Перша та друга визначні границі

Перша визначна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 .$$

Корисно **пам'ятати** наступні основні пари еквівалентних при $x \to 0$:

$\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$.

$\sin kx \sim kx$;	$\sin^n x \sim x^n$;	$\sin^n kx \sim (kx)^n$;
$\operatorname{tg} kx \sim kx$;	$\operatorname{tg}^n x \sim x^n$;	$\operatorname{tg}^n kx \sim (kx)^n$;
$\arcsin kx \sim kx$;	$\arcsin^n x \sim x^n$;	$\arcsin^n kx \sim (kx)^n$;
$\operatorname{arctg} kx \sim kx$;	$\operatorname{arctg}^n x \sim x^n$;	$\operatorname{arctg}^n kx \sim (kx)^n$;
$\ln(1+kx) \sim kx$;	$\ln^n(1+x) \sim x^n$;	$\ln^n(1+kx) \sim (kx)^n$;

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2} .$$

Приклад 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{2\sin^2 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x}{(2x)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8} .$$

Приклад 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x^5+x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^5+x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4+x^2+1}=2 .$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e .$$

Приклад 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3} .$$

маємо невизначеність 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot(x-3)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-6}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{6}{x}}{2+\frac{1}{x}}}=e^{1}=e.$$

Приклад 2

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x}{x^2-9}}.$$

При $x\to 3$: $(2x-5)\to 1$, $\dfrac{x}{x^2-9}\to\infty$.

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x}{x^2-9}}=\lim_{x\to 3}\left[\left(1+2(x-3)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\frac{2(x-3)\cdot x}{x^2-9}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 3}\left(1+2(x-3)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{x+3}}=e^{\frac{2\cdot 3}{3+3}}=e^{1}=e. \quad \lrcorner$$

Приклад 3

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+1)\right].$$

$\ulcorner$ Скориставшись властивостями логарифма $\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$ та $k\ln a=\ln a^{k}$, одержуємо

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right].$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-3}}\right]^{\frac{-3(2x+1)}{3x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x-3}{3x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6-\frac{3}{x}}{3+\frac{1}{x}}}=e^{-2}.$$

Тому

$$\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right]=\ln e^{-2}=-2\cdot\ln e=-2\cdot 1=-2.$$