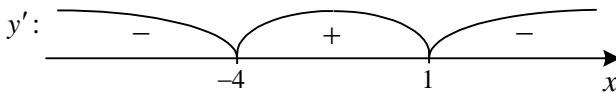
а)  $y' = 0$ :  $2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$ , або  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , звідки

$x = -4$  та  $x = 1$ .

б)  $y'$  не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому  $x \in D$ .

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду  $x = -4$ ,  $x = 1$ .

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y'$  на отриманих інтервалах:



(наприклад,  $y'(-6) = -25 < 0$ ,  $y'(0) = 2 > 0$ ,  $y'(2) = -3 < 0$ ).

**4** Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left( 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right)' = -\frac{3}{2} - x.$$

Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких:

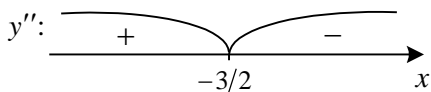
а)  $y'' = 0$ ; б)  $y''$  не існує.

а)  $y'' = 0: -\frac{3}{2} - x = 0, x = -\frac{3}{2}$ .

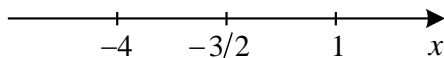
б)  $y''$  не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду  $x = -\frac{3}{2}$ .

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак  $y''$  на отриманих інтервалах:



**5** Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали:  $(-\infty; -4)$ ,  $(-4; -1,5)$ ,  $(-1,5; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають  $y'$  та  $y''$ , використовуємо результати досліджень у пунктах **3** та **4**.

$x$	$(-\infty; -4)$	$-4$	$(-4; -1,5)$	$-1,5$	$(-1,5; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$y'$	$-$	$0$	$+$		$+$	$0$	$-$
$y''$	$+$		$+$	$0$	$-$		$-$
$y$	$\square \cup$	min $y(-4) = -9\frac{1}{3}$	$\square \cup$	т. п. $y(-1,5) = -4\frac{1}{8}$	$\square \cap$	max $y(1) = 1\frac{1}{12}$	$\square \cap$

Позначення:

▭ – функція спадає;

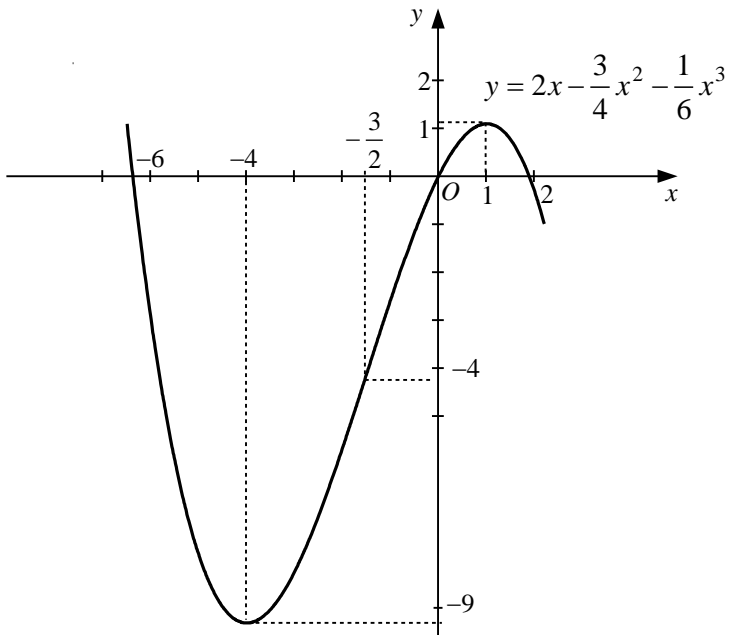
▭ – функція зростає;

∪ – графік угнутий;

∩ – графік опуклий;

т.п. – точка перегину графіка.

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів 1, 2, 5.



**Приклад 2.** Виконати загальне дослідження функції

$$y = \frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2}.$$

**1** а) Область визначення функції –  $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ .

б) Графік перетинає вісь  $Oy$  у точці  $y = -0,5$ .

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю  $Ox$  :

$$\frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2} = 0, \quad \frac{2x^4 - x^3 - 1}{2(x^3 + 1)} = 0.$$

Звідси маємо рівняння  $2x^4 - x^3 - 1 = 0$ . Розклавши ліву частину на множники

$$\begin{aligned} 2x^4 - x^3 - 1 &= (x^4 - x^3) + (x^4 - 1) = x^3(x-1) + (x-1)(x+1)(x^2+1) = \\ &= (x-1)(2x^3 + x^2 + x + 1), \end{aligned}$$

знаходимо корінь  $x = 1$ . Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння  $2x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі  $(-1; 0)$ . Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов'язане з використанням громіздких формул, то обмежимося вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю  $Ox$  –  $x = 1$ .

г) Функція ні парна, ні непарна.

**2** Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{x^3+1} - \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^3}} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} =$$

$$= \frac{1}{1+0} - 0 = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x(x^3+1)}{x^3+1} - \frac{1}{2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^3+1} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}} - \frac{1}{2} = \frac{0}{0+1} - \frac{1}{2} = -0,5;$$

підставляємо  $k$  та  $b$  у формулу (1):  $y = 1 \cdot x + (-0,5) = x - 0,5$ .

Отже, графік функції має похилу асимптоту  $y = x - 0,5$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

б) Оскільки точка  $x_0 = -1$  не належить області визначення  $D$  заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 1) = 0$ , а

$\lim_{x \rightarrow -1} x^4 = 1 \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} \right) = \infty.$$

Звідси випливає, що пряма  $x = -1$  є вертикальною асимптотою.

**3** Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$\begin{aligned}y' &= \left( \frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} \right)' = \left( \frac{x^4}{x^3+1} \right)' - \left( \frac{1}{2} \right)' = \frac{(x^4)'(x^3+1) - x^4(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} - 0 = \\ &= \frac{4x^3(x^3+1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x^6 + 4x^3}{(x^3+1)^2}.\end{aligned}$$

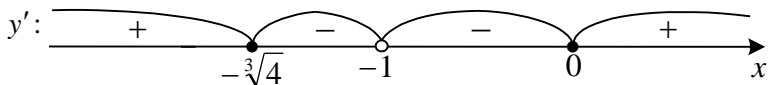
Критичні точки 1-го роду:

а)  $y' = 0$ :  $\frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2} = 0$ ,  $x^3(x^3 + 4) = 0$ , звідки  $x = 0$ ,  $x = -\sqrt[3]{4}$ ;

б)  $y'$  не існує:  $\emptyset$ .

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду  $x = -\sqrt[3]{4} \approx -1,59$  та  $x = 0$ .

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y'$  на отриманих інтервалах (точка  $x = -1$  виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад,  $y'(-2) = \frac{32}{49} > 0$ ,  $y'(-\sqrt[3]{2}) = -4 < 0$ ,  $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{31}{49} < 0$ ,

$y'(1) = 1 > 0$ ).

**4** Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$\begin{aligned}
 y'' &= \left( \frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2} \right)' = \frac{(x^6 + 4x^3)'(x^3 + 1)^2 - (x^6 + 4x^3)((x^3 + 1)^2)'}{\left( (x^3 + 1)^2 \right)^2} = \\
 &= \frac{(6x^5 + 12x^2)(x^3 + 1)^2 - (x^6 + 4x^3)(x^3 + 1)3x^2}{(x^3 + 1)^4} = \\
 &= \frac{6x^2(x^3 + 1)[(x^3 + 2)(x^3 + 1) - (x^6 + 4x^3)]}{(x^3 + 1)^4} = \\
 &= \frac{6x^2(x^6 + 3x^3 + 2 - x^6 - 4x^3)}{(x^3 + 1)^3} = \frac{6x^2(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^3}.
 \end{aligned}$$

Критичні точки 2-го роду:

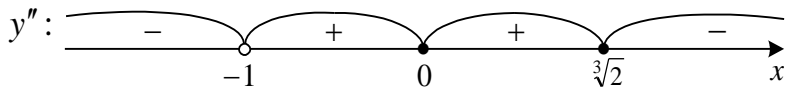
$$\text{а) } y'' = 0: \quad \frac{6x^2(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^3} = 0, \quad x^2(2 - x^3) = 0, \quad \text{звідки } x = 0,$$

$$x = \sqrt[3]{2};$$

б)  $y''$  не існує:  $\emptyset$ .

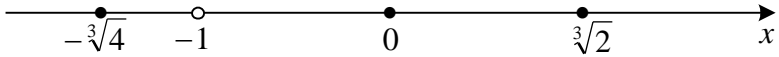
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду  $x = 0$  та  $x = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$ .

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y''$  на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки  $-2$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $1$ ,  $2$ ).

**5** Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



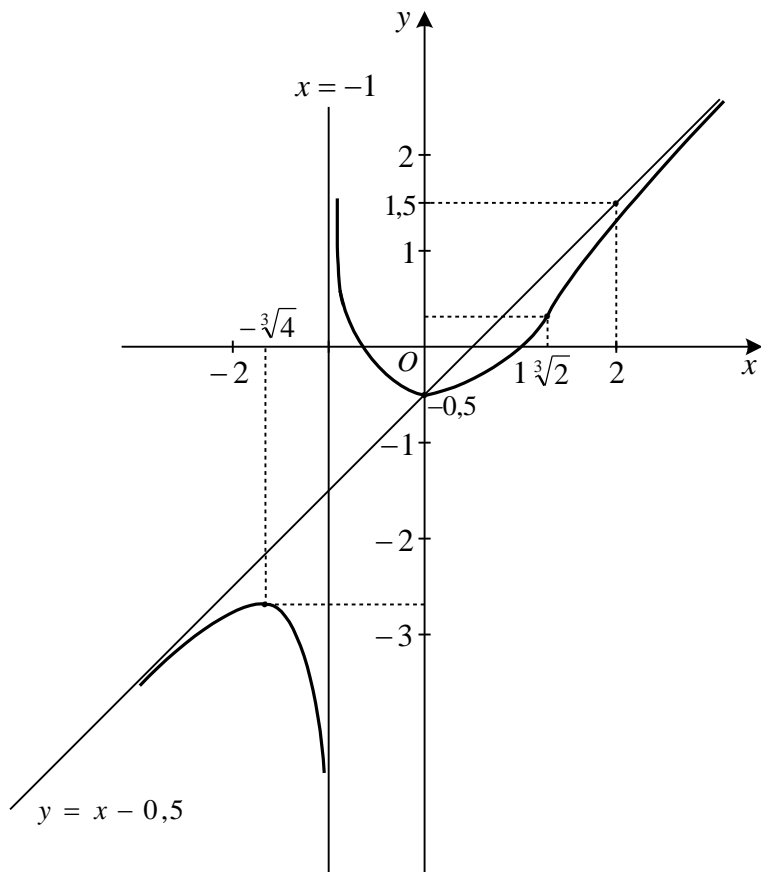
Отже, маємо п'ять інтервалів:  $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$ ,  $(-\sqrt[3]{4}, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, \sqrt[3]{2})$ ,  $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ .

Заповнимо таблицю.

$x$	$(-\infty; -\sqrt[3]{4})$	$-\sqrt[3]{4}$	$(-\sqrt[3]{4}; -1)$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}; +\infty)$
$y'$	+	0	-	-	0	+		+
$y''$	-		-	+	0	+	0	-
$y$	$\square \cap$	max $y(-\sqrt[3]{4}) \approx -2,62$	$\square \cap$	$\square \cup$	min $y(0) = -0,5$	$\square \cup$	т.п. $y(\sqrt[3]{2}) \approx 0,34$	$\square \cap$



6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів 1, 2, 5.



**Приклад 3.** Виконати загальне дослідження функції

$$y = \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}.$$

**1** а) Область визначення функції –  $D = (-\infty; +\infty)$ .

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю  $Oy$  обчислимо значення функції у точці  $x = 0$ :

$$y(0) = \sqrt[3]{0^2} \cdot e^{\frac{2 \cdot 0}{3}} = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь  $Oy$  у точці  $y = 0$ , тобто проходить через початок координат – точку  $O(0;0)$ .

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю  $Ox$  Слід розв'язати рівняння  $y(x) = 0$ :

$$\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x^2} = 0. \text{ Звідси } x = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь  $Ox$  у точці  $x = 0$  (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки  $y(-x) \neq y(x)$  та  $y(-x) \neq -y(x)$ .

**2** Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) для знаходження похилих асимптот розглянемо окремо два випадки:  $x \rightarrow -\infty$  та  $x \rightarrow +\infty$ :

Якщо  $x \rightarrow +\infty$ , маємо за формулами (2):

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( e^{\frac{2x}{3}} \right)'}{\left( x^{\frac{1}{3}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{3} e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2x}{3}} = \infty. \end{aligned}$$

Отже, похилих асимптот при  $x \rightarrow +\infty$  графік функції не має.

Якщо  $x \rightarrow -\infty$ , маємо

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2x}{3}}} = 0.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-\frac{2x}{3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left( \sqrt[3]{x^2} \right)'}{\left( e^{-\frac{2x}{3}} \right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{2}{3} e^{-\frac{2x}{3}}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0. \end{aligned}$$

Отже, за формулою (1) при  $x \rightarrow -\infty$  похилою асимптотою є пряма  $y = 0$ .

б) Оскільки функція елементарна і область визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

**3** Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left( \sqrt[3]{x^2 e^{\frac{2x}{3}}} \right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot e^{\frac{2x}{3}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = \frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Критичні точки 1-го роду:

а)  $y' = 0$ :  $2e^{\frac{2x}{3}}(1+x) = 0$ , або  $1+x = 0$ , звідки  $x = -1$ .

б)  $y'$  не існує:  $\sqrt[3]{x} = 0$ , звідки  $x = 0$ .

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду  $x = -1$ ,  $x = 0$ .

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y'$  на отриманих інтервалах:



(наприклад,  $y'(-6) \approx 0,03 > 0$ ,  $y'(-0,5) \approx -0,3 < 0$ ,  $y'(2) \approx 6,02 > 0$ ).

**4** Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left( \frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{e^{\frac{2x}{3}}(4x^2 + 8x - 2)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Критичні точки 2-го роду:

а)  $y'' = 0$ :  $4x^2 + 8x - 2 = 0$ .

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right); \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1.$$

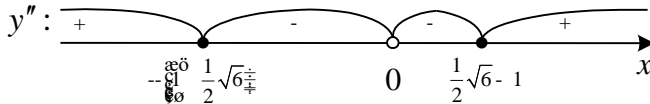
б)  $y''$  не існує:  $\sqrt[3]{x^4} = 0$ , звідки  $x = 0$ .

Отже, маємо три критичних точки 2-го роду

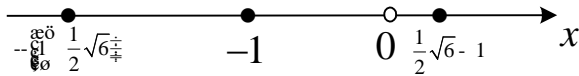
$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx -2,2; \quad x_2 = 0,$$

$$x_3 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1 \approx 0,2.$$

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y''$  на отриманих інтервалах:



**5** Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п'ять інтервалів:  $\left(-\infty; -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$ ,  $\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1; +\infty\right)$ .

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають  $y'$  та  $y''$ , використовуємо результати досліджень у пунктах **3** та **4**.

$x$	$\left(-\infty; -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$	$-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$	$-1$
$y'$	+		+	0
$y''$	+	0	-	
$y$	$\square \cup$	т.п. $y\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx 0,4$	$\square \cap$	max $y(-1) \approx 0,5$

Продовження таблиці

$(-1; 0)$		0	$\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1; +\infty\right)$
-		не існує	+		+
-		не існує	-	0	+
$\square \cap$		min $y(0) = 0$	$\square \cap$	т.п. $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right) \approx 0,4$	$\square \cup$

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів 1, 2, 5.

