Дослідження функцій на точки розриву

Приклад 1.

Довести, що при $x=3$ функція $y=\dfrac{x+1}{x-3}$ має розрив та встановити його характер.

Обчислимо: $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x+1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x+1}{x-3}=+\infty$. Отже, функція при $x\to 3$ не має скінченних односторонніх границь (і не визначена у цій точці). Тому $x=3$ є точкою розриву другого роду. ⌋

Приклад 2.

Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

⌈ При $x=1$ функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі функції при $x\to 1$.

Якщо $x\to 1-0$, то $\dfrac{1}{x-1}\to -\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1-0}2^{\frac{1}{x-1}}=0$.

Якщо $x\to 1+0$, то $\dfrac{1}{x-1}\to +\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1+0}2^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$.

Оскільки права границя не є скінченною, то функція у точці $x=1$ має розрив другого роду.

Приклад 3.

Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ \sin x, & \text{якщо} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 2, & \text{якщо} \quad x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Дана функція не є елементарною.

Тому у внутрішніх точках відповідних проміжків їх задання $(-\infty,\, 0]$, $\left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)$ та $\left[\frac{\pi}{2},\, +\infty\right)$ розривів не існує. Отже, розриви функція $f(x)$ може мати лише у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розглянемо $x_1 = 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \sin x = 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Оскільки $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$, то функція неперервна у точці $x_1 = 0$.

Розглянемо $x_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} 2 = 2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Оскільки $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$, то функція $f(x)$ має у точці $x_2 = \frac{\pi}{2}$ неусувний розрив першого роду зі стрибком

$$f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 2 - 1 = 1.$$