ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В наш час використовується декілька основних способів графічного відображення і передачі інформації: літери, цифри, ноти, кресленики, топографічні символи тощо. Кожен із перерахованих способів відображення інформації засновано на зоровому сприйняті символів, – відомо, що людина за допомогою зору сприймає до 80-85% інформації. Ще в давнину говорили: … хто бачить – той двічі читає.

У техніці основним засобом передачі інформації є кресленик та його різновиди. Конструктори зазвичай мають високорозвинену просторову уяву і мислення. Для них навіть самий простий ескіз несе більше інформації, ніж сторінки тексту. Отже, кресленик в умовах виробництва є головним носієм конструкторсько-технологічної інформації, який відображає технічну думку та передає інформацію про об'єкт виробничої діяльності. Це дає підстави констатувати, що у вищих технічних навчальних закладах вивчення курсу «Нарисна геометрія, інженерна і комп'ютерна графіка» є одним з основних у процесі підготовки інженерно-технічних фахівців.

Сучасний рівень розвитку високомеханізованого та автоматизованого виробництва вимагає від майбутнього фахівця глибоких і міцних знань та практичних навичок виконання і читання кресленників за спеціальністю як традиційними методами, так і в середовищі САПР – засобами комп'ютерної графіки.

Виконання кресленників базується на теоретично обґрунтованих методах побудови зображень і на нормативних документах, складених Держстандартом України, з урахуванням відповідних положень міждержавних стандартів (державних стандартів колишнього СРСР). Тому рівень професійної підготовки інженерно-технічного фахівця залежить від його уміння розв'язувати конструкторські задачі графічно, правильно виконувати та читати машинобудівні кресленики.

Зміст конспекту відповідає діючим в Україні нормативним документам щодо виконання та оформлення машинобудівних кресленників.

До конспекту включені розділи, послідовність яких відповідає тематиці вивчення дисципліни «Нарисна геометрія, інженерна і комп'ютерна графіка».

Протягом першого семестру передбачено виконання п'яти розрахунково-графічних робіт і вправ з відповідних тем першої частини дисципліни «Нарисна геометрія». Завдання кожної розрахунково-графічної роботи з прикладами виконання подано у навчальному посібнику «Нарисна геометрія. Практикум», 2013 рік видання, автор – Г.О. Райковська.

Конспект лекційних занять значно облегшить самопідготовку студентів – виконання вправ і індивідуальних розрахунково-графічних робіт; підготовку до іспиту з нарисної геометрії, а також має ціль сприяти набуттю студентами навиків побудови зображень, розвитку просторового мислення, вивчення відповідних ДСТУ, ГОСТів ЄСКД.

Конспект рекомендований для використання студентами машинобудівних спеціальностей у ВНЗ із опанування першої частину курсу «Нарисна геометрія».

ЗАГАЛЬНІ ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ І ОФОРМЛЕННЯ КРЕСЛЕНИКА

ФОРМАТИ. ОСНОВНИЙ НАПИС (ДСТУ ISO 5457:2005)

Усі графічні документи будь-якого призначення слід виконувати відповідно до правил, регламентованих стандартами Єдиної системи конструкторської документації (ЄСКД).

Основні терміни та визначення основних понять встановлені згідно з СКД ДСТУ 3321:2003.

Означення

Формат *– розміри зовнішньої рамки аркуша конструкторського документа, виконаної тонкою лінією.*

Таким чином, формат визначається розмірами зовнішньої рамки, яку виконують тонкою суцільною лінією (рис. 1). Формати поділяються на *основні* (табл. 1) і *додаткові*.

Основний формат – формат конструкторського документа, якому віддають перевагу, розміри сторін становлять 1189 х 841мм (А0) або одержані послідовним діленням його на дві рівні частини паралельно до меншої сторони до формату 297х210мм (А4) разом з останнім (табл. 1).

Додатковий формат – формат конструкторського документа, який утворюють збільшенням меншої сторони будь-якого основного формату на величину, кратну до її розміру.

Таблиця 1

Основні формати

Позначення формату	Розміри сторін формату, мм
А0	841 х 1189
А1	594 х 841
А2	420 х 594
А3	297 х 420
А4	210 х 297

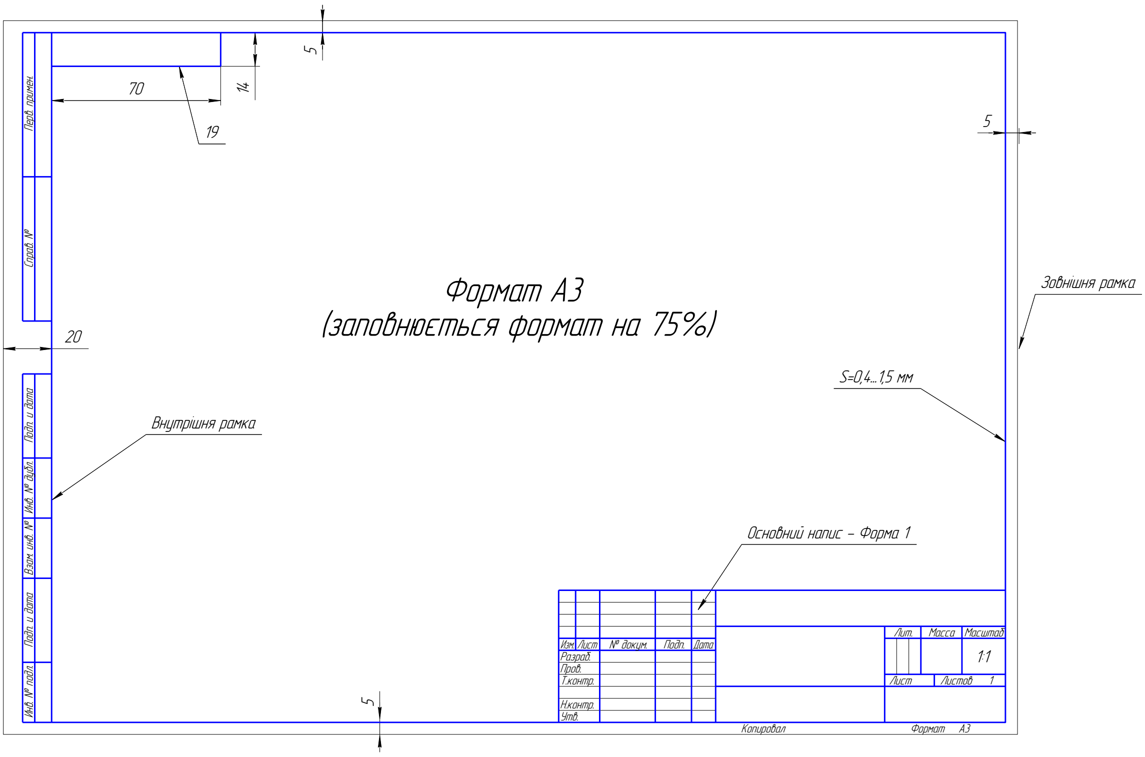


Рис. 1. Формат А3

Кожен кресленик і конструкторський документ повинен мати основний напис. Його розміщують у правому нижньому кутку формату і виконують за ГОСТ 2.104-68 (рис. 2).

Означення

Основний напис *– сукупність установлених характеристик виробу і виконаного на ньому конструкторського документа, які зазначають разом з установленими підписами та відомостями про зміну документа в спеціальному штампі, розташованому в правому куті над нижньою лінією рамки поля документа* (ДСТУ 3321:2003).

На рис. 2 зображено основний напис за *формою 1* (ГОСТ 2.104-68):

– графа 1 – назва виробу (у відповідності з вимогами), а також назва документа;

– графа 2 – позначення документа за ГОСТ 2.201-80 чи за прийнятою на кафедрі формою;

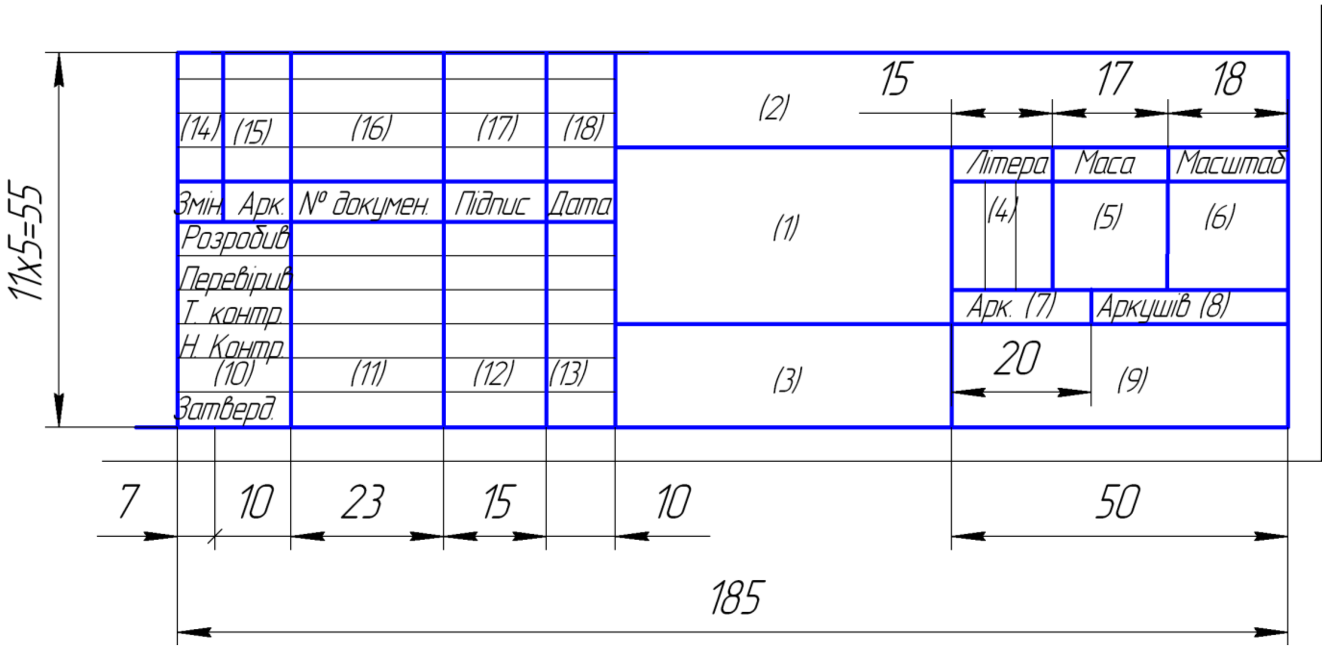


Рис. 2. Основний напис – Форма 1 (ГОСТ 2.104-68)

– графа 3 – позначення матеріалу деталі (графа заповнюється тільки на креслениках деталей);

– графа 5 – маса виробу;

– графа 6 – масштаб зображення;

– графа 7 – порядковий номер аркуша (на документах, які складаються з одного аркуша, графу не заповнюють);

– графа 8 – загальна кількість аркушів документа (графу заповнюють тільки на першому аркуші);

– графа 9 – назва чи індекс підприємства, що випускає документ. У навчальному закладі рекомендується вказувати його скорочену назву (абревіатуру) та індекс групи;

– графа 10 – характер роботи особи, яка підписує документ;

– графа 11 – прізвища осіб, хто креслив і перевіряв кресленик;

– графа 12 – підписи осіб, що вказані в графі 11;

– графа 13 – дата підписання документа;

– графа 19 (рис. 1) – позначення кресленика, повернуте на 180° для формату А4, для форматів більше А4 при розташуванні основного напису поздовж довгого боку аркуша і на

90° для форматів більше А4 при розташуванні основного напису поздовж короткого боку аркуша.

Графи 4, 5, 14…18 заповнюються на документах, що випускаються підприємствами.

МАСШТАБИ
(ДСТУ ISO 5455:2005)

Масштаби є *числові, лінійні* і *кутові.*

Означення

Масштабом *називається відношення розмірів об'єкта, виконаного без спотворення, до його номінальних значень* (ДСТУ 3321:2003).

Масштаби зображень на кресленику вибирають за ДСТУ ISO 5455:2005 (ГОСТ 2.302-68, табл. 2).

Таблиця 25

Масштаби зображень на креслениках

Натуральна величина	1:1									
Масштаби зменшування	1:2	1:2,5	1:4	1:5	1:10	1:15	1:20	1:25	1:40	1:50
Масштаби збільшування	2:1	2,5:1	4:1	5:1	10:1		20:1		40:1	50:1

Позначення масштабу. При позначенні масштабу в спеціальній графі основного напису букву *М* не ставлять, а пишуть тільки відношення, наприклад: *1:1, 1:2* тощо. Якщо окреме зображення на кресленику виконано в масштабі, що не відповідає зазначеному в основному написі, то масштаб позначається безпосередньо біля напису, що стосується цього зображення наприклад, *А*(*1:4*), *Б–Б*(*1:5*).

Незалежно від масштабу розміри на кресленику завжди проставляються дійсні (рис. 3).

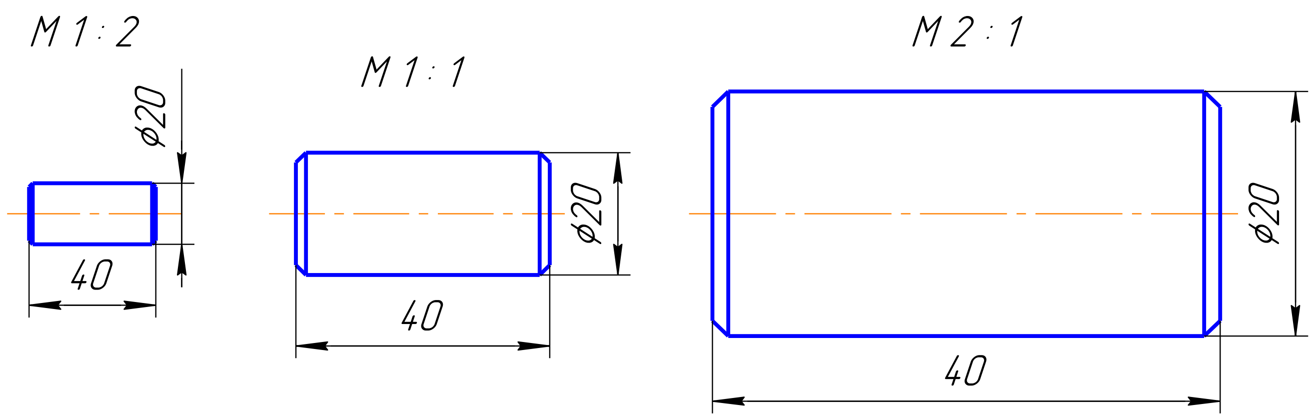
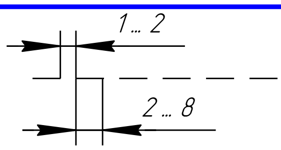
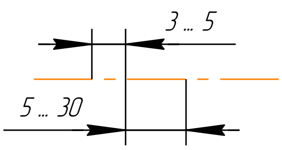
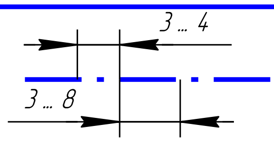
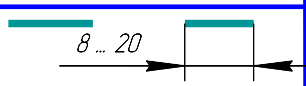
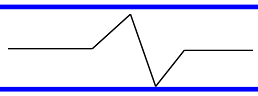
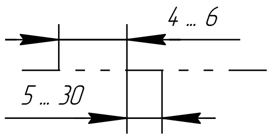


Рис. 3. Приклади застосування масштабу

ЛІНІЇ КРЕСЛЕНИКА
(ДСТУ ISO 128-1:2005)

Таблиця 3

№ пор.	Назва лінії	Накреслення	Товщина лінії порівняно з товщиною основної лінії	Призначення
1	Суцільна основна		S=0,5…1,4 мм	Лінії обрису на кресленику предмета, його поверхонь, розтину й перерізу
2	Суцільна тонка		Від S/2 до s/3	Виносні і розмірні лінії; лінії штрихування; лінії виноски та їх полички; лінії для підкреслювання фізичних написів та позначення розміщених поруч деталей; лінії проекційного зв'язку; лінії для позначення слідів площин; лінії побудови характерних точок у спеціальних побудовах.
3	Суцільна хвиляста		Від S/2 до s/3	Лінії обриву; лінії розмежування виду та розтину
4	Штрихова		Від S/2 до s/3	Лінії невидимого контуру; невидимі лінії перходу
5	Штрихпунктирна тонка		Від S/2 до s/3	Осьові та центрові лінії;лінії для зображення розгортки суміщеної з видом
6	Штрихпунктирна потовщена		Від S/2 до 2/3 S	Позначають поверхні, які потребують термообробки або наноситься покриття; для зображення елементів розміщених перед розтинальною площиною ("накладена проекція")
7	Розімкнута		Від S до 1,5 S	Позначення розтинів, перерізів
8	Суцільна тонка зі зламами		Від S/2 до s/3	Довгі лінії обриву
9	Штрихпунктирна з двома пунктирами		Від S/2 до s/3	Лінії згину на розгортках; лінії для зображення частини виробу в крайніх чи проміжних положеннях; лінії для зображення розгортки, суміщеної з видом

УВАГА!

Під час виконання кресленика дотримання ліній ДСТУ ISO 128-1:2005 обов'язкове.

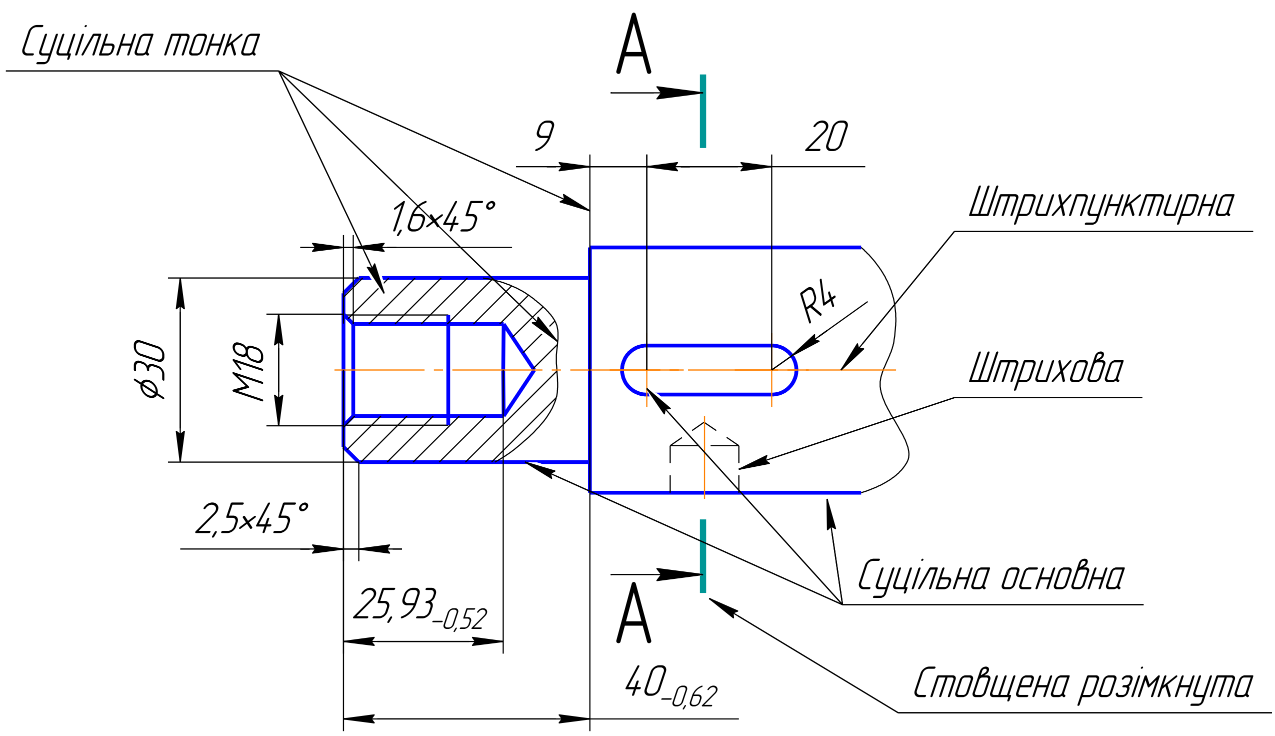


Рис. 4. Фрагмент кресленика деталі

КРЕСЛЯРСЬКИЙ ШРИФТ
(ДСТУ ISO 3098-0:2006)

Шрифт як графічна форма відображення природної мови, слугує для відображення на епюрах і креслениках інформації, яку неможливо чи важко відобразити іншим шляхом.

Літери, цифри і знаки шрифту повинні мати чітке накреслення, що забезпечує їх швидке, безпомилкове і однозначне сприйняття та розуміння відображеної інформації.

У креслярському шрифті використовують український, латинський та грецький алфавіти, арабські та римські цифри, а також знаки. Форми літер українського, латинського та грецького алфавітів наведено на рисунку 6, 7 (шрифт типу Б з нахилом), зразок виконання напису креслярським шрифтом – рис. 5.

Розмір шрифту визначає висоту великих літер h і відповідно висоту малих літер – c.

«Нарисна геометрія – вчить нас правильно
читати чужі та викладати власні думки,
використовуючи в якості слів лінії і точки
як елементи будь-якого зображення».
В. І. Курдюмов

Рис. 5. Зразок виконання напису креслярським шрифтом

АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТ

УФХЦЧШЩЬЄЮЯІЇ

1234567890 I III IV VI VIII IX

()/№%ØR

абвгдежзийклмнопрст

уфхцчшщьєюяії

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTU

VWXYZ

abcdefghijklmnopqrst

uvwxyz

Рис. 6. Креслярський шрифт типу Б – ГОСТ 2. 304-81

Αα – альфа
Ββ – бета
Γγ – гамма
Δδ – дельта
Εε – епсилон
Ζζ – дзета
Ηη – ета
Θϑ – тета
Ιι – йота
Κκ – каппа
Λλ – ламбда
Μμ – мю
Νν – ню
Ξξ – ксі
Οο – омікрон
Ππ – пі
Ρρ – ро
Σσ – сигма
Ττ – тау
Υυ – іпсилон
Φφ – фі
Χχ – хі
Ψψ – псі
Ωω – омега

Рис. 7. Грецький алфавіт

УВАГА!

Параметри креслярського шрифту – ДСТУ ISO 3098-0:2006 наведено в навчальному посібнику [Г.О. Райковська «Нарисна геометрія та інженерна графіка», § 11.4, С. 90-93].

ПОЗИЦІЙНІ І МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ПРОЕКЦІЙ

ЛЕКЦІЯ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Геометричний об’єкт є основною формою предметної області, окремі елементи якої мають як схожі, так і різні характерні ознаки, які дають інформацію про об’єкт.

Співставлення класифікаційних ознак і відповідно їх видів і кількості, надаючи інформацію про об’єкт, дозволяє розташувати геометричні об’єкти в ієрархічній послідовності. Цю класифікаційну послідовність від нижчого до більш високого рівня утворюють: *точка, лінія, відрізок* (частина лінії), *контур, поверхня, відсік* (частина) *поверхні, оболонка, геометричне тіло*.

Кожен з ієрархічних об’єктів утворюється з об’єктів попереднього рівня ієрархії. У разі переходу від нижчого до більш високого рівня ієрархії відбувається ускладнення об’єкта і нарощення кількості інформації.

В основі правил побудови зображень, що розглядає нарисна геометрія і, які використовуються у технічному кресленні лежить *метод проекціювання*.

Отже, зображення просторового предмета на площині досягається відображенням його проекціюванням. За цим методом кожній точці тривимірного простору відповідає певна точка двовимірного простору (площини).

Основними вимогами до зображення є правильність кресленика, його наочність, вимірність, простота у побудові, повнота і метрична визначеність.

У нарисній геометрії предмети відображаються способами *центрального* і *паралельного* проекціювання. Отримані зображення, називаються *проекційними*.

Означення

Проекція *– це зображення предмета, «відкинуте» на площину за допомогою променів.*

Спроекціювати предмет *– це означає зобразити його на площині.*

За допомогою зображення можна вивчати не тільки зовнішні контури існуючого об’єкта, що припинив своє існування і уявного, але і такі його елементи, щоб розглянути їх довелось би повністю зруйнувати даний об’єкт; порівнювати оригінали і т. ін.

Зображення, яке дозволяє визначити взаємозв’язок (взаємозалежність) елементів об’єкта, *називають повним*.

Зображення, за яким можна визначити розміри об’єкта, називають *метрично визначеним*.

ЦЕНТРАЛЬНЕ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Центральне проекціювання є одним із загальних випадків проекціювання геометричних об’єктів (геометричних образів) на площину, воно також може називатись *конічним*, *полярним* проекціюванням або *перспективою* (рис. 8). Цей спосіб використовується при побудові наочних зображень в архітектурно-будівельній справі, малюванні.

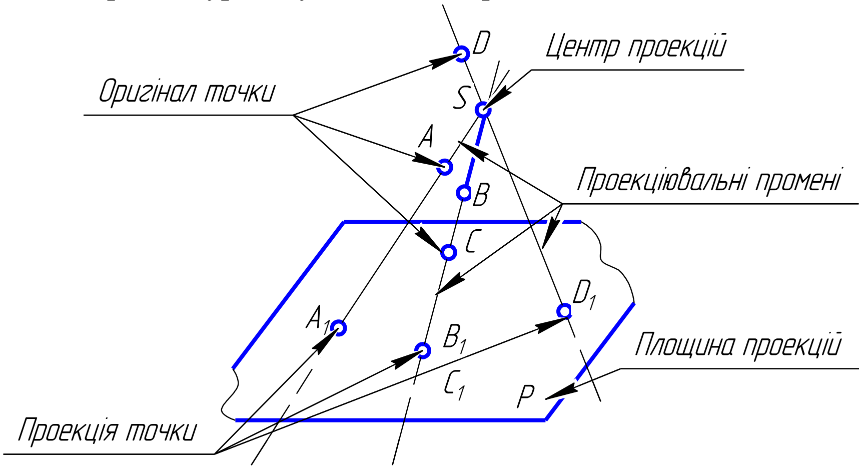


Рис. 8. Метод центрального проекціювання

УВАГА!

Щоб спроекціювати довільну точку необхідно через неї і центр проекцій провести пряму. Точка перетину цієї прямої з площиною проекцій і буде шуканою центральною проекцією точки на вибраній площині проекцій.

Властивості центрального проекціювання

1. За даними умовами проекціювання (заданою площиною P і центром проекціювання S – рис. 9) кожна точка простору (за винятком точки S) має єдину свою проекцію, так як через цю точку і центр проекціювання можна провести тільки одну проекціювальну пряму.

2. Проекцією прямої у загальному випадку є пряма. В окремому випадку, коли пряма проходить через центр проекцій, вона проекціюється в точку, так як сама є проекціювальною прямою.

3. Кожній точці, яка належить будь-якій лінії (прямій чи кривій), відповідає проекція цієї точки, яка належить проекції цієї лінії, інакше, якщо $B \in AC$, то $B_1 \in A_1C_1$ (рис. 8).

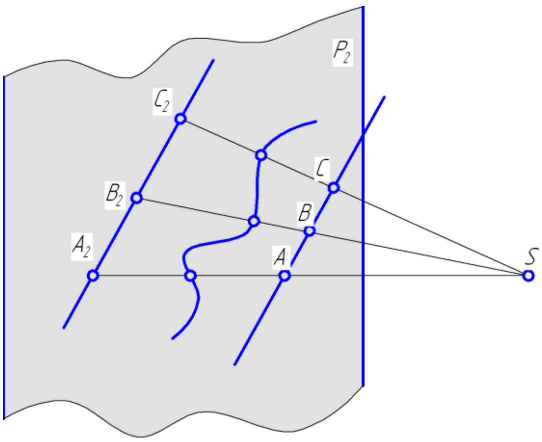


Рис. 9. Властивості центрального проекціювання

З інших властивостей центрального проекціювання можна виділити:

1. Крива лінія у загальному випадку проекціюється у криву, а в окремому – в пряму (рис. 9);

2. Точка перетину ліній проекціюється в точку перетину проекцій цих ліній.

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Паралельне проекціювання є окремим випадком центрального, якщо центр проекціювання віддалити у безмежність (рис. 10). У цьому випадку проекціювальні промені будуть паралельними між собою. Таке проекціювання називається *паралельним*. Зображення, яке отримаємо за цим методом проекціювання, буде паралельною проекцією. Отже, паралельне проекціювання повністю визначається напрямом проекціювання і площиною проекцій.

Паралельне проекціювання має такі самі властивості, що і центральне. Разом з тим, йому належать додаткові властивості:

1. Проекції паралельних прямих паралельні. Так, площини ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 11, а), які проведено у просторі через паралельні прямі, будуть між собою паралельними. Такі площини перетинаються третьою (у прикладі площиною P) по лініям, які паралельні між собою;

2. Відношення відрізків прямої дорівнює відношенню їх проекцій (рис. 11, б) – $\frac{AC}{CB}=\frac{A_1C_1}{C_1B_1}$ на основі властивостей пропорційності відрізків, які відсікаються паралельними прямими на прямих, що перетинаються;

3. Якщо в цій пропорції поміняти місцями крайні члени, тоді $\frac{C_1B_1}{CB}=\frac{A_1C_1}{AC}=const=k$. Це означає, що відношення довжини проекцій відрізка до дійсних розмірів самого відрізка є величиною сталою. Ця величина називається *коефіцієнтом* (чи показником) *спотворення*. Його широко використовують при побудові аксонометричних проекцій;

4. Відношення відрізків двох паралельних прямих дорівнює відношенню їх проекцій;

5. Плоска фігура, яка паралельна площині проекцій, проекціюється на цю площину в натуральну величину.

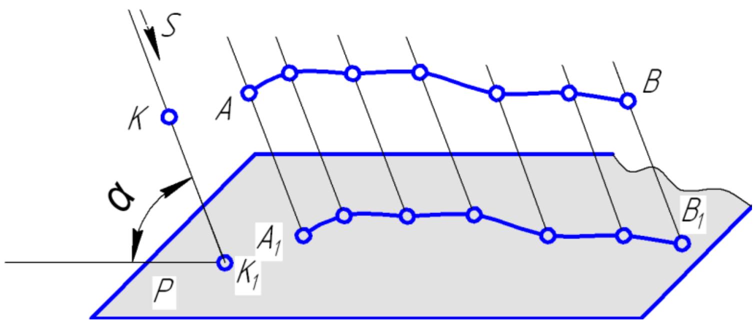
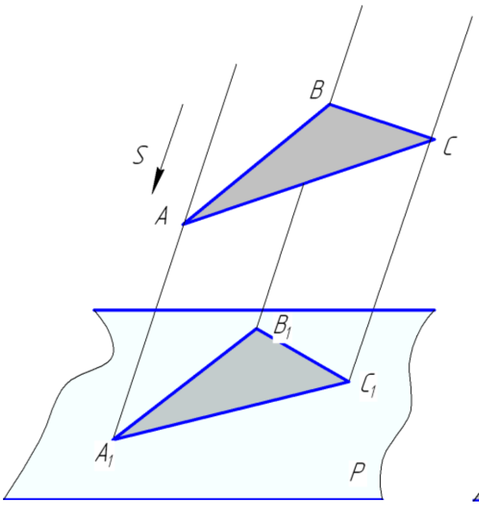
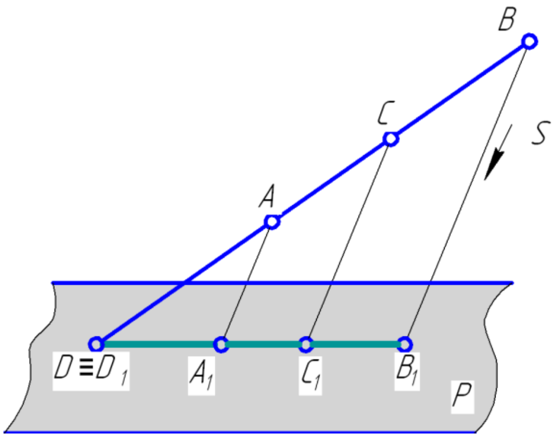


Рис. 10. Паралельне проекціювання





а *б*

Рис. 11. Властивості паралельного проекціювання

Висновок

- Якщо відрізок (чи плоска фігура) переміщуються у просторі паралельно сам-собі, то його паралельна проекція не змінює своєї величини. Також не змінюється його проекція і при паралельному переміщенні площини проекцій.
- У свою чергу паралельне проекціювання поділяється на *косокутне* (проекціювальні промені не перпендикулярні до площини проекцій) і *прямокутне* (проекціювальні промені перпендикулярні до площини проекцій). Прямокутне проекціювання ще має назву *ортогонального*, а проекції *ортогональні*.

Залежно від положення площини проекцій та центрів проекціювання можна дістати різні проекційні системи. Найпоширенішою системою, що застосовується в машинобудуванні, архітектурі, будівництві є система прямокутних (ортогональних) проекцій, чи *метод Монжа* – метод паралельного проекціювання (при цьому беруться прямокутні проекції на дві взаємоперпендикулярні площини проекцій). За цим методом забезпечується наочність, точність і зручність зображення предметів на площині.

Означення

Зображення просторової фігури двома її ортогональними проекціями на дві взаємоперпендикулярні площини називається ***методом Монжа****.*

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОНАННЯ КРЕСЛЕНИКІВ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Означення

Кресленик *– це основний тип конструкторського документа, який повинен відповідати ряду вимог.*

До загальних вимог слід віднести:

1) у ході виконання креслеників необхідно дотримуватись метода прямокутного проекціювання;
2) кресленик повинен бути простим і зрозумілим, щоб не виникнуло подвійного сприйняття;

3) кресленик завжди повинен бути наочним і давати чітке уявлення про предмет, що зображається незалежно від того чи це точка, чи виріб;
4) кресленик має виконуватись у строгій відповідності з правилами проекціювання і встановленими вимогами та умовностями;
5) кресленик завжди повинен бути виконаний в масштабі, за винятком ескізів;
6) поле кресленика завжди повинно бути рівномірно заповненим (75%);
7) лінії кресленика повинні відповідати стандарту ГОСТ 2.303-68 (ДСТУ ISO 128-20:2003).

Прямокутне (ортогональне) проекціювання є основним і найчастіше використовується в нарисній геометрії для відображення на площині об’єктів будь-якого рівня складності, що розташовані у просторі. Також за допомогою даного методу відображається інформація про сам об’єкт, яка характеризує його склад, структуру, форму, розміри форми, положення і орієнтацію об’єкта в просторі, а також операції, що здійснюються з ним.

УВАГА!

Правильний підхід до задачі – запорука успіху її розв'язання. Таким чином, перед тим як приступити до розв’язування задач необхідно опрацювати теоретичний матеріал із даної теми за підручником, навчальним посібником, конспектом лекцій, ознайомитись з методами і після цього можна приступати до графічного розв’язку задачі.

Розв'язок будь-якої задачі зводиться до наступного:
– докладний аналіз умови задачі;
– складення алгоритму розв'язку задачі на епюрі й просторі;
– графічний розв'язок задачі.

ТОЧКА

В інженерній практиці для відображення форми тривимірних об’єктів використовують два або три взаємоперпендикулярних направлення проекціювання (рис. 12, а) на відповідні їм три площини проекцій: горизонтальну – $П_1$, фронтальну – $П_2$ і профільну – $П_3$. Площини $П_1$, $П_2$ і $П_3$ приймаємо за основні площини проекцій.

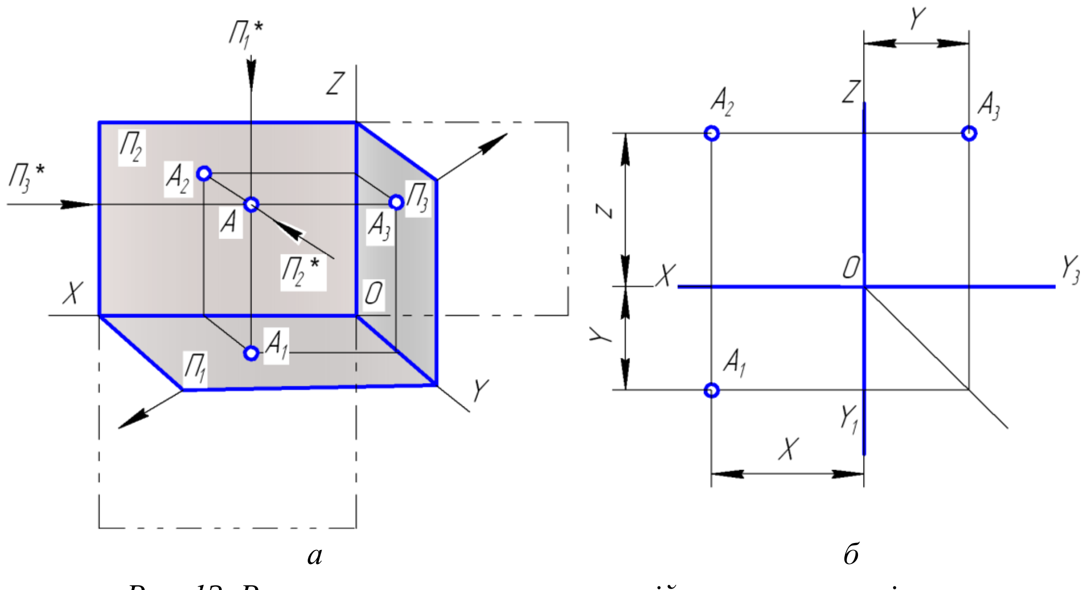
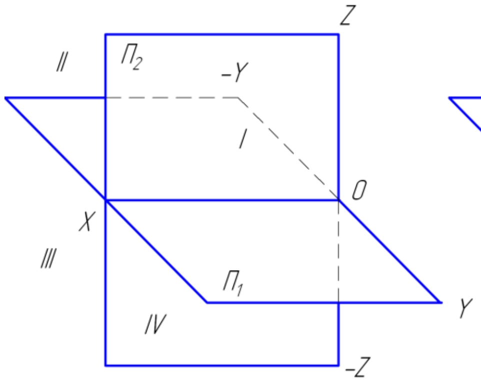


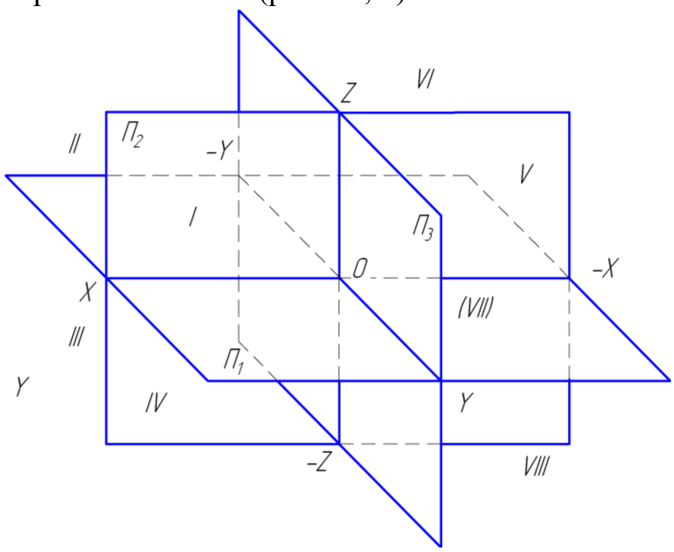
Рис. 12. Розташування площин проекцій разом з проекціями точки

Перетинаючись між собою, площини $П_1$ і $П_2$ ділять простір на чотири частини, які називають *чвертями* (I, II, III, IV) чи *квадрантами.* Їх нумерують у послідовності, вказаній на рис. 13, а. Першою чвертю вважають ту частину простору, в якій обидві площини проекцій повернуто до спостерігача видимими сторонами.

В практиці у процесі створення креслеників і при розв'язуванні задач зустрічаються випадки, коли корисно мати не дві, а три проекції фігури на три взаємоперпендикулярні площини. При перетині ці площини утворюють 8 октант (рис. 13, б).



а



б

Рис. 13. Утворення октант

Кожній октанті відповідає своя система знаків направлення проекційних осей (табл. 9).

Таблиця 9

Напрям осей проекцій в октантах

Осі проекцій	Октанти							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
OX	+	+	+	+	–	–	–	–
OY	+	–	–	+	+	–	–	+
OZ	+	+	–	–	+	+	–	–

Просторову систему площин проекцій $П_1$, $П_2$ і $П_3$ перетворюють у плоску, розвертаючи площину $П_1$ навколо осі X, а площину $П_3$ – навколо осі – Z до суміщення з площиною $П_2$ (рис. 11, а, б).

Графічною інформацією точки є її положення (координати) відносно площин проекцій $П_1$, $П_2$, $П_3$.

На рис. 12 представлено наочне зображення (косокутна фронтальна диметрія) точки А, розташованої у просторі між площинами проекцій $П_1$, $П_2$ і $П_3$. Проекціювальні промені проходять через точку А в направлені векторів $П_1$*, $П_2$*, $П_3$*, які перпендикулярні до площин проекцій і в точці зустрічі з площинами проекцій утворюють відповідні проекції точки $П_1(А_1)$, $П_2(А_2)$, $П_3(А_3)$, які розташовані в проекційному зв’язку.

Лінії зв’язку з’єднують проекції точок і вони перпендикулярні до осей проекцій, що утворюються в перетині суміжних площин проекцій.

Після перетворення наочного зображення у плоске вся інформація про просторове положення точки, відображується на одній площині, поділеної на частини $П_1$, $П_2$, $П_3$. Умовні границі площин проекцій на епюрі дозволяється не показувати.

УВАГА!

Читаючи такий епюр необхідно зрозуміти весь об'єм інформації про точку і подумки уявити повну картину її положення в системі площин проекцій $П_1$, $П_2$ і $П_3$. При виконанні проекцій геометричного об'єкта будь-якого ієрархічного рівня, побудови починаються з проекціювання точки, що входить до його структури.

При побудові профільної проекції використовують наступні способи побудов (рис. 14, а – проекціювальний, б – координатний, в – за допомогою постійної прямої):

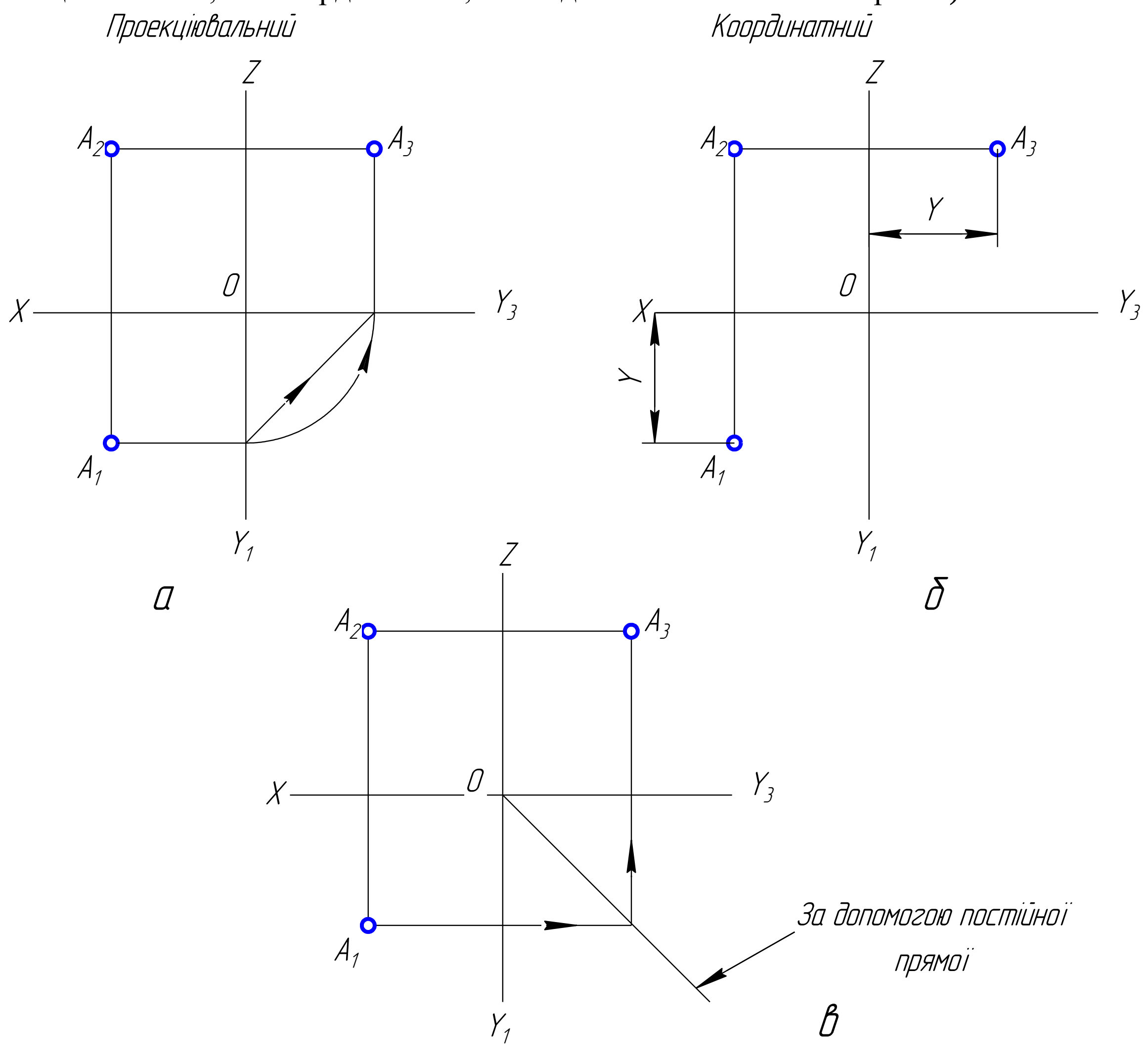


Рис. 14. Способи побудови проекцій точки на епюрі

Положення точки у просторі може бути задане за допомогою трьох її вимірів (координат) широтою (абсцисою – X), глибиною (ординатою – Y), висотою (аплікатою – Z), інакше трьома числами. Запис координат точки здійснюється у такому вигляді: A(x, y, z).

Стосовно площин проекцій точка може займати як загальне, так і окреме положення (рис. 15 а):

1) точка розташована у просторі – всі її проекції лежать на площинах проекцій (точка A);

2) точка належить одній з площин проекцій – одна її проекція збігається з точкою, а інші лежать на осях (точка B);

3) точка одночасно належить двом площинам проекцій (вона лежить на одній з осей проекцій) – дві її проекції співпадають, а третя співпадає з початком осей проекцій (точка С).

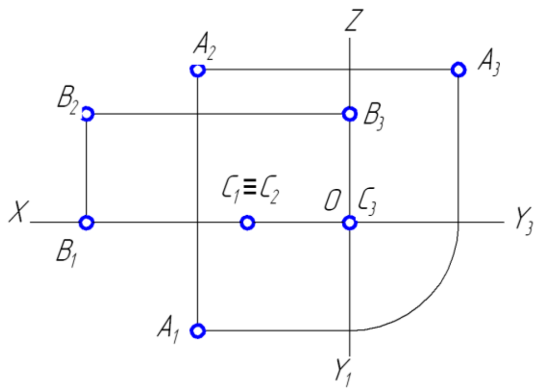
Залежно від положення точки в тій чи іншій чверті буде визначатися розташування її проекцій на епюрі (рис. 15, б):

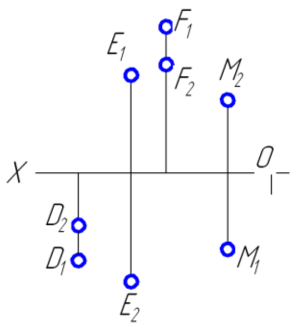
а) якщо точка розташована в першій чверті, то горизонтальна проекція точки знаходиться під віссю проекцій, а фронтальна – над віссю проекцій (точка М)

б) якщо точка розташована в другій чверті, то обидві проекції точки – горизонтальна і фронтальна знаходяться над віссю проекцій (точка F);

в) якщо точка розташована в третій чверті, то горизонтальна проекція точки лежить над віссю проекцій, а її фронтальна проекція – під віссю (точка Е);

г) якщо точка розташована в четвертій чверті, то її горизонтальна і фронтальна проекції розташовані під віссю проекцій (точка D).





а б

Рис. 15. Положення точки стосовно площин проекцій

Твердження

- Якщо площини проекцій знаходяться у положенні Π_1 і Π_2, то *кожній точці простору буде відповідати упорядкована пара точок на полях площин проекцій*.
- Справедливим є і протилежне твердження – *упорядкованій парі точок, що лежать на полях площин проекцій відповідає єдина точка простору.* Ця властивість є фундаментальною складовою, яка утворює основу побудови проекційного кресленика.
- Відстань Y – від горизонтальної проекції точки до осі проекцій дорівнює відстані від самої точки до вертикальної площини проекцій.
- Відстань Z – від вертикальної проекції точки до осі проекцій дорівнює відстані від самої точки до горизонтальної площини проекцій.
- Координата Z – додатна для точок, що розташовані над горизонтальною площиною проекцій і від'ємна для точок, розташованих під горизонтальною площиною проекцій.
- Координата Y – додатна для точок, що розташовані перед вертикальною площиною проекцій і від'ємна для точок, розташованих за вертикальною площиною проекцій.

ЛЕКЦІЯ 2

ПРЯМА. ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИН ТА ЇХ ВІДСІКІВ

2.1. Прямі лінії і точки

- *Інформацією про пряму* є дані щодо її форми, положення і орієнтації стосовно площин проекцій. Пряма уявляє собою безперервну однопараметричну безмежність точок.
- *Інформацією про відрізок* є дані, що відносяться до складу, структури, форми, положення, орієнтації і розмірів. Структуру відрізка утворює частина прямої, яка розташована між двома кінцевими точками.
- *Форма прямої* характеризується тим, що у будь-якій її точці радіус кривизни дорівнює безмежності.
- *Розміри форми відрізка прямої* характеризуються частиною прямої і відстанню між її кінцевими точками (довжина відрізка).

Для побудови ортогональної проекції прямої необхідно визначити проекції множини точок, що утворюють пряму. Зрозуміло, що ортогональними проекціями прямої завжди будуть прямі, крім того випадку, коли пряма в просторі перпендикулярна до однієї з площин проекцій і для її побудови достатньо тільки двох точок, які належать даній прямій і через побудовані проекції точок провести пряму.

Стосовно площин проекцій пряма займає *довільне* і *особливе* (часткове) *положення*. Особливе (часткове) положення: прямі рівня і проекціювальні прямі.

Означення

Довільним вважається таке положення, коли пряма розташована похило до всіх трьох площин проекцій, тобто пряма не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій. Вона має назву ***прямої загального положення*** (рис. 16).

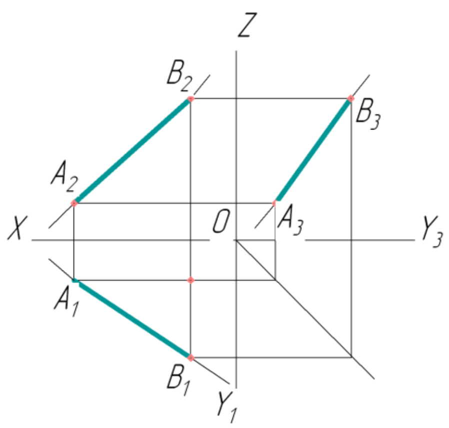


Рис. 16. Пряма загального положення

Означення

Пряма, паралельна до однієї з площин проекцій – називається прямою рівня (рис. 17).

Пряма, перпендикулярна до однієї з площин проекцій – називається проекціювальною прямою (рис. 18).

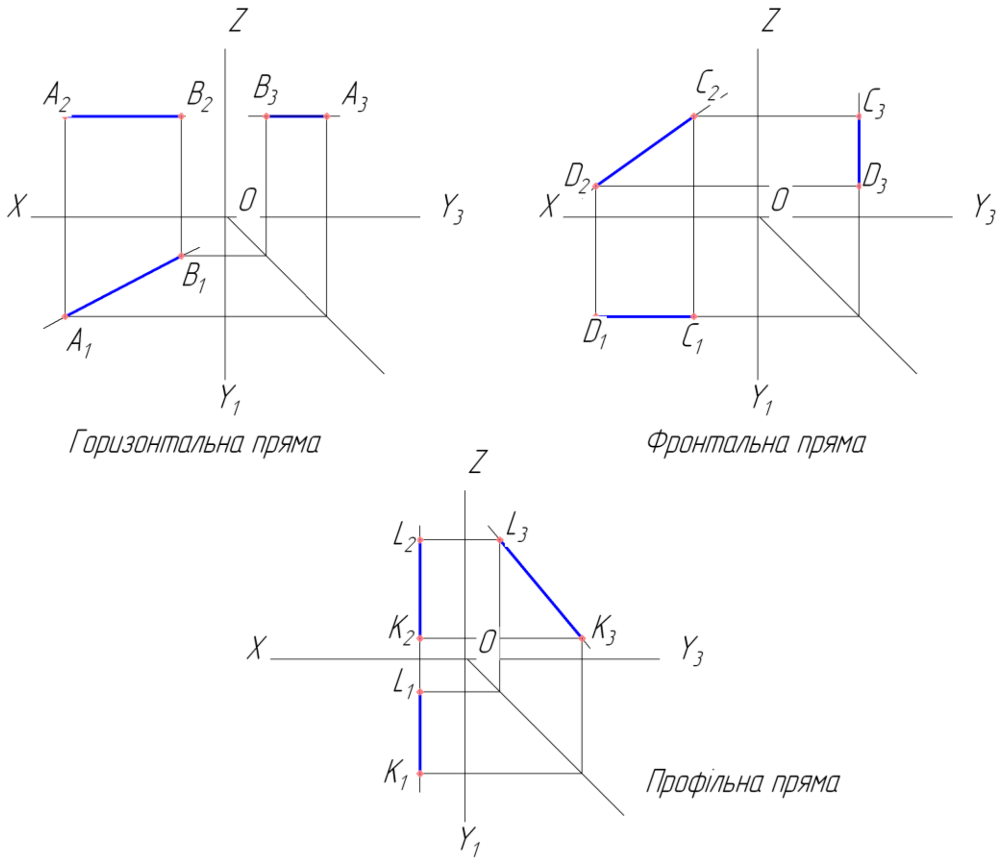


Рис. 17. Прямі рівня

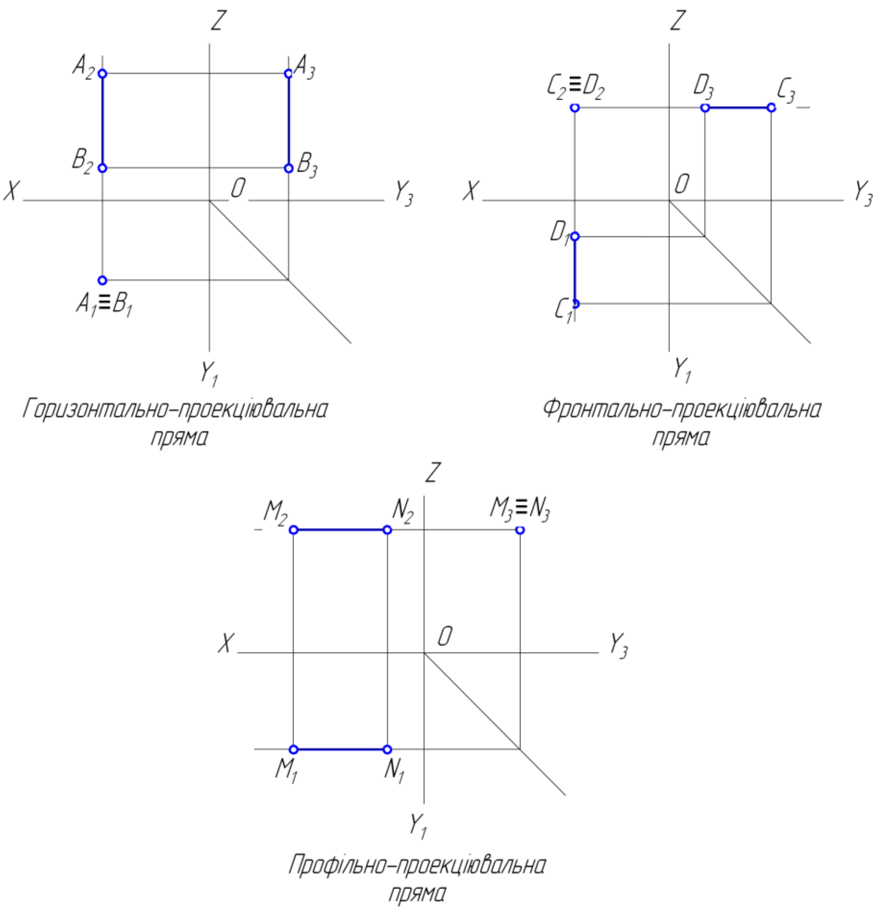


Рис. 18. Проекціювальні прямі

УВАГА!

Проекції прямої і відрізка прямої на паралельні до них площини проекцій відбивають точно кути між ними і двома іншими площинами проекцій. Форма проекцій прямої і відрізка прямої співпадає з їх формою. Проекції відрізка коротші за довжину самого відрізка.

Твердження

- Оскільки всі точки горизонтальної прямої рівновіддалені від площини $П_1$, то фронтальна проекція горизонталі паралельна осі OX, профільна проекція паралельна осі OY, а горизонтальна проекція відрізка горизонталі дорівнює натуральному відрізку прямої, що проекціюється.
- Усі точки фронталі однаково віддалені від площини $П_2$, тому горизонтальна проекція фронталі паралельна осі OX, профільна проекція паралельна осі OZ, а фронтальна проекція відрізка фронталі дорівнює натуральному відрізку прямої, що проекціюється.
- Оскільки всі точки профільної прямої однаково віддалені від площини $П_3$, то горизонтальна проекція і фронтальна проекція перпендикулярні до осі OX, а профільна проекція дорівнює натуральному відрізку прямої, що проекціюється.
- Якщо пряма паралельна двом площинам проекцій, то вона перпендикулярна до третьої і проекціюється на неї в точку, а на дві інші площини проекцій відрізок такої прямої проекціюється в натуральну величину.

Означення

***Слід прямої** – це точка перетину прямої з площинами проекцій* (рис. 19).

Слід прямої у площині $П_1$ називається *горизонтальним*, у площині $П_2$ – *фронтальним*, у площині $П_3$ – *профільним*.

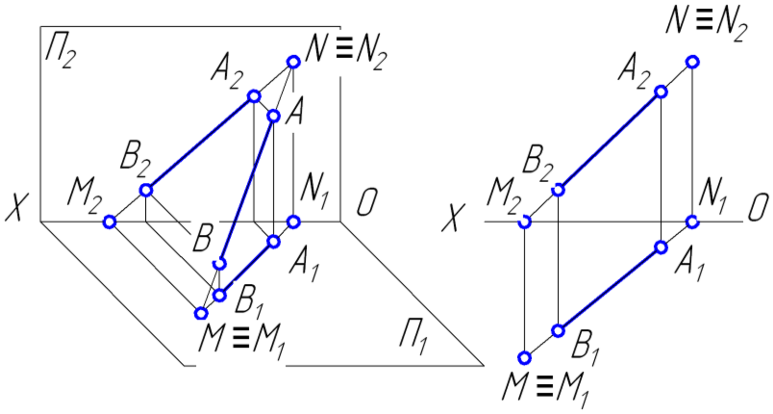


Рис. 19. Слід прямої

Правило

Для знаходження горизонтального сліду прямої необхідно продовжити фронтальну проекцію прямої до перетину з віссю OX; з цієї точки провести перпендикуляр до осі OX і продовжити його до перетину з горизонтальною проекцією заданої прямої, ця точка і буде шуканою.

Для знаходження фронтального сліду прямої необхідно продовжити горизонтальну проекцію прямої до перетину з віссю OX; з цієї точки провести перпендикуляр до осі OX *і продовжити його до перетину з фронтальною проекцією заданої прямої, ця точка і буде шуканою.*

Сліди M і N прямої ділять її на частини, що розміщені в різних октантах і на які простір розбивають площини $П_1$ і $П_2$. Тому за проекціями прямої або її слідами можна визначити положення прямої в просторі відносно площин проекцій, встановити, через які октанти вона проходить.

Положення точки і прямої

Інцидентність точки і прямої паралельним проекціюванням не порушується. На основі цієї властивості можна сформулювати умову належності точки прямій у просторі (рис. 20).

Твердження

- Якщо в просторі точка лежить на прямій, то на епюрі проекції точки лежать на однойменних проекціях цієї прямої.
- Якщо в просторі пряма проходить через точку, то на епюрі проекції прямої проходять через однойменні проекції цієї точки.

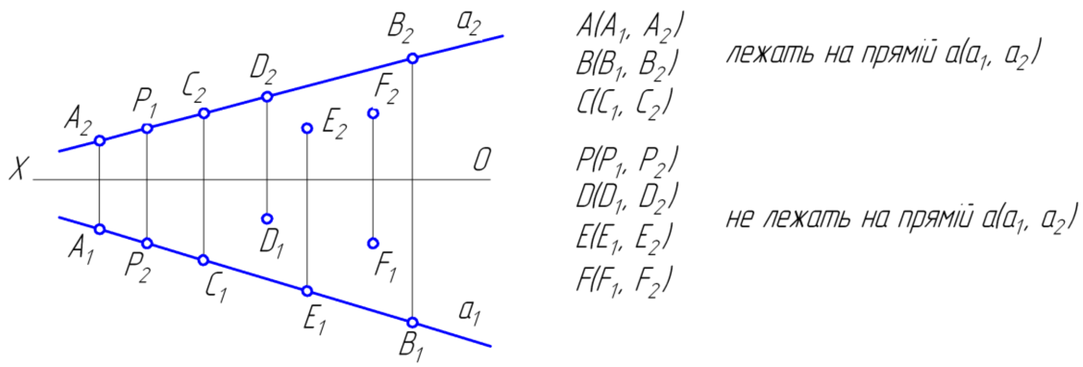


Рис. 20. Положення точки і прямої

Висновок

Якщо хоч одна із проекцій точки не лежить на відповідній проекції прямої, то точка не лежить на прямій.

Взаємне положення двох прямих

Прямі лінії у просторі, що проходять через два відрізки, що їх визначають і в залежності від відносного розташування відрізків можуть бути *паралельними, перетинатися або мимобіжними*.

Твердження

- Якщо дві прямі у просторі паралельні, то їх однойменні проекції також паралельні (рис. 21, а).

  Для прямих загального положення справедливе й *обернене твердження:* якщо дві однойменні проекції прямих попарно паралельні, то прямі у просторі паралельні.
- Якщо дві прямі у просторі перетинаються, то їх однойменні проекції перетинаються між собою в точках, які є проекціями точки перетину даних прямих, при цьому ці точки-проекції повинні лежати на одному й тому ж перпендикулярі до відповідної осі проекцій (рис. 21, б).
- Якщо дві прямі не паралельні і не перетинаються, то вони мимобіжні (рис. 21, в).

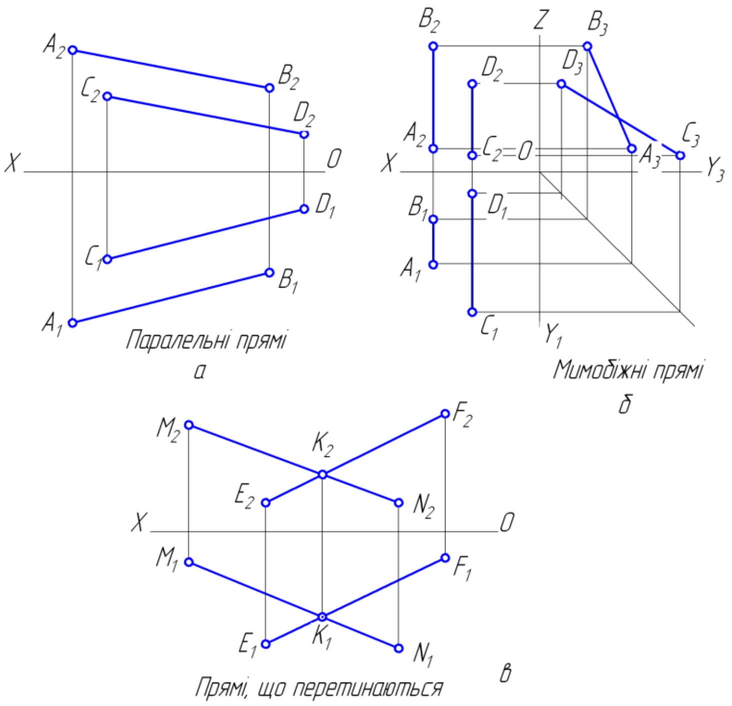


Рис. 21. Взаємне положення двох прямих

Ділення відрізка прямої в заданому відношенні

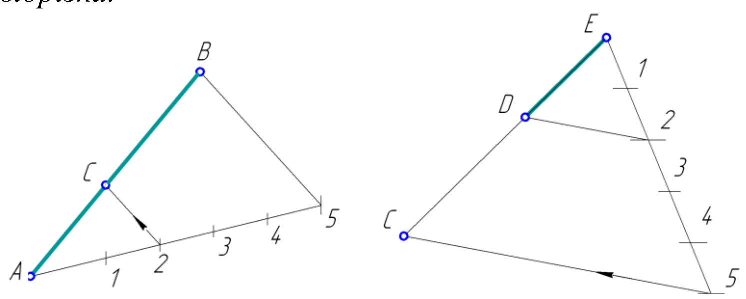
Відрізок прямої лінії можна поділити точкою у будь-якому заданому відношенні. Точка може бути розташованою як на самому відрізку, так і за межами, тобто на продовженні його.

Твердження

- Якщо точка належить відрізку прямої, то вона ділить відрізок у будь-якому заданому відношенні. Таке ділення називається *внутрішнім* (рис. 22, а).
- Якщо точка належить прямій даного відрізка, але лежить не на відрізку, а на його продовженні, то вона також ділить відрізок у будь-якому заданому відношенні. Таке ділення називається *зовнішнім* (рис. 22, б).

Правило

Щоб поділити відрізок прямої у заданому відношенні, необхідно спочатку з будь-якої точки кінця відрізка довільно провести допоміжну пряму, яку поділимо у заданому відношенні, наприклад 2:3, на рівні частини будь-якої довжини (на рис. 22 – відкладено п'ять однакових відрізків). Крайню точку з'єднуємо з іншим кінцем відрізка і через точку, що ділить відрізок у заданому відношенні проводимо промінь паралельно до побудованого відрізка.



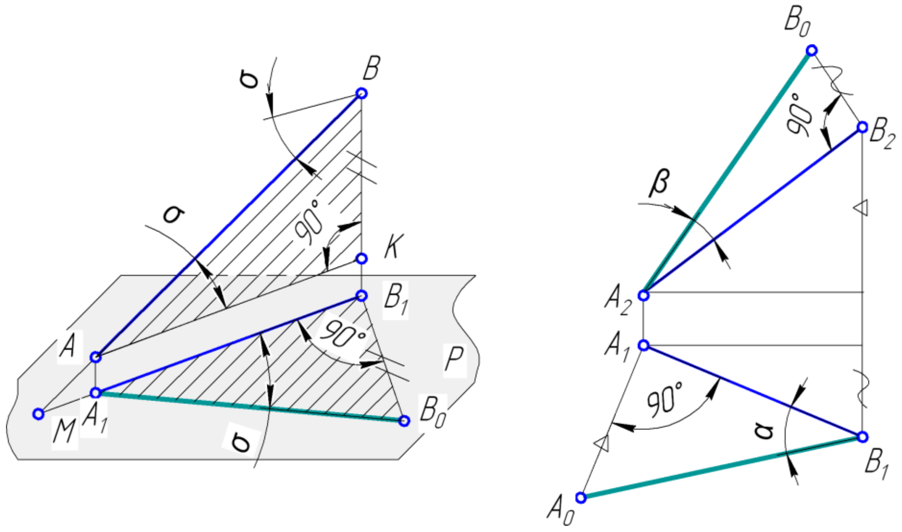
а б

Рис. 22. Ділення відрізка прямої у заданому відношенні

Визначення довжини відрізка прямої і кутів нахилу його до площин проекцій

Кут між прямою і площиною визначається кутом, який складається з прямої та її ортогональної проекції. Цей же кут можна визначити як додатковий до гострого кута між прямою і направленням площини, утворюючи кут 90°.

Довжину відрізка прямої і кут його нахилу до площин проекцій можна визначити, використовуючи побудову прямокутного трикутника (рис. 23 а, б).



а б

Рис. 23. Визначення довжини відрізка та кутів нахилу його до площин проекцій

У прямокутному трикутнику АВК (рис. 23, а) один з катетів дорівнює проекції відрізка на площину Р, а другий – різниці віддалей точок А і В кінців даного відрізка від площини Р ($BK=BB_1-AA_1$). Гіпотенуза АВ прямокутного трикутника нахилена до катета АК під кутом σ, який дорівнює куту нахилу відрізка АВ до площини Р.

Побудований в площині Р прямокутний трикутник $A_1B_1B_0$ визначає дійсну величину прямої лінії, а кут σ – кут нахилу прямої до площини проекцій.

Твердження

- Довжину відрізка прямої за його проекціями можна визначити як гіпотенузу прямокутного трикутника, одним з катетів якого є одна з проекцій даного відрізка, а другим катетом – абсолютна величина алгебраїчної різниці відстаней від кінців другої проекції відрізка до осі проекцій.
- Якщо відрізок паралельний до горизонтальної площини проекцій, то кут між горизонтальною проекцією даного відрізка і віссю проекцій дорівнює куту нахилу самого відрізка до вертикальної площини проекцій.
- Якщо відрізок паралельний до вертикальної площини проекцій, то кут між вертикальною площиною даного відрізка і віссю проекцій дорівнює куту нахилу самого відрізка до горизонтальної площини проекцій.
- Кут у трикутнику між катетом – горизонтальною проекцією відрізка і гіпотенузою, його дійсною величиною, дорівнює куту нахилу самого відрізка до горизонтальної площини проекцій (рис.23, б – кут α).

- Кут у трикутнику між катетом – вертикальною проекцією відрізка і гіпотенузою, його дійсною величиною, дорівнює куту нахилу самого відрізка до вертикальної площини проекцій (рис. 23, б – кут β).

Випадки проекціювання плоских кутів

Твердження

- Прямий кут проекціюється у вигляді прямого кута, тоді коли одна з його сторін паралельна до однієї з площин проекцій, а друга не перпендикулярна до цієї ж площини.
- Якщо обидві сторони будь-якого кута паралельні до однієї з площин проекцій, то на цю площину проекцій він проекціюється в дійсну величину.

Теорема

Якщо у просторі задано дві взаємно перпендикулярні прямі, що перетинаються, і одна з них розташована паралельно площині проекцій, то їх проекції на цій ж площині проекції також будуть взаємоперпендикулярні.

2.2. ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИН ТА ЇХ ВІДСІКІВ

Площина в усіх направленнях безмежна, не має кривизни і структурних складових. Інформація стосовно площини включає дані про її форму, положення, орієнтацію і розміри її орієнтації.

Форма площини характерна тим, що до неї можна прикласти пряму, яка може мати будь-яке направлення. У будь-якому місці й в усіх варіантах положення прямої всі її точки співпадають з площиною.

Площина у просторі повністю визначається наступними геометричними елементами (рис. 24):

1) трьома точками A, B, C, які не лежать на одній прямій;
2) прямою N і точкою C, яка не лежить на цій прямій;
3) двома прямими, що перетинаються – N і F;
4) двома паралельними прямими – N і M;
5) будь-яким відсіком, наприклад, трикутником ABC.

Положення і орієнтацію площини також можна задати однією точкою і направленням нормалі до площини. При цьому від одного виду задання площини можна легко перейти до іншого.

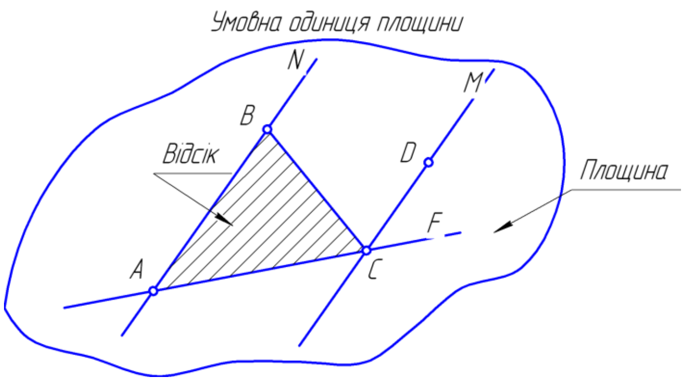


Рис. 24. Способи задання площини

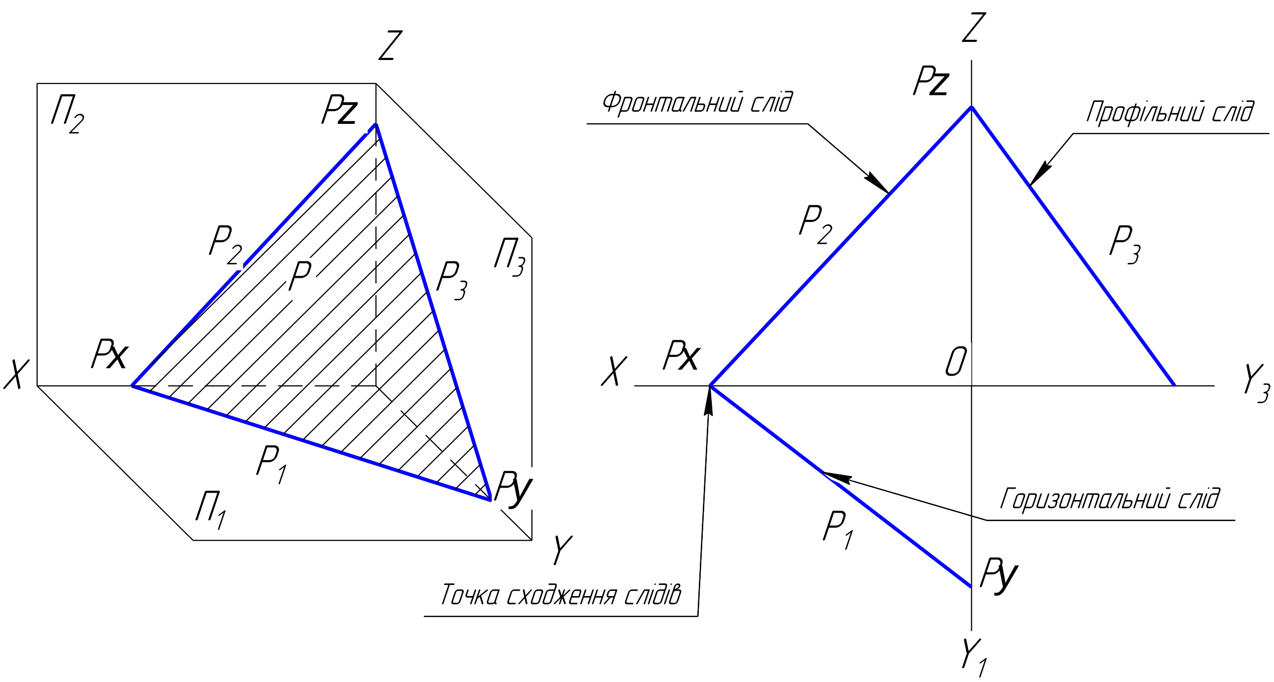
Площина не може приймати участь в утворенні форми деталі, так як вона безмежна. Проекції всіх точок площини співпадають з усіма точками площини проекцій. Тому в техніці прийнято задавати площину її відсіками. На практиці найчастіше площину задають прямокутником або колом. Один відсік задає одну площину, але одна площина не може мати будь-яку кількість відсіків.

Спосіб слідів

При розв'язуванні практичних задач часто застосовують зображення площини на епюрі за допомогою прямих ліній, по яких вона перетинає площини проекцій $П_1$, $П_2$, $П_3$.

Означення

Слідом площини *називається пряма, по якій ця площина перетинається з площиною проекцій* (рис. 25).



а б

Рис. 25. Сліди площини

Положення площини в просторі повністю визначається заданням двох її слідів. Кожна пара слідів площини перетинається на відповідній осі проекцій, ця точка перетину називається *точкою сходження слідів*. Площина загального положення має слід у кожній площині проекцій, ці сліди утворюють *трикутник слідів* (рис. 25, б).

Означення

Пряма перетину даної площини P з горизонтальною площиною проекцій називається ***горизонтальним слідом площини*** *(P_1), з фронтальною площиною проекцій –* ***фронтальним слідом*** *(P_2), з профільною площиною проекцій –* ***профільним слідом*** *(P_3).*

УВАГА!

Слід площини на площині проекцій збігається зі своєю проекцією на цій площині, а друга проекція цього ж сліду лежить на відповідній осі проекцій.

Відсік площини

Прикладом наповненого відсіку є відсік, який утворює контур трикутника ABC (рис. 26) і частина площини, що розташована в середині його. Усі точки контуру співпадають із площиною.

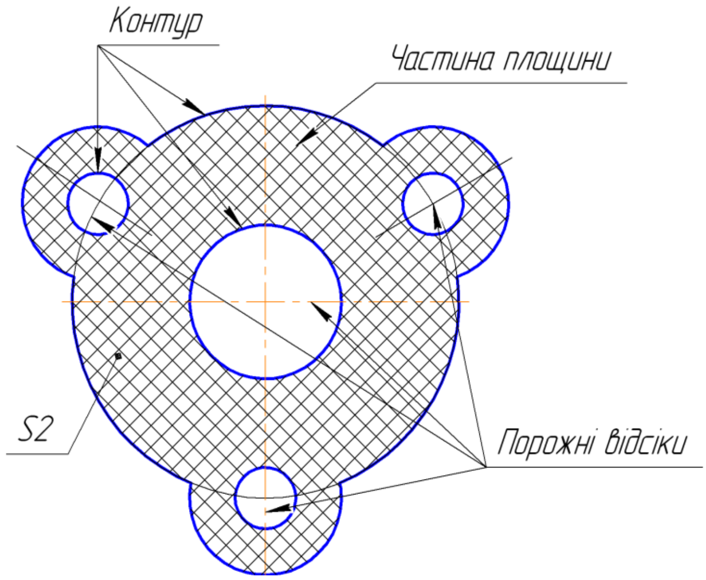


Рис. 26. Розміри, форма і орієнтація складного відсіку

Стосовно площин проекцій відсік і площина займають ***довільне*** положення (*загальне* положення, рис. 27) і ***особливе*** (*часткове*, рис. 28, 29). Площини особливого положення – це площини рівня і проекціювальні. Далі на кресленіках площини будемо задавати відсіками.

УВАГА!

Площина загального положення як і будь-який її відсік, похила до всіх трьох площин проекцій.

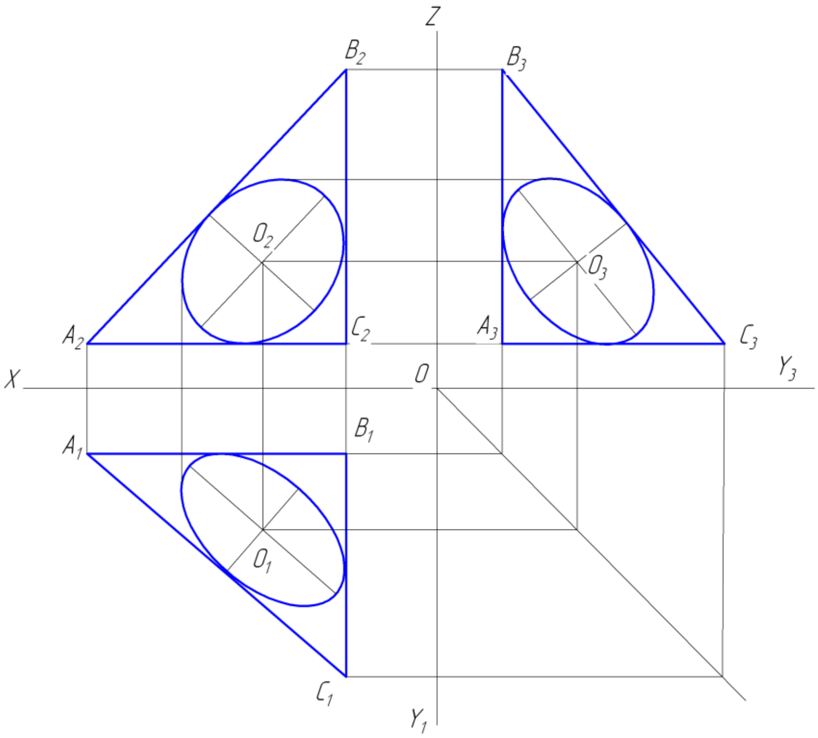


Рис. 27. Площина і відсік загального положення

У контури відсіку вписано коло. Його проекції мають форму еліпсів. Великі вісі еліпсів дорівнюють довжині діаметра кола і їх проекції паралельні: на площині $П_1$ – горизонталі, на площині $П_2$ – фронталі, на площині $П_3$ – профільній прямій. Довжина малих осей залежить від кутів нахилу відсіку до площин проекцій, якщо ці кути різні по величині, то і їх довжини також будуть різними і відповідно форма проекцій відсіків відрізняється від дійсної форми відсіку по-різному (рис. 27).

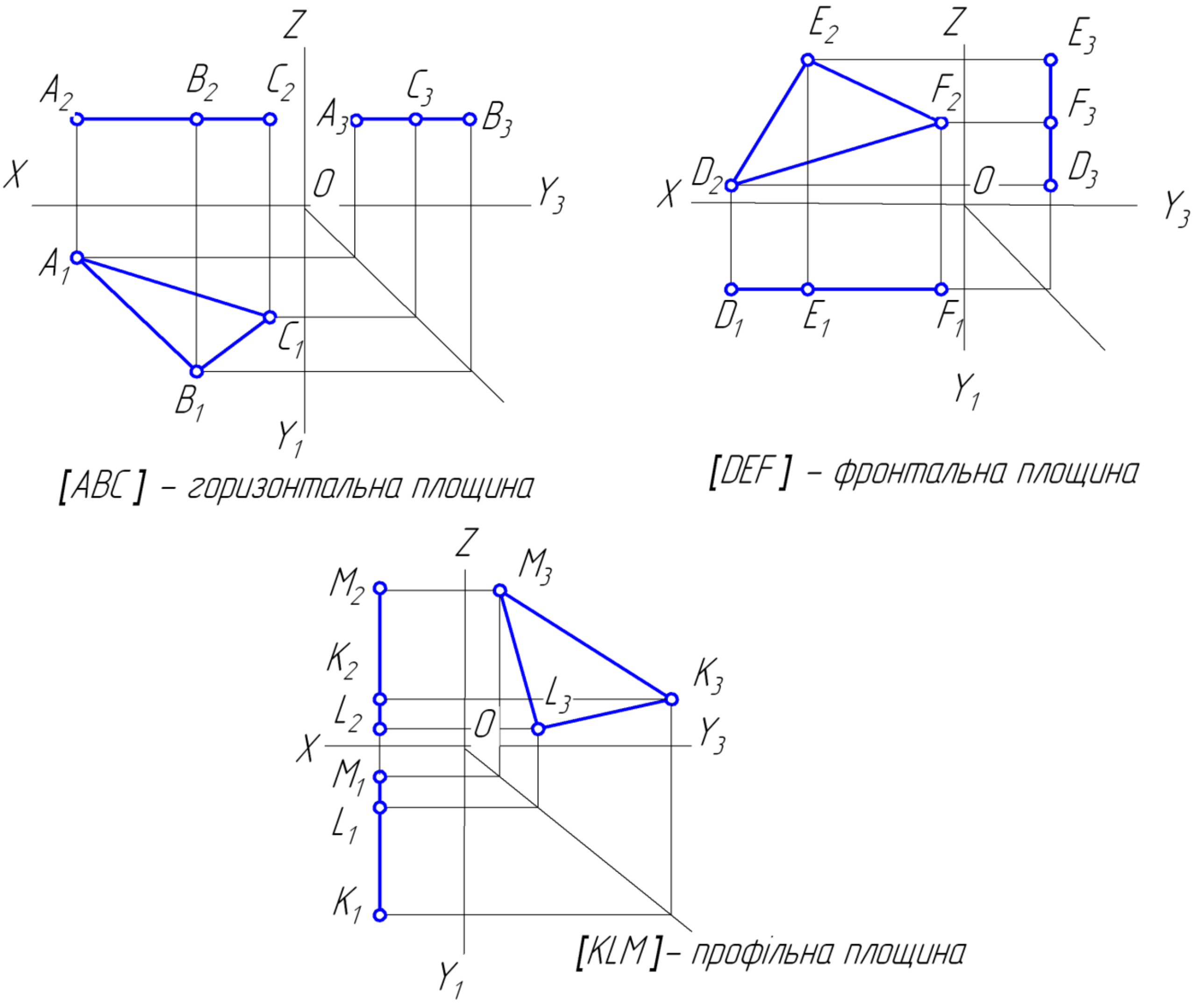


Рис. 28. Площини рівня

Означення

*Площина, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій, називається площиною **загального положення*** (рис. 27).

*Площина, яка паралельна до однієї з площин проекцій називається **площиною рівня*** (рис. 28).

*Площина, яка перпендикулярна до однієї з площин проекцій називається **проекціювальною площиною*** (рис. 29).

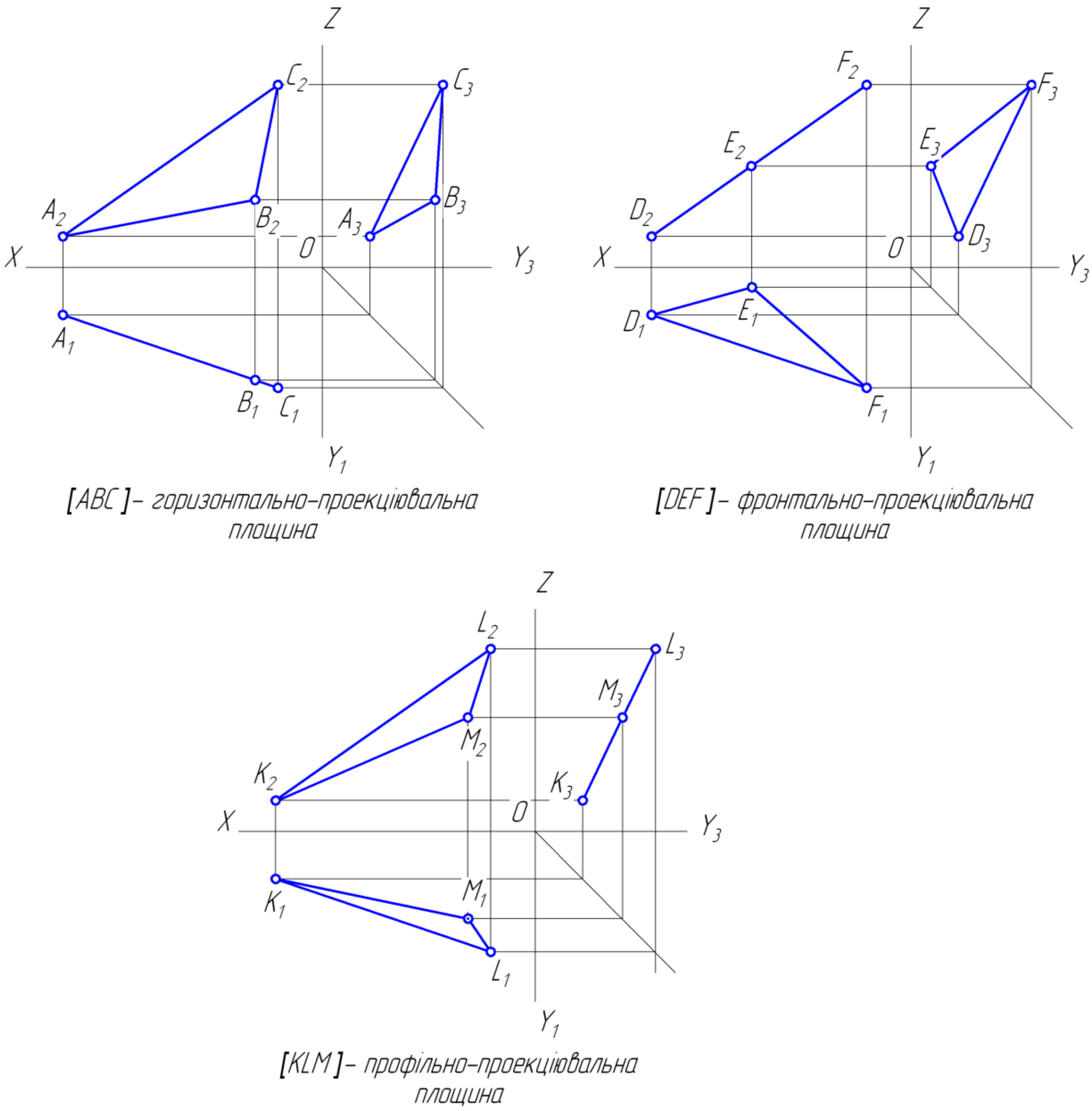


Рис. 29. Проекціювальні площини

2.3. ПРЯМІ ЛІНІЇ І ТОЧКИ НА ПЛОЩИНІ

Для побудови зображення прямої лінії, яка лежить в даній площині, використовують відомі з елементарної геометрії **твердження**:

- пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що лежать на цій площині;
- пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, що лежить у цій площині, і паралельна прямій, що також лежить в цій площині;
- прямі у площині можуть займати різні положення відносно площин проекцій.

У площині, крім прямих довільного (загального) положення можна намітити і лінії, що займають особливе положення відносно площин проекцій – ***головні лінії площини***. До таких ліній відносяться (рис. 30):

1) прямі лінії, які паралельні до площин проекцій – ***горизонталь*** (h), ***фронталь*** (f) і ***профільна пряма***;

2) ***лінії найбільшого нахилу площини*** до площин проекцій (BL, BM).

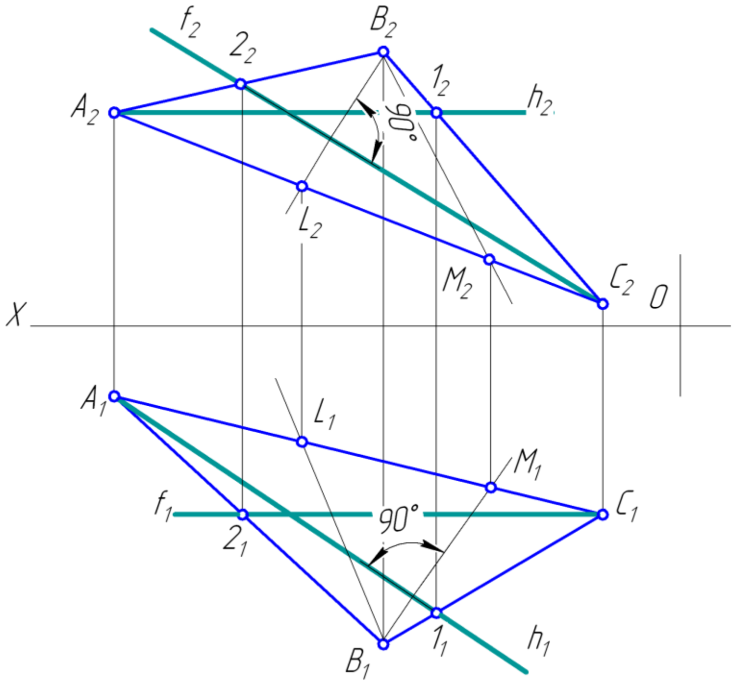


Рис. 30. Головні лінії площини

Означення

- *Пряма h, яка лежить у даній площині [ΔABC] і паралельна горизонтальній площині проекцій $П_1$, називається* ***горизонталлю площини*** *[ΔABC].*
- *Пряма f, яка лежить у даній площині [ΔABC] і паралельна фронтальній площині проекцій $П_2$, називається* ***фронталлю площини*** *[ΔABC].*
- *Пряма, яка лежить у даній площині [ΔABC] і паралельна профільній площині проекцій $П_3$, називається* ***профільною прямою.***
- ***Лінією найбільшого нахилу площини до площин проекцій*** *$П_1$ або $П_2$ називають прямі (BL, BM), що лежать в даній площині і перпендикулярні відповідно до горизонталі або фронталі цієї площини.*
- ***Лінією найбільшого скату площини*** *називається пряма (BM), яка лежить в цій площині й перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі даної площини.*

На основі властивості паралельного проекціювання про взаємну перпендикулярність прямих ліній встановлено, що прямий кут, утворений горизонталлю і лінією найбільшого нахилу, проекціюється на цю площину без спотворення.

В окремому випадку прямі, що визначають площину, можуть лежати на самих площинах проекцій. Тоді ці прямі називаються ***слідами площини***, тому що по цих прямих площина (яка визначається) перетинається з площинами проекцій.

Побудова точки, яка належить даній площині, передбачає побудову в цій площині прямої, що проходить через дану точку.

Твердження

- Точка, взята на будь-якій з прямих, що визначають площину, належить даній площині.
- Пряма належить площині, якщо вона має з площиною дві спільні точки.
- Довільна точка належить площині, якщо вона належить прямій, яка лежить у цій площині.
- Будь-яка точка, що лежить на горизонтальному чи фронтальному слідові площини, належить цій площині.
- Пряма лежить у площині, якщо її сліди лежать на однойменних слідах площини.
- Пряма належить площині, якщо одна її проекція паралельна одному з слідів цієї площини, а друга проекція має з іншим слідом площини спільну точку (наприклад, горизонталь і фронталь площини).
- Горизонталь площини і горизонтальний слід площини між собою паралельні. *Звідси* – проекції горизонталі паралельні однойменним проекціям горизонтального сліду площини.
- Фронталь площини і фронтальний слід площини між собою паралельні. *Звідси* – проекції фронталі паралельні однойменним проекціям фронтального сліду площини.
- Лінія найбільшого скату площини і горизонтальний слід площини між собою перпендикулярні. *Звідси* – горизонтальна проекція лінії найбільшого скату площини перпендикулярна горизонтальному сліду площини (точніше, горизонтальній проекції горизонтального сліду площини).

ЛЕКЦІЯ № 3

ПОЗИЦІЙНІ І МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ПРОЕКЦІЙ ПАР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Характер взаємного положення двох геометричних елементів можна визначити за проекціями. Його ознаки визначаються позиційними властивостями проекцій пар геометричних елементів. Такі властивості є основою розв'язування позиційних задач нарисної геометрії, які передбачають геометричні побудови, пов'язані із взаємним положенням геометричних елементів. Прикладами позиційних задач можуть бути: побудова точки перетину прямої з площиною, побудова лінії перетину двох площин, або двох поверхонь, тощо.

Означення

Позиційними *називаються задачі, у ході розв'язування яких можна одержати відповідь про належність елемента (точки) чи підмножини (прямої) безмежності (поверхні).*

До позиційних задач відносяться задачі на визначення спільних елементів, що належать різним геометричним об'єктам. *Першу групу задач* можна об'єднати як задачі на належність. До них відносяться задачі:

а) належність точки прямій ($A \in L$);
б) належність точки поверхні ($A \in \Omega$);
в) належність прямої поверхні ($L \in \Omega$).

До *другої групи* відносяться задачі:

а) перетин двох прямих ($M \cap N$);
б) перетин поверхні з поверхнею ($\Sigma \cap \Omega$);
в) перетин прямої з поверхнею ($L \cap \Omega$).

Під метричними розуміють задачі на визначення відстаней, кутів і площі в практиці інженерної діяльності. Метричні задачі «у чистому вигляді» трапляються рідко, значно частіше розв'язування метричних задач переплітається з розв'язуванням позиційних задач.

Означення

Метричними *називаються задачі, розв'язок яких пов'язаний із знаходженням характеристик геометричних елементів, які визначаються вимірюванням лінійних або кутових величин, встановлення справжньої форми фігур.*

Різновидів метричних задач багато, проте кожна з них складається з двох основних:

1. Визначення відстані між двома елементами.
2. Знаходження величини кута між двома прямими, що перетинаються.

Інколи доводиться розв'язувати протилежну задачу: побудувати відрізок прямої або кут між двома прямими за заданими лінійними і кутовими величинами. Для розв'язання таких задач, крім повноти зображення, потрібно щоб це зображення було метрично визначеним.

Важливу роль при розв'язуванні метричних задач відіграє також побудова перпендикуляра до площини. На основі цих задач можна розв'язати будь-яку метричну задачу.

Перетин площин, що задані слідами

Дві площини перетинаються по прямій лінії. Пряма лінія у просторі визначена, якщо відома одна точка цієї прямої і її направлення або дві точки цієї прямої.

Звідси витікає, що для того, щоб визначити пряму перетину двох площин необхідно знайти дві спільні точки площин, які визначають шукану пряму їх перетину, або одну таку точку і направлення лінії перетину.

В окремому випадку точками можуть бути сліди цієї прямої.

Твердження

- Оскільки дві площини перетинаються по прямій лінії, то для її побудови досить визначити:
  - ✓ дві точки, які одночасно належать обом площинам;
  - ✓ одну спільну точку і напрям лінії перетину.
- Якщо площини задані своїми слідами, лінія перетину визначається точками перетину однойменних слідів площин.
- Якщо хоча б одна пара однойменних слідів перетинається, то площини перетинаються.

- Залежно від розташування площин у просторі, що перетинаються лінія їх перетину може мати в системі $П_1$, $П_2$ два сліди (горизонтальний і фронтальний), один (горизонтальний чи фронтальний) або не мати жодного. Якщо пряма перетину має два сліди, то це – пряма довільного положення чи профільна пряма, чи пряма, яка перетинає вісь проекцій. Якщо пряма перетину має один горизонтальний слід, то ця пряма паралельна фронтальній площині проекцій (фронталь). Якщо пряма перетину має один фронтальний слід, то вона паралельна горизонтальній площині проекцій (горизонталь). Якщо пряма перетину має один слід, то ця пряма паралельна осі проекцій.

На рисунку 31 наведено приклад побудови лінії перетину площин заданих слідами. Лінія перетину двох площин, заданих слідами, будується по будь-яким точкам перетину в межах кресленика.

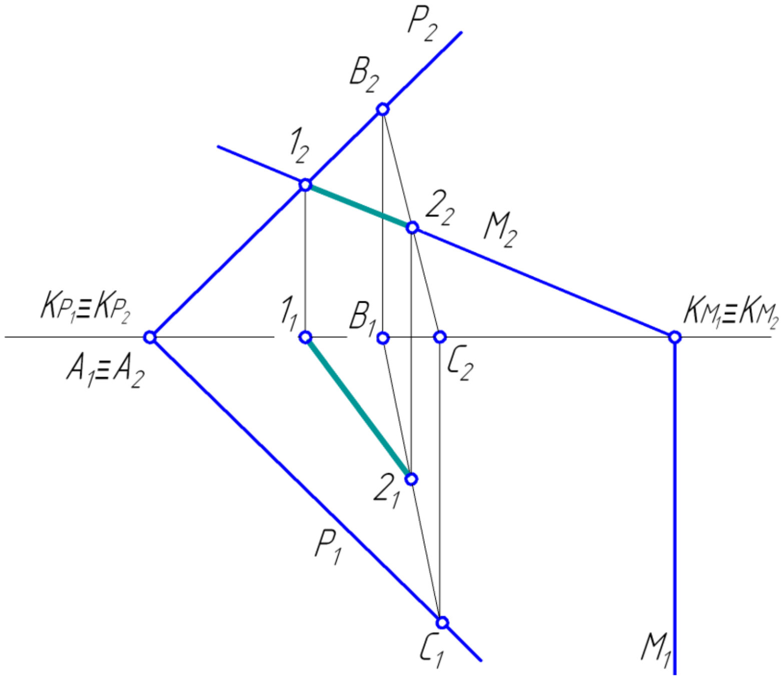


Рис. 31. Перетин площин, заданих слідами

На прикладі пряма $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ площини загального положення (фронтальний слід – P_2) перетинається в точці 1_11_2 з проекціювальною площиною. Пряма $AC(A_1C_1, A_2C_2)$ площини загального положення (горизонтальний слід – P_1) не перетинається в межах кресленика з проекціювальною площиною. У цьому випадку в площині $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ намічаємо додаткову пряму, наприклад $BC(B_1C_1, B_2C_2)$. Вона перетинає проекціювальну площину в точці 2 (2_12_2). Пряма 12 (1_12_1, 1_22_2) і буде шуканою прямою перетину заданих площин.

Правило

1) для побудови лінії перетину площин використовують площину-посередник, у тому випадку, якщо одна пара однойменних слідів не перетинається в межах кресленика;
2) якщо ж обидві пари однойменних слідів не перетинаються в межах кресленика, то використовують дві площини-посередники;
3) за допомогою таких площин (площин-посередників) визначається напрям лінії перетину.

Перетин прямої з площиною загального положення

Схема розв’язання задачі на побудову перетину прямої лінії з площиною є важливою серед інших позиційних задач курсу нарисної геометрії. Ця схема використовується і для розв’язування задач на побудову точок перетину прямих з поверхнею, на перетин поверхні площиною, побудову лінії перетину лінійчатими поверхнями і т. ін. Для розв’язування багатьох задач у нарисній геометрії дуже часто використовуються проекціювальні площини як допоміжні (рис. 32).

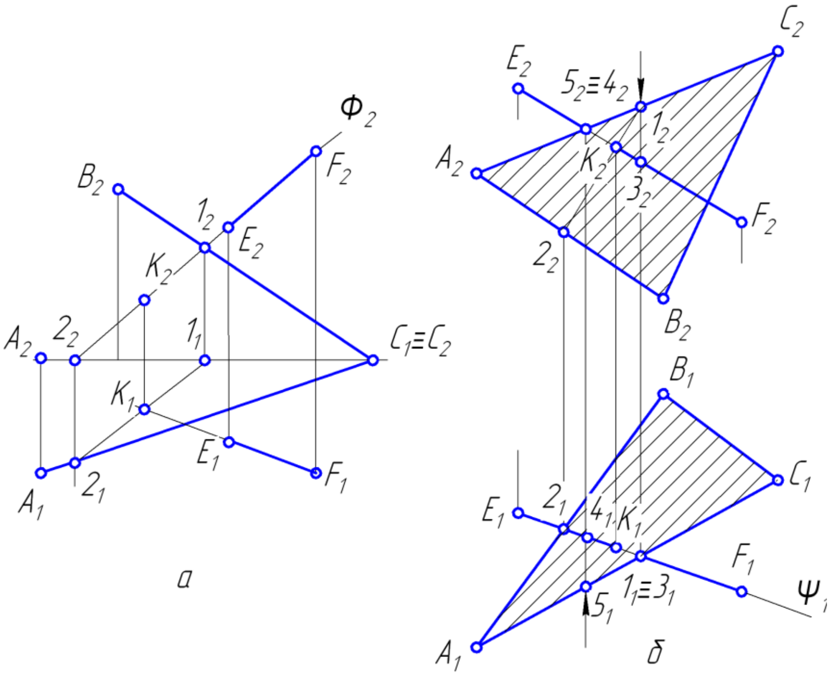


Рис. 32. Побудова точки перетину прямої з площиною

На рис. 32, а показано розв’язок задачі, де площина загального положення задана слідами; на рис. 32, б – площина задана трикутником АВС. Для визначення точки перетину $K(K_1, K_2)$ використано допоміжні проекціювальні площини: в першому випадку – фронтально-проекціювальну Φ_2; у другому – горизонтально-проекціювальну Ψ_1.

Видимість прямої стосовно площин проекцій визначається за допомогою ***конкуруючих точок*** (на прикладі точки – 4, 5, рис. 32, б).

Означення

Конкуруючими *називаються точки, які лежать на одному проекціювальному промені.*

Якщо дивитись за направленням проекціювального промінню, то можна побачити ту конкуруючу точку, яка найбільше віддалена від площини проекцій (або теж саме, найближче розташована до нас).

Правило

Для побудови точки перетину прямої з площиною загального положення необхідно:

- через задану пряму провести будь-яку допоміжну площину;
- побудувати пряму перетину заданої площини із допоміжною;
- визначити положення точки перетину прямих заданої і побудованої.

При побудові точки перетину прямої з площиною особливого положення побудова спрощується, оскільки одна з проекцій точки перетину вже є на прямій, у вигляді якої площина проекціюється на ту чи іншу площину проекцій.

УВАГА!

Якщо один з елементів перетину – або площина, чи пряма – проекціювальні, то використовувати дане правило не рекомендується, так як у більшості таких випадках визначення точки перетину значно спрощується (рис. 33).

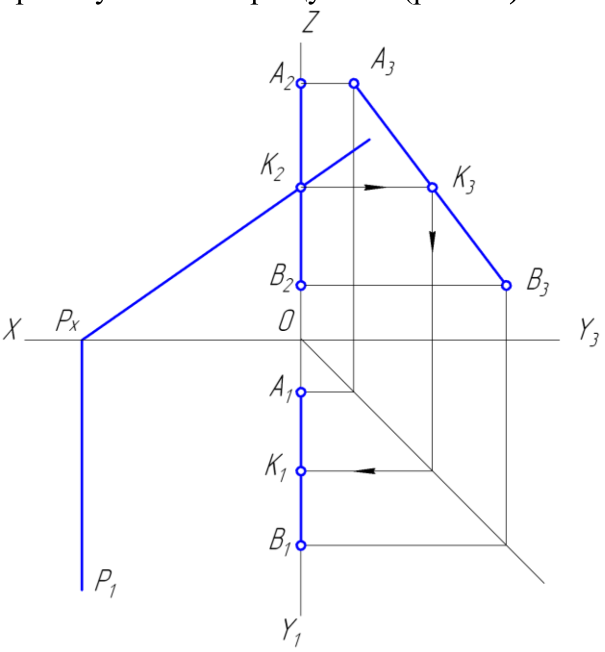


Рис. 33. Перетин прямої з проекціювальною площиною

Перетин двох площин довільного положення

Дві площини перетинаються по прямій лінії (рис. 34).

Задачу на перетин двох площин довільного положення можна розв’язати двома способами:

1) побудувати точки перетину двох прямих однієї площини з іншою площиною, інакше двічі використати алгоритм пошуку точки перетину прямої з площиною;
2) використавши дві допоміжні розтинальні площини особливого положення.

Отже, для побудови лінії перетину площин необхідно визначити дві спільні, для них точки.

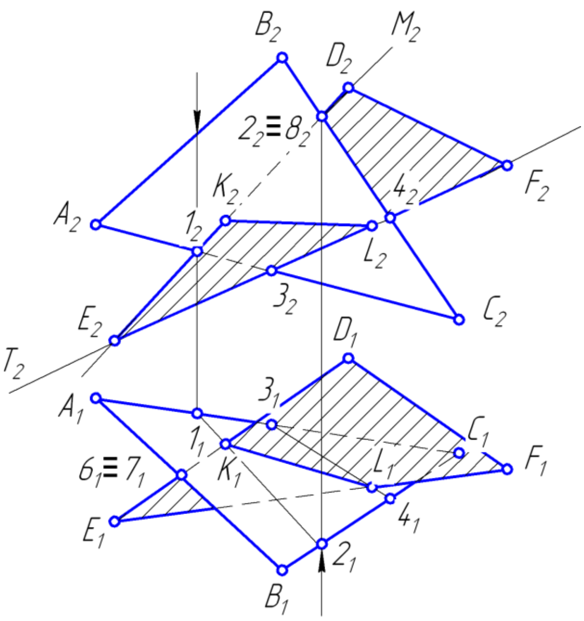


Рис. 34. Побудова лінії перетину площин довільного положення

Паралельність прямої і площини
Паралельність площин

Твердження

- Пряма і площина паралельні, якщо в площині можна провести пряму, яка паралельна заданій прямій. Через кожну точку простору можна провести безмежність прямих, які паралельні заданій прямій (рис. 35, а).
- Дві площини, що задані слідами, паралельні, якщо їх однойменні сліди між собою паралельні. Протилежна теорема не завжди справедлива в системі площин проекцій $П_1$, $П_2$. Наприклад, дві профільно-проекціювальні площини паралельні тільки тоді, коли їх профільні сліди між собою паралельні.
- Якщо дві прямі, що перетинаються однієї площини відповідно паралельні двом прямим іншої площини, то ці площини паралельні (рис. 35, б).
- Головні лінії (горизонталь і фронталь) двох паралельних площин між собою паралельні. Ця особливість використовується для визначення паралельності двох площин, коли одна з площин чи обидві задані не слідами.

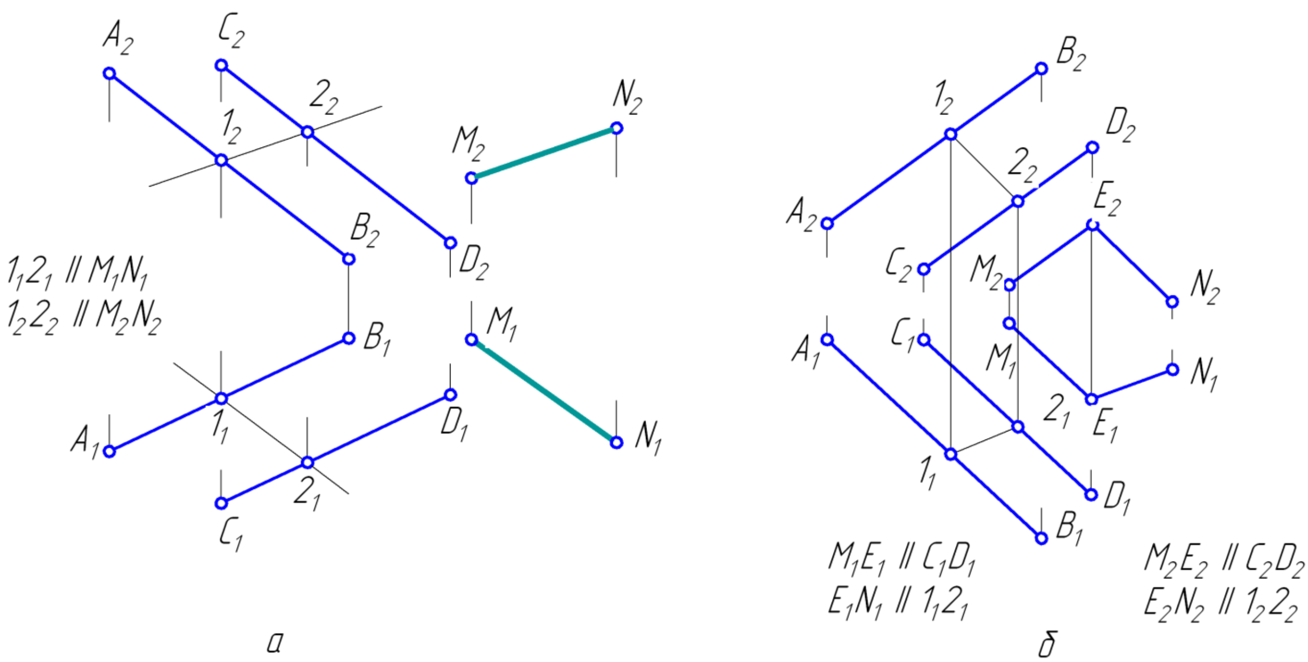


Рис. 35. Паралельність прямої і площини, площин

На рис. 35, б площина задана паралельними прямими АВ і CD. Паралельність площин також можна встановити і за допомогою довільних прямих.

Перпендикулярність прямої і площини.
Перпендикулярність площин

На рис. 36 показано, що пряма EF перпендикулярна до площини Q, так як вона одночасно перпендикулярна до двох прямих AB і AC цієї площини.

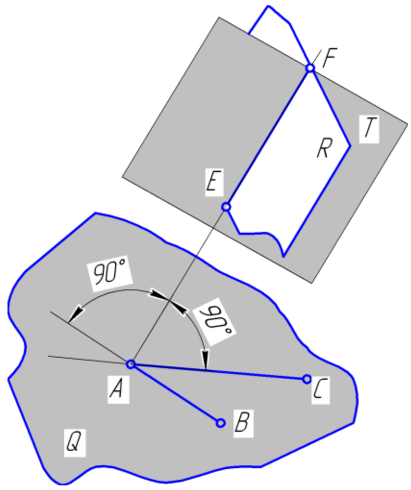


Рис. 36. Умова перпендикулярності прямої до площини

Твердження

- Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-яких двох прямих, що перетинаються цієї площини.
- Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, що перетинаються, то вона перпендикулярна до будь-якої множини прямих цієї площини.
- Через кожну точку простору можна провести тільки одну пряму, яка перпендикулярна до даної площини. Таку пряму, як відомо, можна визначити направленням площини.

Теорема

Пряма лінія перпендикулярна до площини, якщо її проекції перпендикулярні до однойменних проекцій направлення горизонталі і фронталі площини.

Таким чином, якщо є направлення горизонталі і фронталі площини, то можна визначити проекції прямої лінії, яка перпендикулярна до заданої площини (рис. 37).

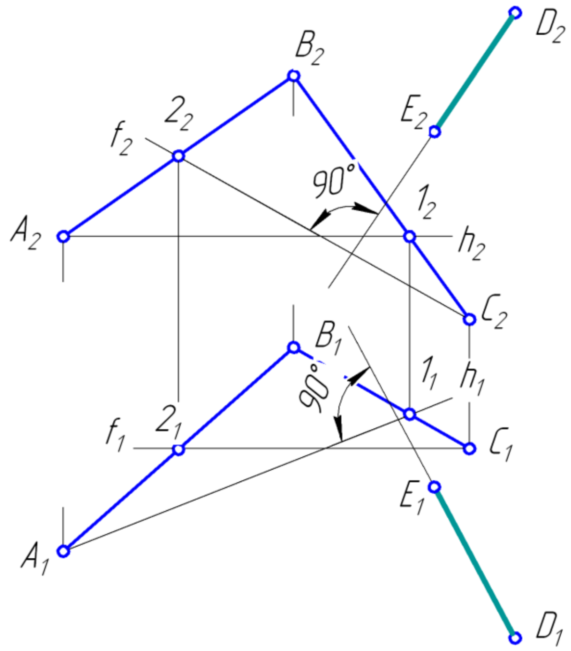


Рис. 37. Перпендикулярність прямої до площини

Горизонтальна проекція перпендикуляру утворює прямий кут з горизонтальною проекцією горизонталі площини. Фронтальна проекція перпендикуляру утворює прямий кут з фронтальною проекцією фронталі площини. На основі цієї теореми можна визначити і побудувати направлення заданих площин і площини зі заданим їхнім направленням. Пряма лінія ED (E_1D_1, E_2D_2) перпендикулярна до площини [ΔABC] і є направленням цієї площини (рис. 37).

УВАГА!

Якщо площини проекціювальні, то направлення цих площин будуть визначати прямі, які паралельні до площин проекцій.

Таким чином, горизонтальна пряма є направленням горизонтально-проекціювальної площини, фронтальна пряма – фронтально-проекціювальної площини.

Твердження

- Якщо пряма перпендикулярна до площини, заданої слідами, то проекції цієї прямої перпендикулярні відповідним слідам площини. Одночасно горизонтальна проекція прямої перпендикулярна також до горизонтальної проекції горизонталі, а вертикальна проекція прямої перпендикулярна до вертикальної проекції фронталі.
- Дві прямі взаємоперпендикулярні, якщо одна з них лежить у площині яка перпендикулярна до другої прямої.
- Дві площини взаємоперпендикулярні, якщо одна з площин утримує пряму, перпендикулярну до іншої площини.
- Щоб одна з площин була перпендикулярна до іншої, достатньо, щоб одна з них проходила через перпендикуляр до іншої (рис. 38).

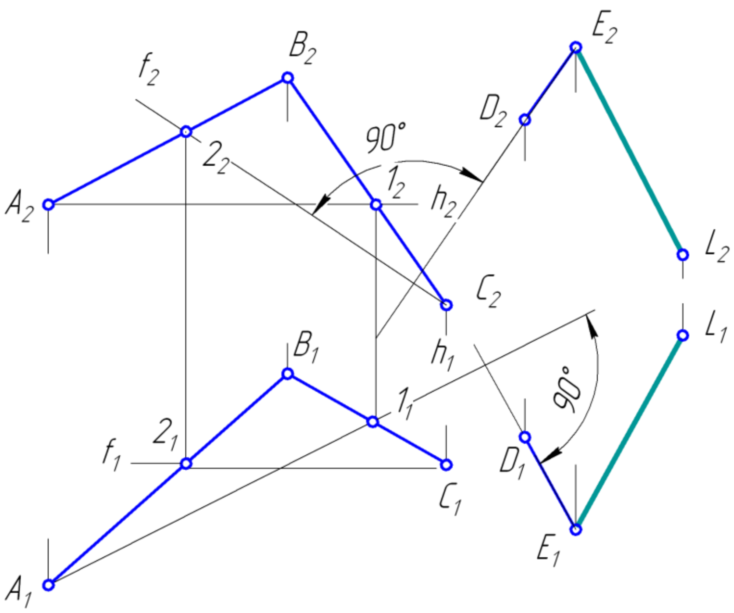


Рис. 38. Перпендикулярність площин

- Якщо горизонтальні сліди двох горизонтально-проекціювальних площин взаємоперпендикулярні, то й площини взаємоперпендикулярні.
- Перпендикулярність горизонтальних слідів площини довільного положення і горизонтально-проекціювальної площини відповідає взаємній перпендикулярності цих

площин. Перпендикулярність фронтальних слідів площини довільного положення і фронтально-проекціювальної площини відповідає взаємній перпендикулярності цих площин.

- Якщо однойменні сліди двох площин, довільного положення, взаємоперпендикулярні, то ці площини не перпендикулярні між собою.

Кут між прямою і площиною і між двома площинами

Твердження

- Кутом між прямою і площиною є кут між прямою та її проекцією на даній площині.

Кут між двома прямими, що перетинаються можна визначити:

1) замкненням кута в трикутник – треба перетнути сторони кута довільною прямою і визначити дійсну величину трикутника, звідси визначаємо величину заданого кута;
2) обертанням (чи переміщенням) – треба поставити площину кута в положення, паралельне будь-якій площині проекцій;
3) суміщенням – треба визначити один із слідів площини кута (горизонтальний чи вертикальний) і обертанням навколо сліду сумістити кут з відповідною площиною проекцій;
4) обертанням навколо горизонталі чи фронталі – необхідно сумістити заданий кут з площиною, яка паралельна до горизонтальної (чи фронтальної) площини проекцій та, яка проходить через довільну горизонталь (чи фронталь) площини кута;
5) заміною площин проекцій – треба замінити площини проекцій так, щоб одна з них стала паралельною площині заданого кута.

Примітка:

1. З усіх перерахованих способів розв’язування задачі найбільш простий і швидше приводить до мети четвертий.
2. Для прямих, які не лежать в одній площині, мірою кута між ними є кут між двома прямими, що перетинаються та, які паралельні даним.

Означення

Кутом між прямою і площиною *є гострий кут, який утворюється між цією прямою і її проекцією на дану площину.*

Прямий шлях із визначення цього кута вимагає ряд додаткових побудов і тому досить довгий. Його можна значно скоротити, визначаючи не шуканий кут α, а його доповнення до 90°, інакше гострий кут φ, який утворюється між заданою прямою і перпендикуляром, опущеним із її довільної точки на площину.

У випадку, коли знайдений кут φ тупий, то необхідно для визначення шуканого кута α від знайденого кута φ відрахувати кут, який дорівнює – 90° (рис. 39).

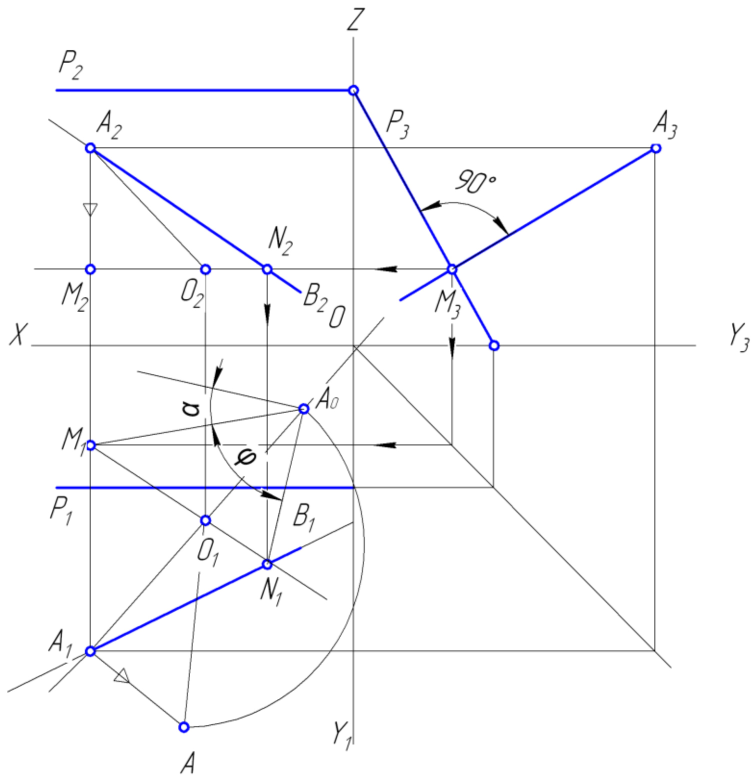


Рис. 39. Визначення кута між прямою і площиною

Визначення відстаней

Відстань між двома точками, вимірюється довжиною відрізка, який з'єднує ці точки і її можна визначити наступним шляхом:

1) побудовою прямокутного трикутника;
2) обертанням або переміщенням – необхідно перевести відрізок у положення, паралельне одній з площин проекцій;
3) суміщенням – необхідно заключити відрізок у будь-яку площину (найкраще – у горизонтально- або фронтально-проекціювальну) і сумістити цю площину з будь-якою іншою;
4) заміною площин проекцій – необхідно замінити одну з площин проекцій на нову, яка повинна бути паралельною до даного відрізка.

ЛЕКЦІЯ № 4

СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙНОГО КРЕСЛЕНИКА

Нарисна геометрія має досить значну кількість способів перетворення ортогональних проекцій, забезпечуючи більш зручний розв'язок задач. Найбільш поширеними є способи, основу яких становить змінення взаємного розташування площин проекцій і геометричних елементів, що проекціюються за рахунок переведення їх в окреме положення (особливе). Таке *перетворення може бути здійснене двома шляхами*:

1. Переходом від заданої системи площин проекцій до нової, відносно якої геометричні елементи, не змінюють свого положення у просторі. У новій системі площин проекцій вони займуть окреме положення (особливе).
2. Переміщенням у просторі заданої геометричної фігури в окреме положення (особливе), перетворені площини проекцій залишаються без змін.

Перший шлях лежить в основі способу заміни площин проекцій, другий становить теоретичну базу способу паралельного переміщення.

Додаткові проекції дозволяють отримати або вироджені проекції окремих елементів, або їх натуральні величини.

Означення

Побудова нових, додаткових проекцій називається ***перетворенням кресленика***.

Спосіб заміни площин проекцій

При розв'язанні геометричних задач заданий кресленик не завжди може бути зручним. Інколи необхідно будувати додаткові кресленики, які можуть бути результатом поставленої задачі або її спрощенням. Такі кресленики об'єкта можуть бути побудовані *способом заміни площин проекцій*. При цьому об'єкт у просторі залишається без змін.

Отримати нові, більш зручні проекції, можна шляхом переходу від заданих площин проекцій до нових. Положення нових площин проекцій треба вибирати так, щоб відносно них геометричний елемент чи фігура, яка проекціюється, зайняла окреме положення (особливе).

На рис. 40, а наведено приклад проекціювання точки А на додаткову площину проекцій $П_4$. Додаткову систему площин проекцій утворюють дві взаємоперпендикулярні площини проекцій $П_1$ і $П_4$. Перехід від однієї системи площин проекцій до іншої на ортогональному кресленику показано на рис. 40, б.

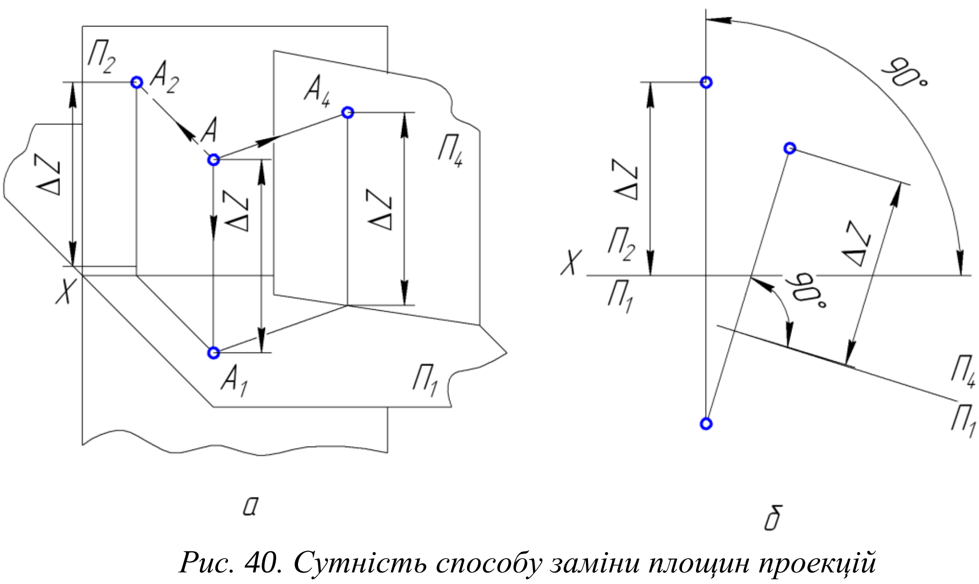


Рис. 40. Сутність способу заміни площин проекцій

Заміною однієї площини проекцій можна:

- пряму довільного положення перетворити на лінію рівня, якщо нову площину проекцій вибрати паралельно заданій прямій. Тоді на епюрі вісь нової системи буде паралельна відповідній проекції прямої;
- лінію рівня перетворити на проекціювальну пряму, якщо нову площину проекцій вибрати перпендикулярно до неї. На епюрі вісь нової системи площин проекцій буде проходити під прямим кутом до тієї проекції лінії рівня, яка є її справжньою величиною;
- площину загального положення можна перетворити на проекціювальну, якщо нову площину проекцій вибрати перпендикулярно до лінії рівня заданої площини;
- проекціювальну площину можна перетворити на площину рівня, якщо нову площину проекцій вибрати паралельно проекціювальній площині. На епюрі вісь нової системи паралельна сліду проекцій заданої площини.

Послідовною заміною двох площин проекцій можна:

- пряму довільного положення перетворити на проекціювальну. Першою заміною вона перетворюється на лінію рівня, а другою – на проекціювальну;
- площину довільного положення перетворити на площину рівня. Першою заміною вона перетворюється на проекціювальну, а наступною – на площину рівня.

Правило

Щоб площину загального положення перетворити в проекціювальне положення необхідно за направлення площин проекцій прийняти направлення горизонталі чи фронталі даної площини (рис. 41).

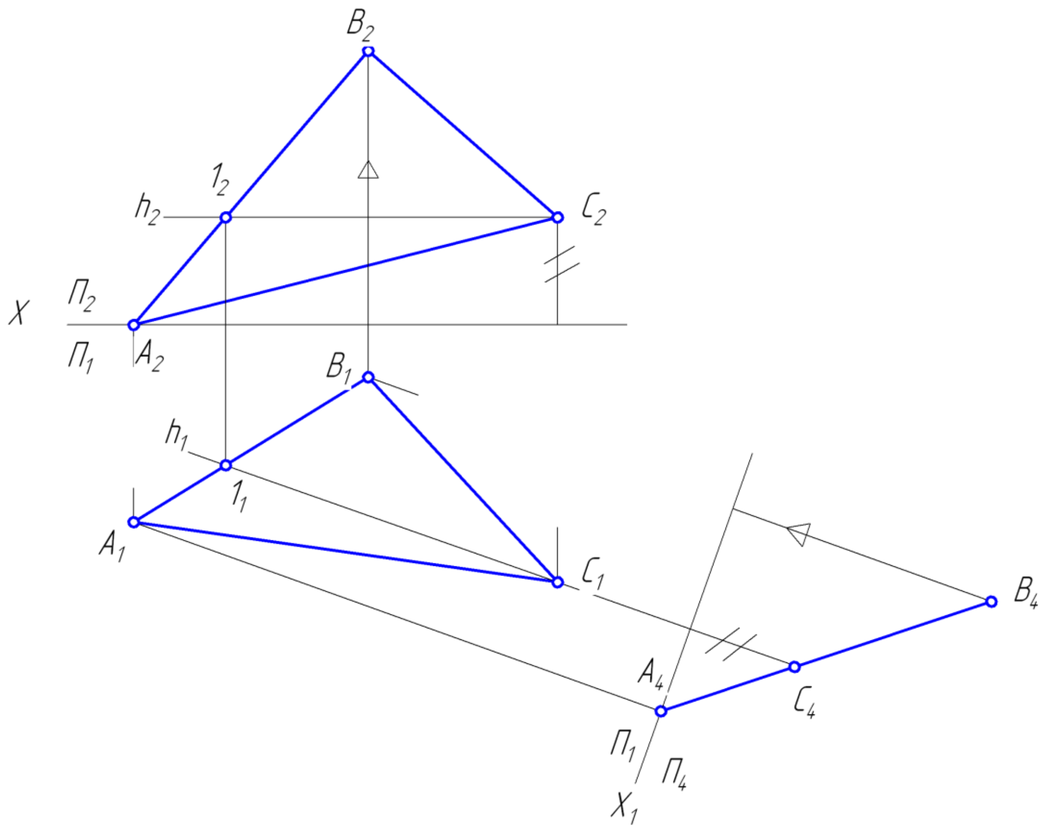


Рис. 41. Перетворення площини загального положення в проекціювальне положення

Перетворення проекційного креслення способом паралельного переміщення

У способі паралельного переміщення, на відміну від способу заміни площин проекцій, переміщується геометричний об’єкт, площини проекцій при цьому залишаються без змін. Переведення об’єкта із загального положення в окреме здійснюється шляхом його руху.

Сутність закону переміщення у тому, що всі точки об’єкта рухаються по траєкторіях, розташованих в паралельних площинах (звідси і назва способу).

В окремих випадках траєкторіями переміщення можуть бути кола, центри яких належать одній прямій – осі обертання. Цей окремий випадок називається *способом обертання*.

Спосіб обертання навколо проекціювальних прямих ліній дає можливості будувати множину креслеників в одній системі площин проекцій. При цьому площини проекцій залишаються без змін. Шляхом обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проекцій, предмет переміщується у нове положення. У цьому новому положенні будують його ортогональні проекції, інакше будується кресленик об’єкта.

Суть *способу обертання* полягає в тому, що геометричним фігурам, які проекціюються, обертанням навколо відповідних осей обертання надають відповідне положення відносно даної системи площин проекцій, яка не змінюється (рис. 42).

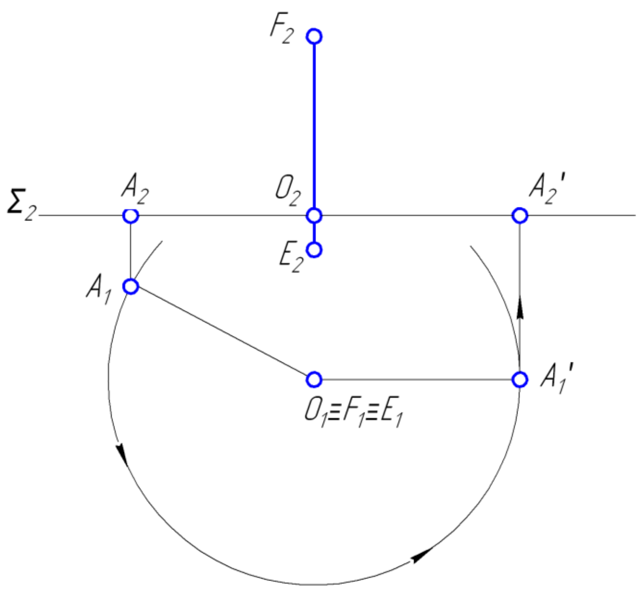


Рис. 42. Обертання точки навколо проекціювальної осі

На рис. 42 вісь обертання EF(E_1F_1, E_2F_2) перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій Π_1. Шляхом точки буде коло – площина Σ_2 називається *площиною переміщення точки*. Площина руху точки A_1A_2 горизонтального положення і вона перпендикулярна до осі обертання.

Центром обертання точки A_1A_2 є точка O_1O_2, перетину площини Σ_2 руху осі обертання. Радіус обертання точки A_1A_2 визначається відрізком A_1A_1', A_2A_2', який дорівнює відстані від цієї точки до осі обертання.

Отже, залежно від розташування осі обертання відносно площини проекцій поділяють:

а) обертання навколо осі, яка перпендикулярна до площини проекцій (рис. 42, 43);

б) обертання навколо осі, яка паралельна площині проекцій – обертання навколо сліду площини (рис. 44).

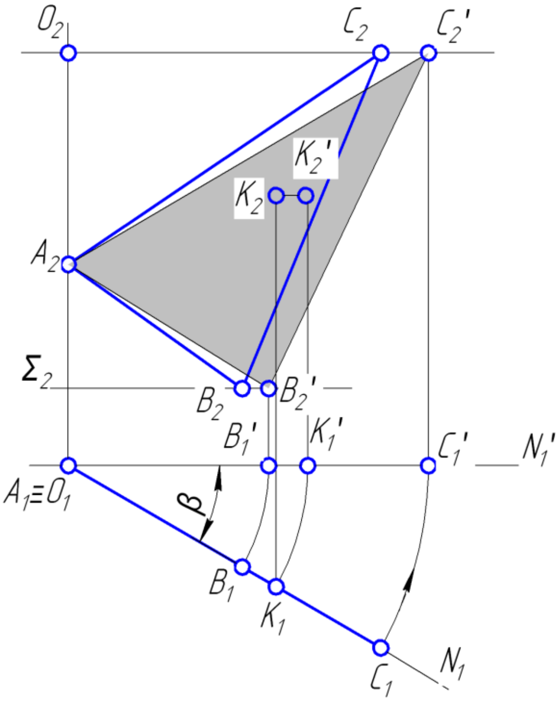


Рис. 43. Визначення дійсної величини трикутника методом обертання навколо проекціювальної осі

На рисунку 43 методом обертання визначено дійсну величину трикутника [ΔABC], який належить горизонтально-проекціювальній площині N_1. На прикладі вісь обертання горизонтально-проекціювальна, яка проходить через вершину A_1A_2 трикутника. Обертанням навколо осі на кут β доводимо горизонтальну проекцію площини [ΔABC] до положення, паралельного фронтальній площині проекцій Π_2.

Усі вершини трикутника переміщуються по дугам кола, якими визначаються горизонтальні площини руху цих точок. Слід N_1' може бути зміщеним слідом площини N_1 (в якій здійснюється обертання точок заданої площини [ΔABC]).

При *суміщенні* за вісь обертання приймається слід площини. Площину обертають до суміщення з площиною проекцій, якій належить слід, прийнятий за вісь обертання.

Правило

Оскільки вісь обертання належить площині проекцій, то для знаходження суміщеного положення площини достатньо визначити суміщене положення тільки однієї точки, яка належить площині та яка не лежить на осі обертання. За таку точку доцільно брати точку, що належить іншому сліду площини.

Твердження

- Для того щоб площину загального положення перевести у фронтально-проекціювальне, за вісь обертання необхідно прийняти пряму, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій.
- Для того, щоб площину загального положення перевести у горизонтально-проекціювальне, за вісь обертання необхідно прийняти пряму, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій.

Натуральну величину плоского геометричного об’єкта можна визначити обертанням навколо осі, яка паралельна площині проекцій. У цьому випадку геометричний об’єкт одним обертом навколо осі можна привести в положення, паралельне площині проекцій (рис. 44).

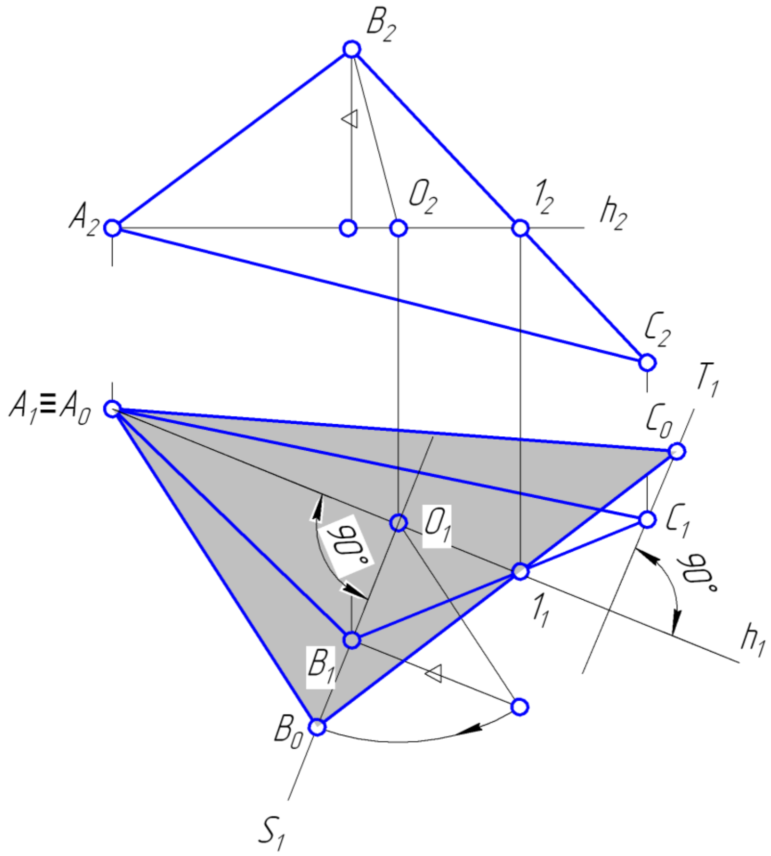


Рис. 44. Обертання навколо осі, яка паралельна площині проекцій

На рис. 44 показано визначення натуральної величини трикутника [ΔABC] обертанням навколо горизонтальної прямої цієї площини – *горизонталі*. При цьому всі точки об’єкта обертаються навколо осі по колу в площинах, перпендикулярних до осей.

Плоскопаралельне переміщення

Плоскопаралельне переміщення можна розглядати як обертання навколо невизначених проекціювальних прямих. Тут усі точки геометричного об’єкта переміщуються у взаємоперпендикулярних площинах (рис. 45).

Теорема

При плоскопаралельному переміщенні геометричного об’єкта одна з його проекцій, переміщуючись у площині проекцій залишається без змін сама собі; інші проекції точок геометричного об’єкта переміщуються по прямим, що паралельні направленню осі проекцій.

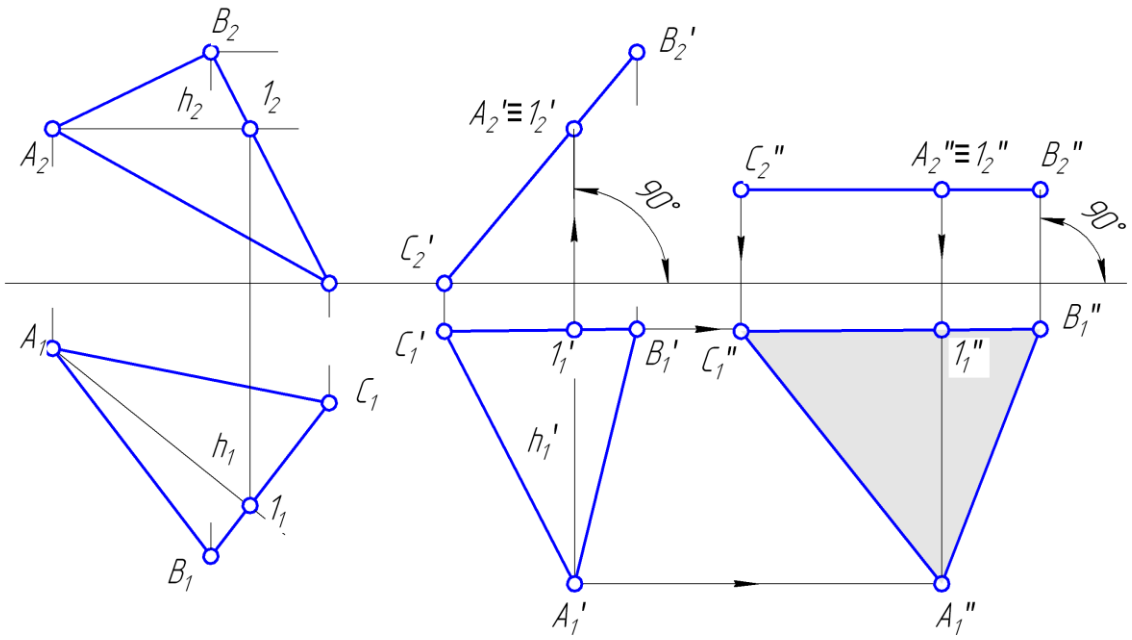


Рис. 45. Визначення дійсної величина відсіку площини методом плоскопаралельного переміщення

ЗОБРАЖЕННЯ БАГАТОГРАННИХ ТА КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

ЛЕКЦІЯ № 5

КРИВІ ЛІНІЇ. ПОВЕРХНІ

Криві лінії – це контури багатьох інженерних конструкцій і споруд, деталей машин і механізмів, шлях об'єктів, що рухаються.

Криву лінію можна представити як слід точки, що рухається.

Криві лінії також розглядають як межі поверхонь або як результат взаємного перетину поверхонь.

Способи утворення кривих ліній можуть бути різними. Одні криві лінії утворюються за визначеним законом (закономірні криві); утворення інших носить емпіричний (дослідницький) характер (незакономірні криві лінії).

Закономірні криві лінії можуть бути задані графічно і аналітично, інакше рівнянням. Незакономірні криві лінії задаються на кресленику тільки графічно.

Означення

Рівнянням кривої лінії *називають таке рівняння між перемінними, якому задовільняють координати будь-якої точки, що належить цій лінії.*

Порядком алгебраїчної кривої лінії *називають ступінь її рівняння.*

Криві лінії, всі точки яких належать площині, називаються ***плоскими.***

Крива, яка плавна в усіх її точках, називається ***плавною кривою лінією****.*

Дотична *– пряма, що з'єднує дві найближчі точки кривої.*

Закономірні криві лінії поділяються на *алгебраїчні*, ті що визначаються в декартових координатах алгебраїчними рівняннями і *трансцендентними* – визначаються неалгебраїчним рівнянням.

Проекції кривих у загальному випадку є кривими того ж або більшого порядку. Кожна з кривих ліній має більшу або меншу ступінь кривини. Ця кривина характеризується деякими числами і називається ***кривиною лінії***.

У процесі побудови кривої лінії треба знати властивості, що зберігаються при ортогональному проекціюванні:

1) дотичні до кривої проекціюються у дотичні до її проекцій;
2) невласним точкам кривої відповідають невласні точки її проекцій.

Твердження

- Дотична до кривої проекціюється в дотичну до проекції кривої.
- В окремому випадку, коли площина кривої паралельна площині проекцій, крива та її проекція конгруентні.

На рисунку 46 крива лінія AB – плоска, вона побудована в площині P. На кривій AB візьмемо точку C і проведемо через неї розтинальну CE і CF. У процесі наближення точки E до точки C розтинальна CE повертається навколо точки C. Коли точка E співпаде з точкою C, розтинальна CE досягне свого граничного положення. У цьому положенні розтинальна називається *напівдотичною* до кривої AB у точці C. При наближенні точки E до точки C розтинальна займає положення напівдотичної T. У точці C_1 крива має злом і називається *точкою злому* або *точкою виходу*.

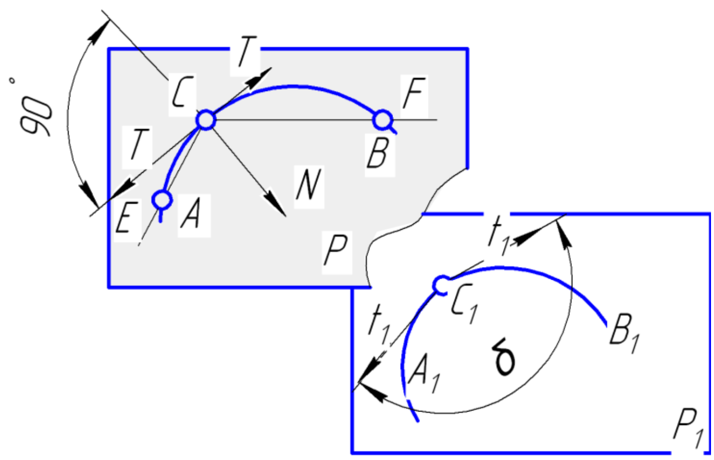


Рис. 46. Плоска крива лінія

При проекціюванні плоских кривих, додатково до попередніх тверджень можна ще віднести:

1) порядок проекції алгебраїчної кривої дорівнює порядку самої кривої;
2) кількість точок самоперетину проекцій кривої дорівнює кількості точок самоперетину самої кривої.

Криві лінії на кресленику задають проекціями їх точок. Довжина відрізка кривої (плоскої або просторової) визначається в загальному випадку приблизно, заміною кривої лінії вписаною ламаною лінією з максимально великою кількістю її сторін, які достатньо точно передають форму кривої (рис. 47). Для визначення її довжини намічають ряд точок A_1A_2, 1_12_2, 2_12_2, …, так, щоб дуги кривої були максимально наближеними до відрізків прямої.

Означення

Криві лінії, всі точки яких не належать одній площині, називаються ***просторовими*** *або* ***лініями подвійної кривизни****.*

Алгебраїчна крива лінія, яка описується в системі декартових координат рівнянням другого ступеня відносно поточних координат, називається *кривою лінією другого порядку.*

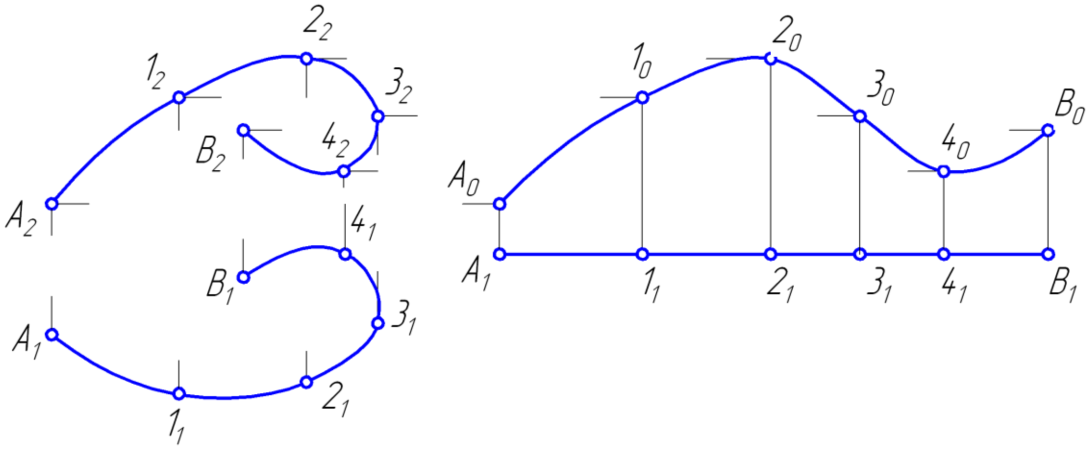


Рис. 47. Визначення довжини просторової кривої лінії

Вивчення кривих ліній другого порядку має значний інтерес у зв'язку з широким використанням їх у фізиці, астрономії, механіці, архітектурі тощо.

До кривих другого порядку належать:

1) ***Еліпс*** – геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала (рис. 48):

$$EF_1 + EF_2 = 2a$$

Рівняння еліпса:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

де

$$b^2 = a^2 - c^2;$$

AB – велика вісь еліпса;
CD – мала вісь еліпса.

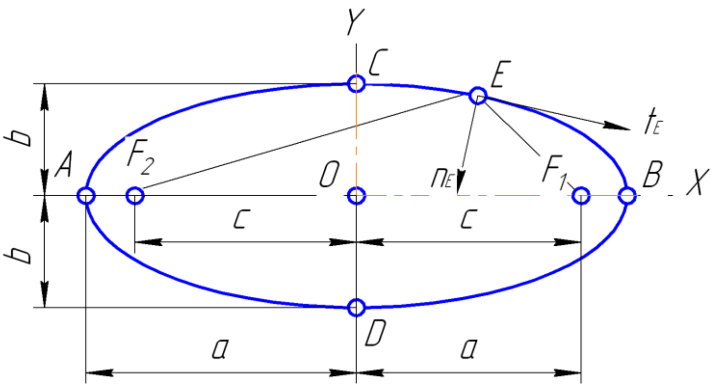


Рис. 48. Еліпс

Теорема

- Ортогональною проекцією кола, площина якого не перпендикулярна до площини проекцій, буде еліпс.

- Велика вісь еліпса паралельна діаметру кола до якого паралельна площина проекцій.
- Мала вісь еліпса паралельна до проекції направлення площини кола, яка є лінією найбільшого скату площини цього ж кола.

2) ***Гіпербола*** – геометричне місце точок, різниця відстаней від яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала (рис. 49). Будь-яка точка M площини належить гіперболі, якщо витримується умова:

$$MF_2 - MF_1 = 2a.$$

Рівняння гіперболи :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Рівняння гіперболи відрізняється від рівняння еліпса тільки знаком при другому члені лівої частини. Отже, багато з тверджень, що відносяться до еліпса, справедливі – для гіперболи. Вісі координат є *осями симетрії*. Точка перетину координатних осей – *центр симетрії*. *Вершинами гіперболи* є точки перетину її віссю симетрії.

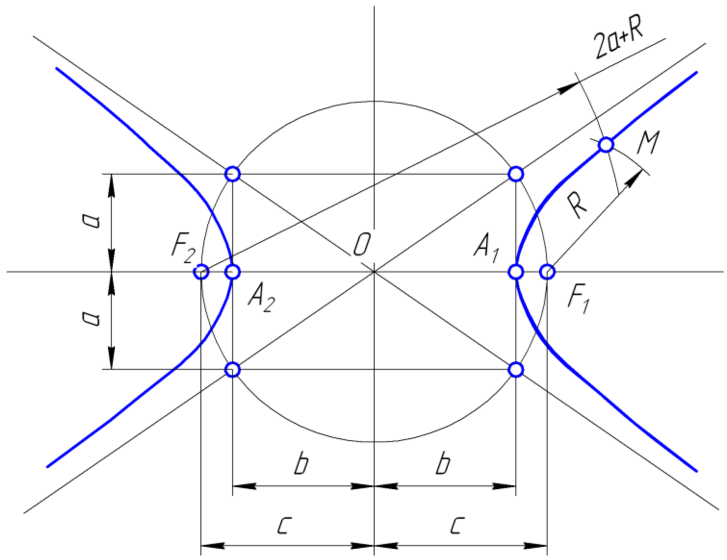


Рис. 49. Гіпербола

3) ***Парабола*** – геометричне місце точок, однаково віддалених від заданої точки F (фокуса) і прямої (рис. 50). Параболу можна побудувати, якщо задано фокус і пряму – директрису (AB).

Рівняння параболи:

$$y^2 = 2px,$$

де

$$p = FD;$$
$$MF = MG$$

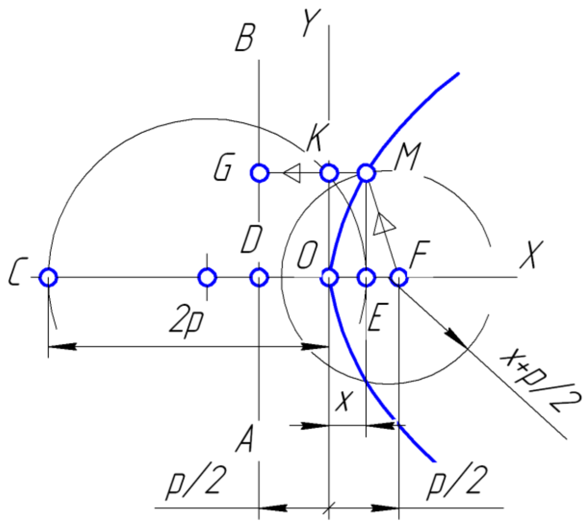


Рис. 50. Парабола

Означення

- Відстань FD від фокуса F до директриси AB називається *параметром параболи.*
- Пряма FD є віссю симетрії параболи, яка називається *віссю параболи*.
- Точка O – точка перетину параболи віссю – називається *вершиною*, яка ділить навпіл відстань між фокусом і директрисою.

Гвинтові лінії

З просторових кривих ліній в техніці широко використовуються циліндричні і конічні гвинтові лінії, особливо – циліндричні гвинтові лінії однакового нахилу – *геліси*. Вони використовуються в механізмах машин і приладів для перетворення обертального руху в поступальний. Нарізь на валах у вигляді геліса (ліва і права нарізь) використовуються у поворотних механізмах. Моделлю гвинтової лінії може бути пружина.

Циліндричну гвинтову лінію – гелісу ми розглядаємо як траєкторію руху точки, яка рівномірно обертається навколо осі і одночасно рівномірно переміщується в направленні цієї осі (рис. 51).

Означення

- Величина S переміщення точки в направленні осі, яка відповідає одному повному оберту навколо осі, називається *кроком гвинтової лінії.*
- φ – кут підйому гвинтової лінії.
- Траєкторія точки, що рухається по твірній і одночасно обертається навколо своєї осі прямого кругового конуса, називається *конічною гвинтовою лінією* (рис. 52).

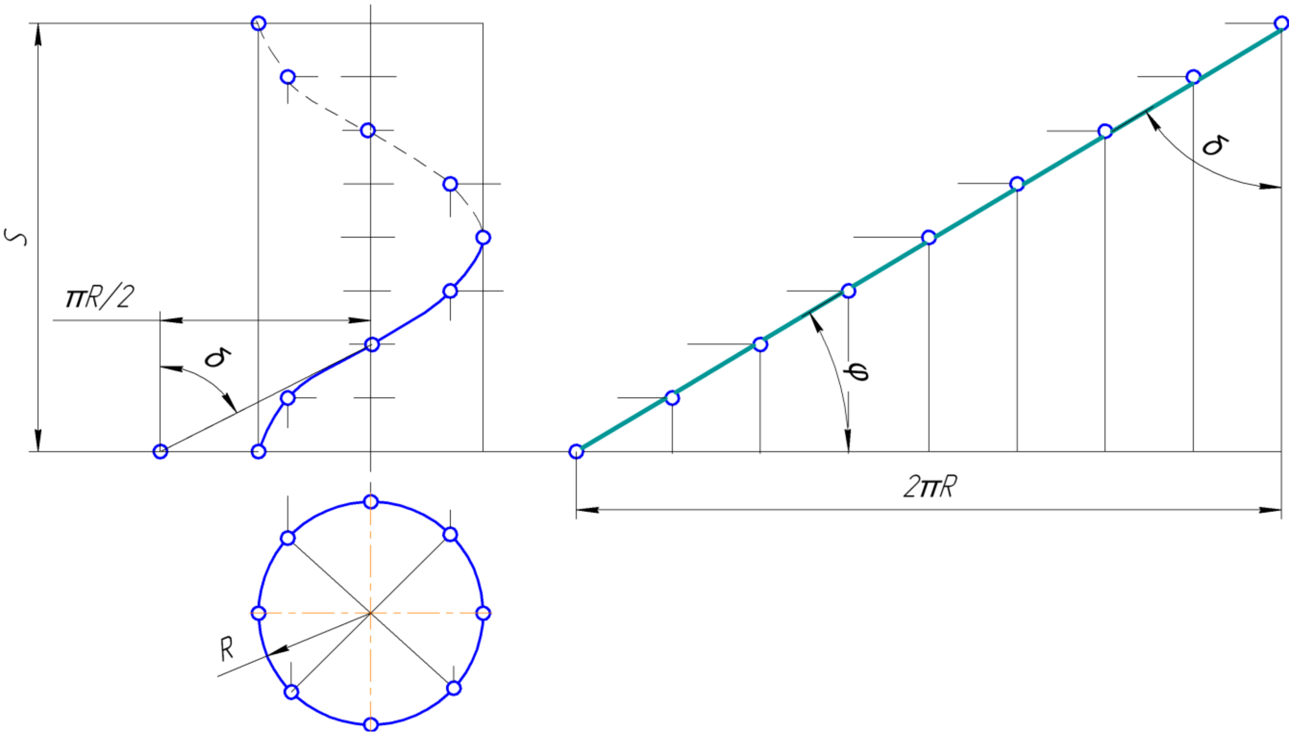


Рис. 51. Циліндрична гвинтова лінія

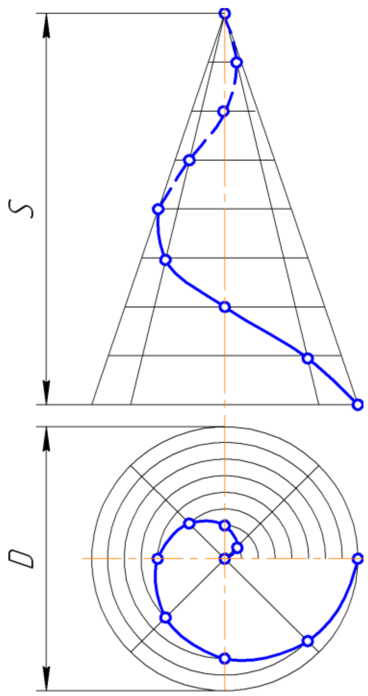


Рис. 52. Конічна гвинтова лінія

УВАГА!

Конічна гвинтова лінія з постійним кроком проекціюється на площину, перпендикулярну до осі конуса, у вигляді *спіралі Архімеда*, полюсом якої є проекція вершини конуса.

Проекція конічної гвинтової лінії на площину, паралельну осі конуса, – *синусоїда,* висота хвилі, якої зменшується (згасаюча синусоїда).

5.1. ПОВЕРХНІ.
ЇХ УТВОРЕННЯ І ЗАДАННЯ НА ЕПЮРІ МОНЖА

Означення

Кривою поверхнею *називається сукупність усіх послідовних положень будь-якої лінії, яка рухається у просторі за певним законом.*

Поверхні, твірна яких пряма лінія, називаються ***лінійчаті.***
Криву поверхню можна отримати декількома способами:

- аналітичним;
- кінематичним;
- заданням поверхні каркасом.

Нелінійчаті, або криві поверхні, утворюються за допомогою криволінійних твірних.

Аналітичний спосіб задання поверхні

Поверхні (алгебраїчні або трансцендентні) можна розглядати як геометричне місце точок або ліній. Координати точок цього геометричного місця задовольняють заданому рівнянню вигляду $F(x, y, z)=0$.

Означення

*Поверхня називається **трансцендентною**, якщо її рівняння – трансцендентна функція* відносно x, y, z.*

Алгебраїчною *поверхнею n-го порядку називають поверхню, рівняння якої – алгебраїчне рівняння степені n.*

Площина, як відомо, виражається рівнянням першого ступеня. Її називають поверхнею першого ступеня. Будь-яка довільна площина перетинає поверхню *n*-го порядку по кривій лінії того ж самого порядку (інколи вона розпадається або мнима). Будь-яка довільна пряма перетинає поверхню *n*-го порядку в *n* точках (дійсних або мнимих).

Аналітичний спосіб задання поверхні знайшов широке використання в практиці, особливо коли необхідно дослідити властивості поверхні, що інваріантна відносно свого згину – внутрішні властивості поверхні.

Каркасний спосіб задання поверхні

Поверхні до яких неможливо використати математичні закономірності, зазвичай задають достатньо щільною сіткою ліній, які належать цим поверхням. Сукупність таких ліній називають ***дискретною** сіткою***, або ***дискретним каркасом*** поверхні.

Одним із розповсюджених у промисловості методів конструювання поверхонь є метод конструювання поверхонь за допомогою безперервного каркасу. Каркас поверхні може складатись із просторових кривих ліній. Проте частіше за все поверхні задають каркасом їх плоских перерізів.

Каркаси поверхонь можуть складатись із однієї, двох і трьох родин плоских перерізів. У всіх випадках будь-який плоский переріз даного роду може бути вихідним; інші родини перерізу будуються як додаткові на основі першого.

Каркаси поверхонь поділяють на ***точкові*** і ***лекальні***.

---

* Найпростішими прикладами трансцендентної функції є: показна, тригонометрична, логарифмічна функції.

** Дискретний – означає, який складається з окремих елементів.

Означення

Точковим каркасом *називається сукупність точок на поверхні, вибраних таким чином, що, орієнтуючись по ним, можна достатньо повно уявити вигляд, форму поверхні в усіх її частинах. Точки можна вибрати, так щоб вони були ізольованими одна від одної, або поєднати їх між собою прямими лініями.*

Кінематичний спосіб задання поверхні

У нарисній геометрії поверхні можна розглядати як *кінематичні*, інакше утворені безперервним переміщенням у просторі будь-якої лінії або поверхні (рис. 53). Ці лінії і поверхні називаються ***утворювальними*** (твірними) кінематичної поверхні. Поверхня, яка утворена переміщенням лінії, уявляє собою геометричне місце будь-яких положень твірної лінії.

Поверхня, яка утворена безперервним переміщенням утворювальної поверхні, розглядається як така, що огинає різноманітні положення утворювальної поверхні. Утворена таким чином кінематична поверхня дотикається до утворювальної поверхні в різноманітних її положеннях, інакше має деякі спільні лінії. Ці лінії називаються ***характеристиками*** поверхні.

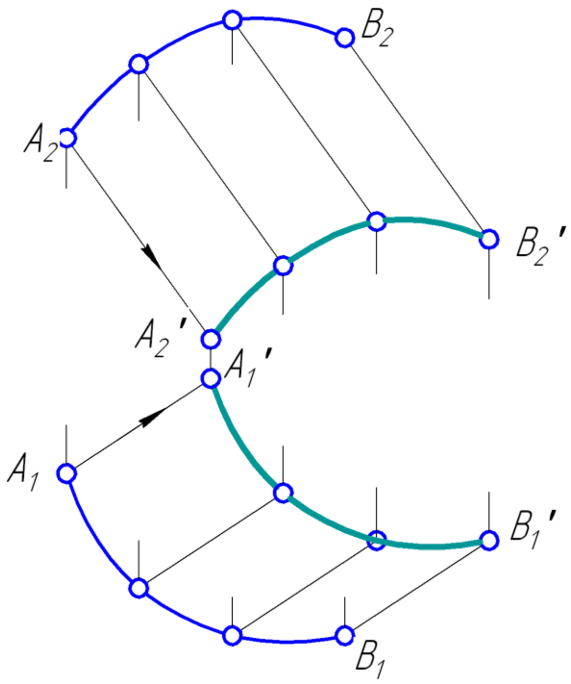


Рис. 53. Кінематична поверхня

Твірна кінематичної поверхні переміщується у просторі за визначеним законом. Вона може у процесі руху зберігати свою форму (мати незмінний вигляд), а також у процесі руху безперервно змінювати свою форму. Від вигляду твірної і закону її переміщення залежить форма (вигляд) кінематичної поверхні. Переміщення у просторі твірної зручно задавати нерухомими кривими, які називаються *напрямними лініями* кінематичної поверхні.

На будь-якій кінематичній поверхні можна виділити дві родини кривих ліній – твірні та напрямні. З цих родин можна скласти каркас кінематичної поверхні.

Сукупність основних параметрів поверхні, що визначають її способи задання називають *визначниками поверхні*. Наприклад, визначником конуса обертання може бути вісь і твірна або вершина і напрямна лінія. Визначником циліндра обертання може бути вісь і твірна (пряма чи крива) або вісь і напрямна (коло). Коло може бути напрямною лінією циліндра та його твірною.

Означення

- *Поверхні, в яких безмежно малі поступальні переміщення твірної лінії одного направлення, називаються **поверхнями перенесення прямолінійного направлення**.*
- *Поверхні, в яких безмежно малі обертальні переміщення твірної лінії із загальною нерухомою віссю, називаються **поверхнями обертання**.*
- *Поверхні, в яких безмежно малі гвинтові переміщення твірної лінії одного параметра і, які мають спільну гвинтову вісь, називаються **гвинтовими поверхнями**.*

Найважливіші *властивості кінематичних поверхонь основних видів*:

1) будь-яку криву лінію поверхні, яка перетинає хід усіх точок твірної лінії, можна розглянути як утворювальну лінію поверхні;
2) дві поверхні, що мають спільний закон утворення і відрізняються одна від одної твірними лініями, можуть перетинатись між собою тільки по спільним ходам точок твірних ліній;
3) будова кінематичної поверхні основного виду не змінюється у точках даного ходу;
4) кожна кінематична поверхня основного виду може без деформації зміщуватися поздовж самої себе.

Поверхні перенесення прямолінійного направлення

Поверхня перенесення прямолінійного направлення утворюється безперервним поступальним переміщенням твірної – кривої лінії ABC (рис. 534).

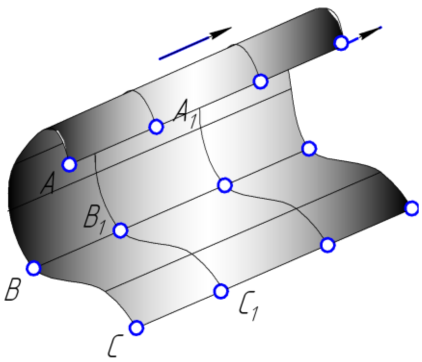


Рис. 54. Поверхня перенесення прямолінійного направлення

Поверхню перенесення прямолінійного направлення можна також розглянути і як поверхню, що утворюється рухом прямої лінії, яка весь час паралельна даному направленню і ковзає по кривій лінії ABC. Тут крива ABC – напрямна лінія, а пряма (направлення перенесення) – твірна лінія поверхні.

Поверхні обертання

Поверхня обертання утворюється обертальним переміщенням твірної лінії навколо нерухомої осі (рис. 55). Під час вивчення таких поверхонь зазвичай за вісь обертання приймається вертикальна пряма.

Ходом кожної точки твірної лінії є коло, яке називається *паралеллю* поверхні обертання. Площини паралелей перпендикулярні до осі поверхні. Паралелі без спотворення проекціюються на площину, яка перпендикулярна до осі – кола із спільним центром. Найбільшу з паралелей (коло) поверхні обертання називають *екватором* поверхні, а найменшу – *шийкою* (*горлом*).

Площини, що проходять через вісь поверхні обертання, називаються *меридіальними*, а лінії по яких вони перетинають поверхню – *меридіанами.*

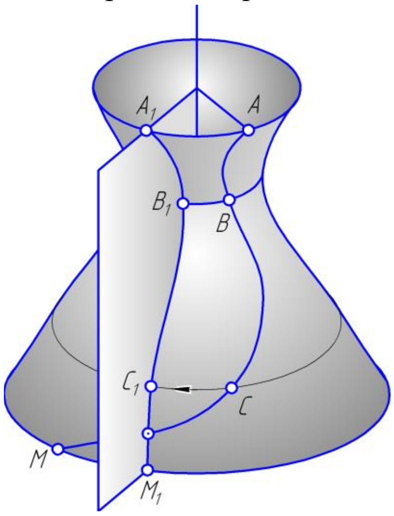


Рис. 55. Поверхня обертання

Означення

Поверхня обертання називається закритою, якщо меридіальний переріз поверхні є замкнутою кривою лінією, яка перетинає вісь поверхні в двох точках.

Властивості поверхні обертання:

1) поверхня обертання має властивість зрушуватись, інакше обертаючись навколо осі, поверхня може рухатись без деформації поздовж самої себе;
2) якщо меридіан поверхні обертання проходить через дві точки поверхні, то він є найкоротшою лінією між цими точками і всі меридіани однакові між собою;
3) кожна з паралелей поверхні обертання перетинає меридіан під прямим кутом, інакше паралелі та меридіани утворюють прямокутну сітку на поверхні обертання;
4) поверхню обертання можна задати будь-якою кривою, якщо ця крива перетинає всі ходи точок твірної лінії;
5) кожна з нормалей до поверхні обертання перетинає вісь поверхні.

Це означає, що для кожної поверхні обертання можна будувати вписані або описані сфери.

Від виду кривої лінії другого порядку у головному меридіальному перерізі поверхні обертання мають назви:

– *сфера* (куля), якщо твірна крива лінія є колом, а вісь співпадає з її діаметром;

– *тор**, якщо твірна – коло, яке обертається навколо осі, що лежить в площині кола і не проходить через його центр. Якщо вісь обертання перетинає твірне коло чи дотикається до нього, то утворюється *закритий тор.* Якщо вісь обертання не перетинає твірне коло і не дотикається до нього, то утворюється *відкритий тор* (кільце);

---

* Тор є поверхнею четвертого порядку

– *еліпсоїд* обертання утворюється обертанням еліпса навколо його осі. Якщо за вісь обертання прийнято його велику вісь, то буде *витягнутий еліпсоїд* обертання, якщо малу – *стиснутий еліпсоїд* обертання;

– *параболоїд обертання* утворюється обертанням параболи навколо її осі;

– *однопорожнинний гіперболоїд* обертання утворюється обертанням гіперболи навколо уявної осі;

– *двопорожнинний гіперболоїд* обертання утворюється обертанням гіперболи навколо дійсної осі;

– *конус обертання* утворюється обертанням навколо осі кривої другого порядку, яка розпадається на дві прямі лінії, що перетинаються;

– *циліндр обертання* утворюється обертанням навколо осі кривої 2-го порядку, яка розпадається на дві паралельні прямі лінії.

Гвинтові поверхні

Гвинтова поверхня утворюється гвинтовим переміщенням твірної лінії. Її можна задати начальним положенням твірної лінії (A_1B_1, A_2B_2), нерухомою віссю, перпендикулярною до площини проекцій $П_1$, кроком і ходом (рис. 56).

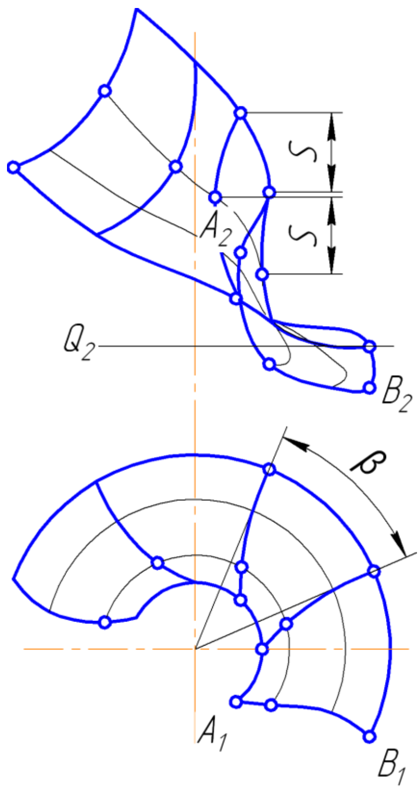


Рис. 56. Утворення гвинтової поверхні

Ходом усіх точок твірної лінії є циліндрична гвинтова лінія, яка має однакові крок і хід зі гвинтовою поверхнею. Ці гвинтові ходи точок твірної лінії мають спільний *одиничний крок*

$S_0 = \frac{S}{2\pi}$, який називається *параметром* гвинтової поверхні $p = S_0 = \frac{S}{2\pi}$. Горизонтальними проекціями ходів точок твірної лінії є кола з спільним центром у точці, яка є виродженою проекцією гвинтової осі.

У процесі обертання твірної лінії навколо осі на кут β вона отримує осьове переміщення на величину:

$$S = \beta \cdot \frac{S}{2\pi} = \beta \cdot p,$$
$$S_n = \beta_n \cdot p,$$

де кут β вимірюється в радіанах.

Фронтальні проекції ряду положень твірної лінії, які відповідають горизонтальним проекціям, визначають виходячи з умови, що фронтальні проекції точок твірної вище на величини S фронтальних проекцій однойменних точок твірної лінії у початковому її положенні.

Поєднавши фронтальні проекції однойменних точок твірної лінії у різноманітних її положеннях плавними кривими, отримаємо фронтальні проекції ходів ряду точок твірної лінії, які уявляють собою синусоїду.

Гвинтові поверхні, у яких твірною є пряма лінія, називаються *гелікоїдами*.

Гелікоїд називається *прямим,* якщо твірна пряма лінія становить з віссю поверхні прямий кут; у всіх інших випадках гелікоїд називається *косим*.

Якщо твірна пряма лінія перетинається з віссю поверхні, гелікоїд називається *закритим;* якщо не перетинається – гелікоїд називається *відкритим*.

Багатогранники

Одним з видів просторових форм є *багатогранники* – замкнуті просторові фігури, які обмежені плоскими багатокутниками. Вершини та сторони багатогранників є вершинами і ребрами багатогранника. Вони утворюють просторову сітку. Якщо вершини і ребра багатогранника знаходяться з одного боку площини будь-якої з граней, то багатогранник називається *випуклим*; усі його грані – випуклі багатокутники.

Найбільшу практичну зацікавленість мають призми, піраміди, призматоїди і правильні випуклі багатогранники – тіла Платона (тетраедр, гексаедр, октаедр, додекаедр та ікосаедр), а також багатогранники, що мають довільну форму.

Означення

> ***Багатогранником*** *називається тіло, обмежене багатогранною поверхнею. Сукупність усіх ребер і вершин багатогранника є його контуром*.

УВАГА!

> Щоб задати – поверхню на епюрі Монжа, зазвичай вказують не всі проекції множини точок або лінії, що належать поверхні, а тільки деякі з них або ті, що входять до складу визначника поверхні чи задають контур. Визначник складається з двох частин: геометричної, в якій задаються деякі основні елементи та величини, й алгоритмічної, яка вказує характер зміни форми твірної і закону її переміщення.

Поверхня вважається заданою на кресленику, якщо відносно будь-якої точки, заданої на тому ж кресленику, можна однозначно встановити, чи належить точка цій поверхні, або ні.

Правило

Щоб задати на кресленику проекції точок, які належать багатограннику чи кривій поверхні, необхідно спочатку побудувати будь-яку лінію на заданій поверхні, а потім на проекціях цієї лінії взяти проекції шуканих точок (рис. 57).

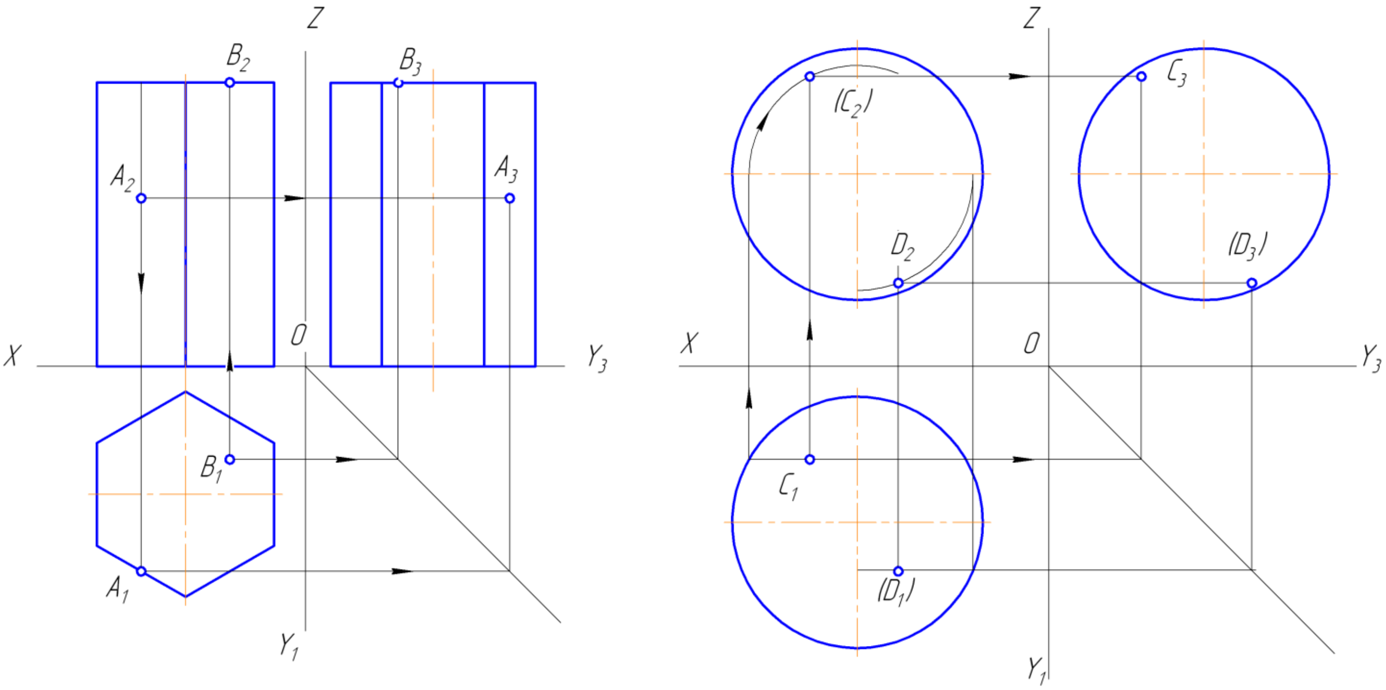


Рис. 57. Побудова точок на поверхнях

ЛЕКЦІЯ № 6

ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПРЯМИМИ ЛІНІЯМИ І ПЛОЩИНОЮ

Перетин поверхонь проекціювальними площинами

Площина перетинає поверхню по плоскій кривій лінії. Лінію перетину поверхні проекціювальною площиною будують по точкам перетину з площиною ходів ряду точок твірної лінії і самої твірної лінії в різних її положеннях.

Плоскі перерізи багатогранників

Лінія перетину багатогранника площиною визначається або за точками перетину ребер багатогранника (*спосіб ребер*), або за лініями перетину граней багатогранника з цією площиною (*спосіб граней*) (рис. 58).

Означення

Багатокутник, утворений від перетину багатогранника площиною, називається ***фігурою перерізу****.*

Твердження

- Фігура перерізу поверхонь проекціюється на площину проекцій без спотворення, якщо розтинальна площина паралельна площині проекцій.

- Проекції фігури перерізу можуть перетворюватись на відрізки прямих, на тій площині проекцій, до якої площина перерізу перпендикулярна.
- Кількість сторін багатокутника перерізу дорівнює кількості граней, які перетинаються розтинальною площиною.

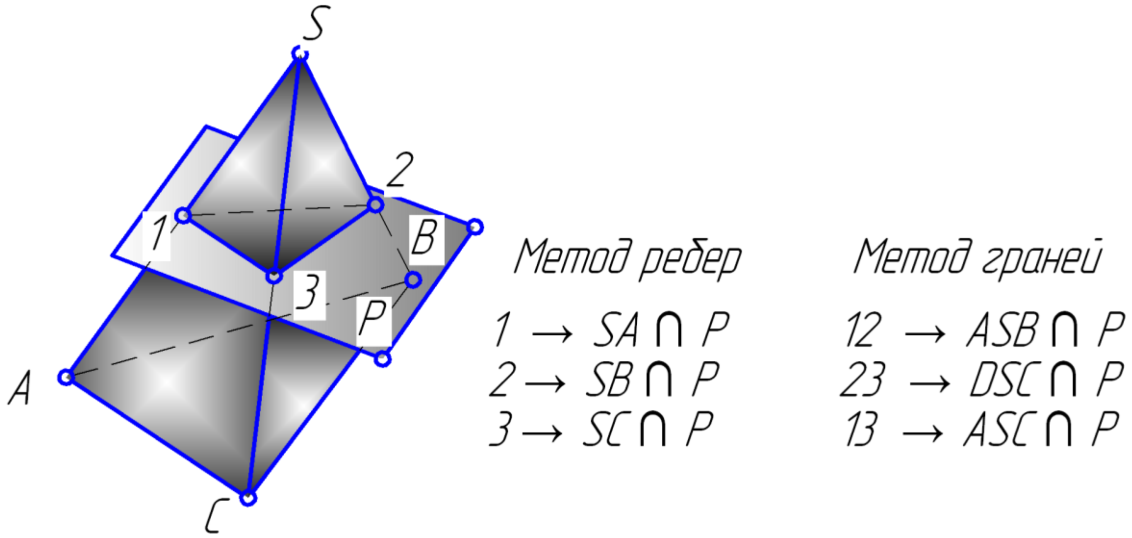


Рис. 58. Перетин багатогранника площиною

Плоскі перерізи кривих поверхонь

Твердження

- При перетині кривих поверхонь площиною в загальному випадку криві лінії утворюються шляхом знаходження точок перетину твірних поверхні зі розтинальною площиною. Якщо крива поверхня нелінійна, то для побудови лінії перетину такої поверхні площиною необхідно застосовувати допоміжні площини. Точки шуканої лінії знаходяться на перетині ліній, по яких допоміжні розтинальні площини перетинають поверхню і площину.
- При перетині поверхні обертання площиною спочатку будують *головні точки* лінії перетину, а потім ряд проміжних точок. Проміжними точками лінії перетину будуть точки перетину площиною, яка паралельна поверхні (рис. 59).

Означення

Головними точками *кривої перетину поверхні обертання площиною називаються точки перетину цієї площини – головного меридіального перерізу поверхні, екватора поверхні, а також вища і нижча точки лінії перетину відносно площини проекцій* Π_1.

На рис. 59 побудовано лінію перетину поверхні, заданої контуром, фронтально-проекціювальною площиною Q_2. Головними точками шуканої лінії перетину є точки $1_1 1_2$ і $2_1 2_2$, в яких головний меридіан поверхні перетинається площиною Q_2, а також точки $3_1 3_2$ і $4_1 4_2$, в яких задана площина перетинає екватор поверхні. Точки $1_1 1_2$ і $2_1 2_2$ одночасно є вищою і нижчою точками шуканої лінії перетину.

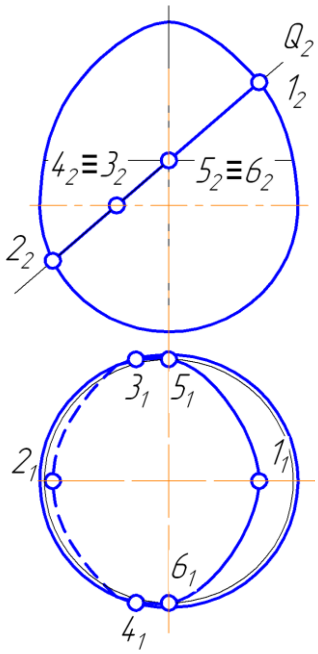


Рис. 59. Побудова лінії перетину кривої поверхні площиною

Точки 5_15_2 і 6_16_2 є проміжними (додатковими) точками лінії перетину. Поєднавши горизонтальні проекції знайдених точок лінії перетину плавною кривою, отримаємо горизонтальну проекцію шуканої лінії перетину. Фронтальна її проекція співпадає зі слідом Q_2 площини.

Та частина лінії перетину, яка розташована вище екватора буде видимою на горизонтальній площині проекцій.

Конічні перерізи

При перетині конуса обертання площиною можуть утворюватись: прямі, що перетинаються, коло, еліпс, гіпербола і парабола.

Твердження

- Якщо розтинальна площина перпендикулярна до осі конуса, то в перетині утворюється *коло* (рис. 60, а).
- Якщо розтинальна площина проходить через вершину конуса, то розтинає його *по прямим лініям* (рис. 60, б).
- Якщо розтинальна площина перетинає усі твірні конуса і не перпендикулярна до його осі, то в перетині утворюється *еліпс* (рис. 60, в).
- Якщо розтинальна площина перетинає тільки одну порожнину конуса і паралельна одній твірній конуса (кут її нахилу до осі конуса дорівнює куту, який утворюють твірні конуса з його віссю), то в перетині утворюється *парабола* (рис. 60, г).
- Якщо розтинальна площина перетинає обидві порожнини конуса обертання, інакше паралельна двом його твірним, то в перетині утворюється *гіпербола* (рис. 60, д).

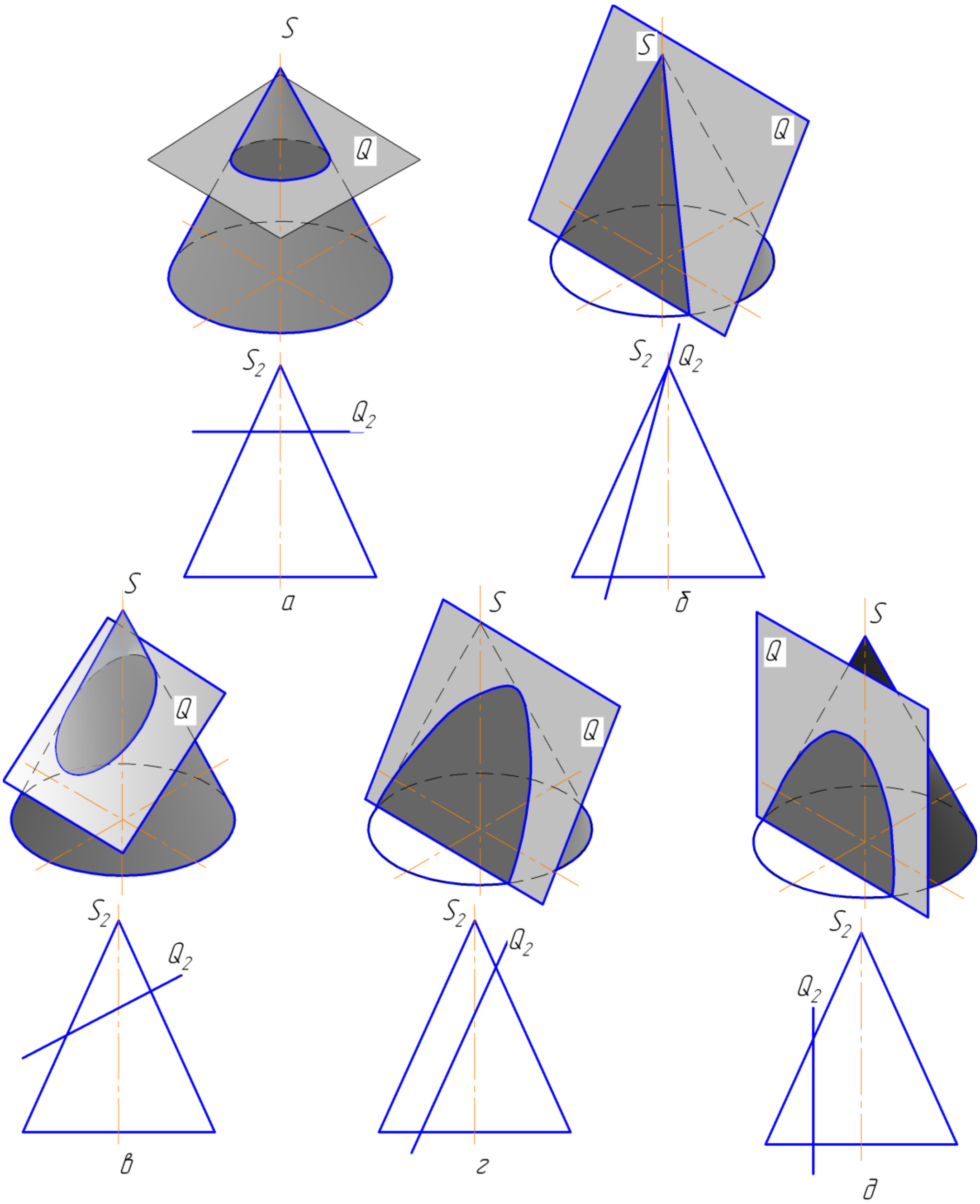


Рис. 60. Утворення конічних перерізів

Перетин поверхні прямою лінією

Для того щоб визначити точки перетину прямої з поверхнею будь-якого геометричного тіла (призма, піраміда, циліндр, конус, куля тощо), поступають точно так, як і при визначенні точки перетину прямої з площиною.

Перетин багатогранника прямою лінією це – дві точки, які називаються *точками входу* і *виходу*.

Точка перетину прямої лінії з поверхнею зазвичай визначається за схемою:

1) через пряму лінію проводять допоміжну розтинальну площину (найчастіше проекціювальну);
2) будують лінію перетину допоміжної площини з поверхнею;
3) визначають точки перетину прямої лінії з лінією перетину поверхні допоміжною площиною.

Побудову точок перетину прямої лінії E_1F_1, E_2F_2 з поверхнею обертання, заданої контуром, показано на рис. 61.

На прикладі через дану пряму лінію проведено фронтально-проекціювальну площину P_2 і побудовано лінію перетину цієї площини з поверхнею обертання. Пряма лінія перетинається з побудованою кривою лінією в точках K_1K_2, M_1M_2, які є шуканими точками входу прямої E_1F_1, E_2F_2 у поверхню та її виходу з неї.

УВАГА!

При замкненні прямої до допоміжної площини останню необхідно вибрати так, щоб її лінія перетину з поверхнею проекціювалась на площину проекцій у вигляді простих ліній – прямої або кола.

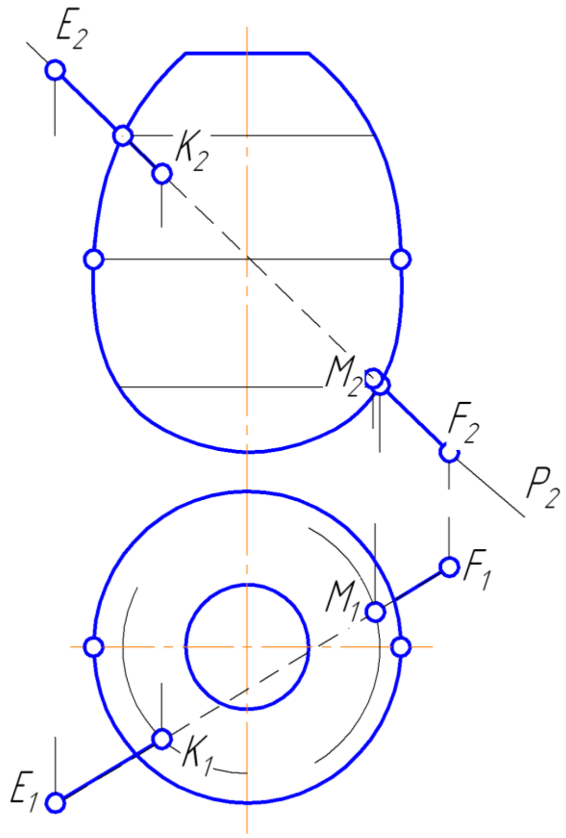


Рис. 61. Перетин поверхні прямою лінією

Перетин поверхонь площинами загального положення

Лінію перетину поверхні довільно розташованою площиною будують як і для проекціювальної площини, по точкам перетину ходів ряду точок твірної лінії і самої твірної лінії в різних її положеннях з цією площиною.

У тих випадках, коли на поверхні не показано положення твірної і ходів точок, використовують допоміжні площини і поверхні.

Побудову лінії перетину конуса обертання довільно розташованою площиною $M_1N_1E_1$, $M_2N_2E_2$ показано на рис. 62. Тут спочатку визначено точки лінії перетину, що розташовані на головному меридіані. Фронталь 1_12_1, 1_22_2, розташована в головній меридіальній площині, перетинає твірні фронтального контура в точках 3_13_2 і 4_14_2, а вісь конуса – в точках 5_1K_1, 5_2K_2 площини і визначає слід N_{S1} меридіанної площини, перпендикулярної до горизонталі.

В площині N_{S1} знаходяться найвища і найнижча точки лінії перетину. Ці точки A_1A_2, B_1B_2 визначено як точки перетину прямої K_18_1, K_28_2 площини N_{S1} і заданої площини з твірними 6_1S_1, 6_2S_2 і 7_1S_1, 7_2S_2, що розташовані в меридіанній площині N_{S1}.

Відрізок A_1B_1 є великою віссю еліпса горизонтальної проекції, а точка S – одним з фокусів цього еліпса. Роблячи засіки з фокуса S радіусом, який дорівнює половині відрізка A_1B_1 в його середині O_1, визначимо точки D_1 і C_1. Де D_1C_1 – мала вісь еліпса. Взаємоперпендикулярні діаметри A_1B_1, A_2B_2 і D_1C_1, D_2C_2 представлені, як спряжені діаметри в їх фронтальних проекціях, спряженими діаметрами фронтальної проекції лінії перетину конуса обертання заданою площиною. Далі вже відомим методом визначаємо велику і малу вісі еліпса і будуємо необхідний ряд точок.

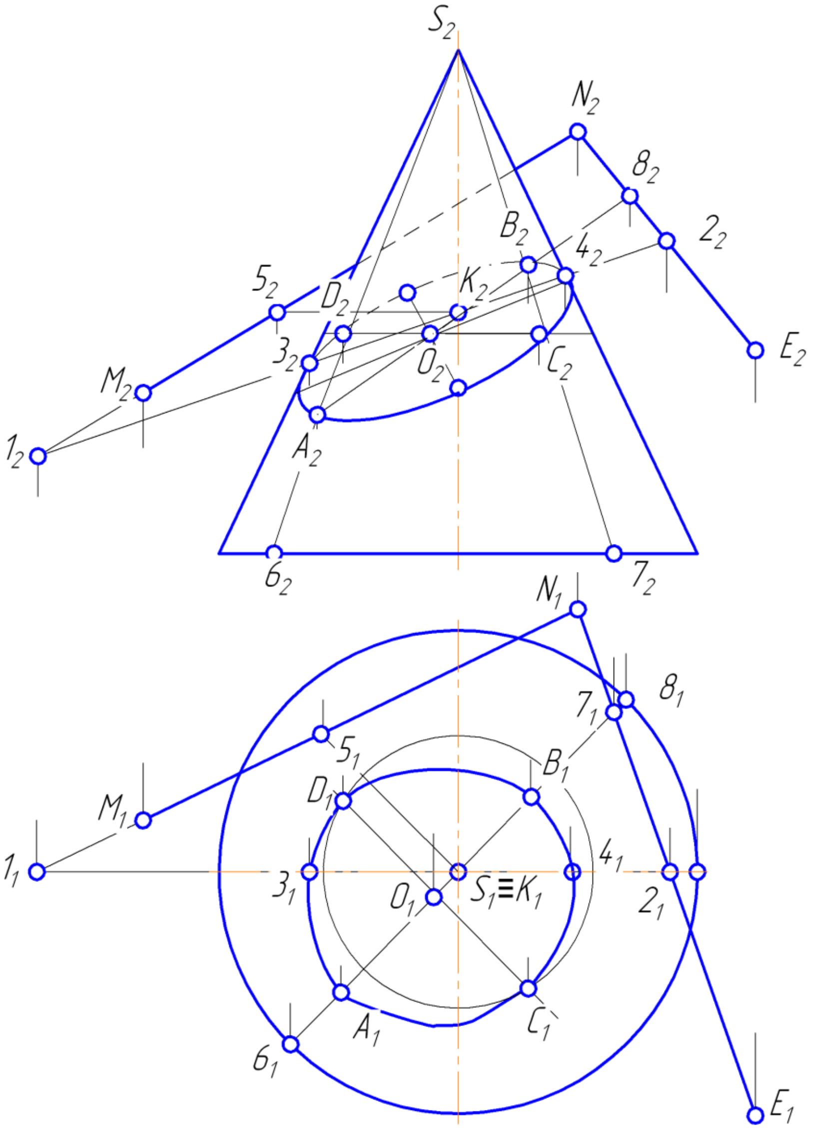


Рис. 62. Перетин поверхні конуса площиною загального положення

ЛЕКЦІЯ № 7

РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Зазвичай поверхню розглядають як гнучку, як оболонку, яку неможливо розтягнути.

Означення

*Деякі поверхні, якщо їх поступово деформувати, можна сумістити з площиною без розривів і складок. Такі поверхні називаються **розгортні**.*

При розгортанні встановлюється взаємна однозначна відповідність між точками поверхні і площинами. Усі поверхні можна поділити на такі, що можна розгорнути і такі, які не можна розгорнути без спотворення.

До поверхонь, що розгортаються належать ті, які можна розгорнути без деформації – сумістити з площиною так, що всі елементи поверхні зображуються у справжній величині. Без спотворення можуть розгортатись тільки лінійчаті поверхні, суміжні твірні яких перетинаються. При цьому точки перетину можуть бути як власні, так і невласні.

До групи лінійчатих поверхонь з суміжними твірними, що перетинаються належать торси (поверхні з ребром повернення) та їх окремі види, конічні і циліндричні поверхні. Торси мають спільну властивість – розвертатись на дотичних до них площинах.

Будь-яка фігура, що накреслена на поверхні торса, перетворюється у плоске зображення на розгортці. Можна розглядати торс і його розгортку як множину точок, між якими встановлюється взаємно однозначна відповідність. Ця відповідність має ряд важливих властивостей (тверджень).

Твердження

- Кожній точці поверхні торса відповідає єдина точка на його розгортці.
- Кожній кривій лінії, яка лежить на торсі у загальному випадку відповідає крива лінія на його розгортці; довжина кривої на торсі дорівнює довжині її перетворення.
- Кут між кривими лініями (кут між дотичними і кривими у точці їх перетину) на поверхні торса дорівнює куту між перетвореннями цих кривих ліній на розгортці.
- Замкнена лінія на поверхні торса та відповідна їй лінія на розгортці обмежують однакову площину.

При конструюванні часто доводиться розв’язувати задачі, використовуючи методи нарисної геометрії, на побудову розгорток поверхонь, які неможливо розгорнути без спотворення. Теоретично така поверхня не може мати розгортку, але в практиці для того, щоб отримати необхідну поверхню з листового матеріалу будують, так звані, *умовні розгортки*, поверхонь, які неможливо розгорнути, де крім згину, необхідно робити розтяг і стискання листа.

Для побудови умовних розгорток поверхонь обертання, які неможливо розгорнути за апроксимуючі поверхні приймають циліндр і конус.

Означення

*Під **розгорткою поверхні** розуміють перетворення, внаслідок якого всі точки поверхні суміщаються з площиною.*

Розгортка будь-якої поверхні, що розгортається приблизна. При розгортанні такої поверхні останню апроксимують поверхнями, вписаних або описаних багатогранників, які мають грані у формі прямокутників або трикутників.

УВАГА!

Для того, щоб отримати приблизну розгортку, яка б з достатнім ступенем точності відтворювала розгортку поверхні, що не розгортається, попередньо розбивають її на ділянки (відсіки), кожна з яких апроксимується.

Існує <u>три способи побудови розгорток</u>:

1) спосіб нормальних перерізів (рис. 63);
2) спосіб розкатки (рис. 64);
3) спосіб тріангуляції* (трикутників, рис. 65).

На рис. 63 показано побудову розгортки похилої призми. Спочатку перетинаємо поверхню призми площиною Р, яка перпендикулярна до бокових ребер призми. Будуємо переріз заданої призми цією площиною – [Δ123]. Визначаємо дійсну величину сторін трикутника [Δ123] методом плоскопаралельного перенесення. Далі в довільному місці кресленика проводимо горизонтальну пряму і від довільної точки 1_0, яку беремо на цій прямій, відкладаємо відрізки $|1_02_0|$, $|2_03_0|$, $|3_01_0|$, що конгруентні сторонам трикутника [Δ123]. Через точки 1_0, 2_0, 3_0 і 1_0 проводимо прямі, що перпендикулярні до горизонтальної прямої. На цих прямих відкладаємо відрізки, які конгруентні відповідним дійсним величинам відрізків бічних ребер призми. Таким чином, отримаємо точки A_0, B_0, C_0 і A_0', B_0', C_0'. Отримані точки з’єднуємо прямими, що дасть нам розгортку бічної поверхні призми, до якої приєднуємо нижню і верхню основи.

Спосіб розкатки (рис. 64) доцільно використовувати для побудови розгортки призми у тому випадку, коли основа призми паралельна до будь-якої однієї з площин проекцій, а її ребра паралельні до іншої площини проекцій. На рис. 63 показано побудову розгортки методом розкатки. Для того, щоб отримати повну розгортку призми достатньо до будь-якої ланки ламаної лінії бічної поверхні розгортки призми приєднати дійсні величини основ (верхньої та нижньої).

На рис. 65 побудовано розгортку бічної поверхні піраміди SABC методом тріангуляції (трикутників), яка уявляє собою плоску фігуру, що складається з трикутників – граней піраміди. Тому побудова зводиться до визначення дійсної величини ребер піраміди і побудову за трьома сторонами трикутників – граней піраміди. Визначення дійсної величини ребер піраміди здійснено методом обертання навколо осі, що належить висоті піраміди та яка перпендикулярна до площини Π_1.

* Тріангуляція – від лат. triangulum – трикутник (tres – три і angulus – кут) – розбиття поверхні на трикутники (криволінійні).

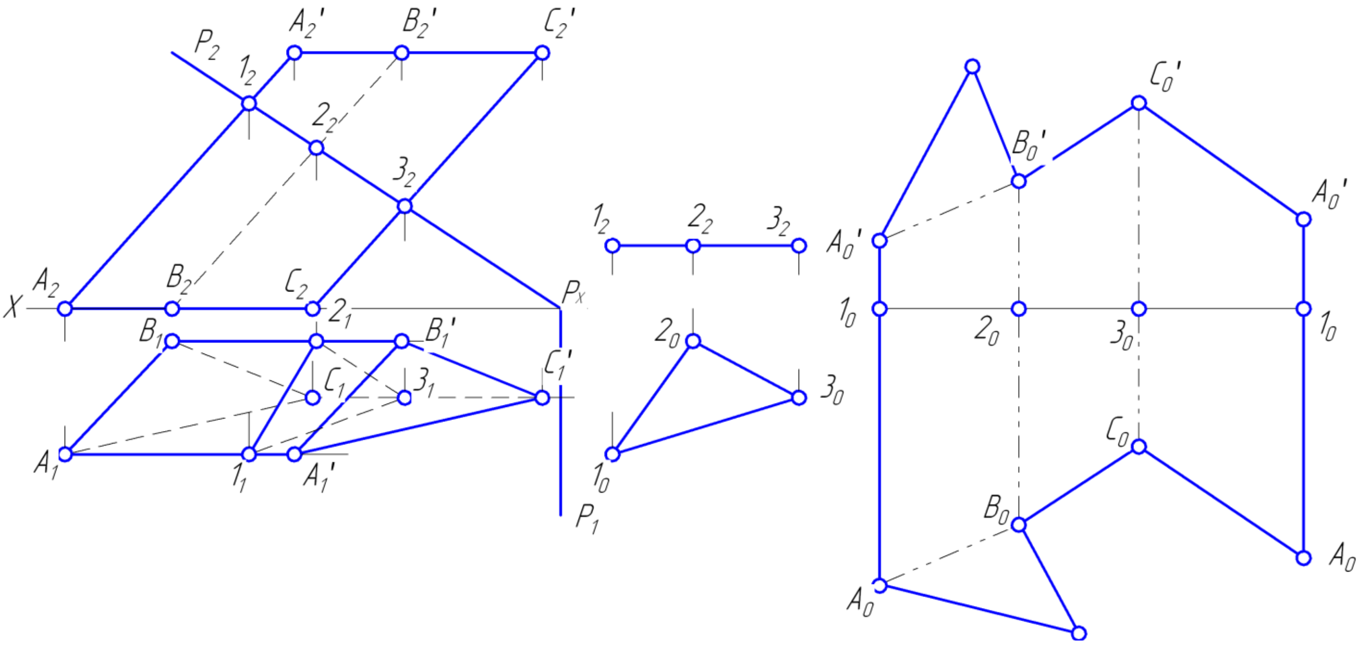


Рис. 63. Спосіб нормальних перерізів

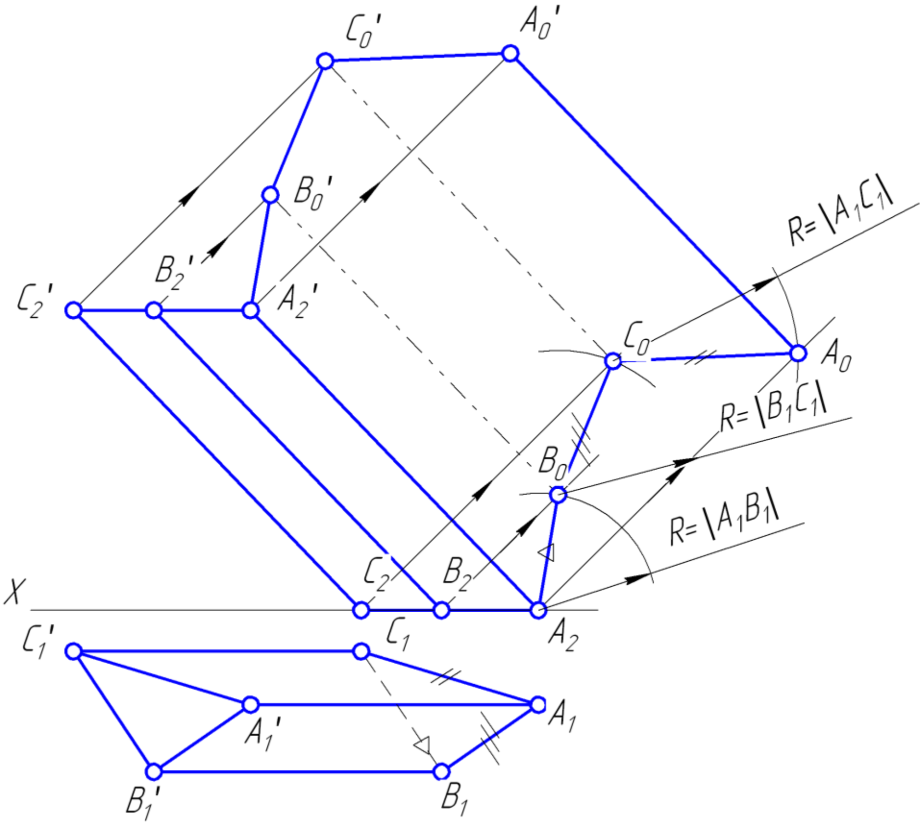


Рис. 64. Спосіб розкатки

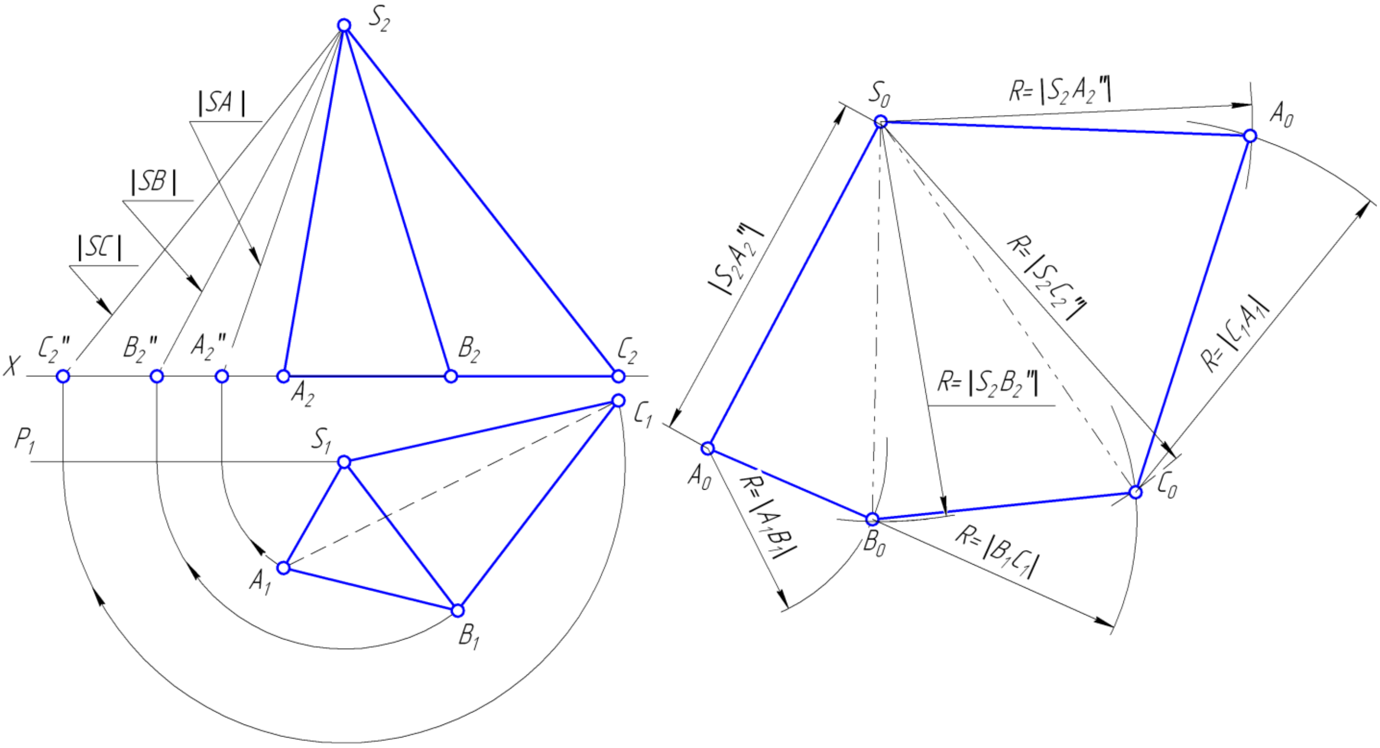


Рис. 65. Спосіб тріангуляції (трикутників)

Задача на побудову розгортки конічної поверхні і поверхні з ребром повернення розв’язується також за допомогою трикутників, замінюючи криві поверхні багатогранною поверхнею з трикутними гранями. На площині послідовно будують всі трикутники багатогранної поверхні. Точки розігнутих хорд кола з’єднують плавною лекальною кривою.

ЛЕКЦІЯ № 8

ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

Дві поверхні перетинаються по кривим лініям (ламана лінія), яку можна визначити по точкам перетину ліній однієї поверхні з іншою або по точкам перетину ліній кожної з поверхонь – ліній першої поверхні з другою і ліній другої поверхні з першою. Такими лініями можуть бути твірні в різних їх положеннях, ходи точок твірної лінії, а також будь-які лінії, що лежать на поверхні.

Таким чином, для того, щоб побудувати лінію перетину двох поверхонь, необхідно визначити ряд спільних точок, що належать їм, а потім ці точки поєднати у визначеній послідовності.

Лінією перетину може бути:

– *просторова крива* – при перетині двох кривих поверхонь чи кривої поверхні і багатогранника;
– *просторова ламана лінія* – при перетині двох багатогранників;
– в окремих випадках лінія перетину двох поверхонь може бути *плоскою* – прямою лінією, колом, еліпсом тощо.

Узагальнений алгоритм розв’язування задач на визначення
лінії перетину двох поверхонь:

1. Увести допоміжну розтинальну площину, яка перетинає кожну із заданих поверхонь по найбільш простим і зручним для побудови лініям;
2. Визначити лінію перетину допоміжної площини з кожною поверхнею;
3. Знайти точки (чи *n* точок) перетину одержаних ліній, які й будуть шуканими;
4. Виконавши зазначені побудови *n* разів, отримаємо *n* точок. Сполучивши однойменні проекції цих точок плавними кривими, отримаємо проекції шуканої лінії перетину.

Послідовне введення ряду допоміжних площин, дає можливості визначити необхідне число точок.

Вказівка

Допоміжну площину необхідно обирати так, щоб її лінія перетину з кожною поверхнею проекціювалась на площину проекцій у вигляді простих ліній – прямої чи кола.

У ряді випадках при розв’язанні задач використовують комбінацію допоміжних розтинальних площин. Зі загальної схеми побудови лінії перетину поверхонь можна виділити два основних способи – *спосіб допоміжних розтинальних площин* і *спосіб сфер* (*концентричних* і *ексцентричних* сфер):

– спосіб *допоміжних розтинальних площин* використовують у тому випадку, коли вони перетинаються, з кожною з даних поверхонь, дають прямі лінії або кола. Часто проекціювальні площини вибирають у вигляді площин рівня – площин, паралельних площинам проекцій (рис. 66);

– спосіб *розтинальних концентричних сфер* використовують для побудови лінії перетину конічних та циліндричних поверхонь (рис. 67);

– спосіб допоміжних *ексцентричних сфер* використовують для побудови лінії перетину двох поверхонь обертання, які мають спільну площину симетрії (рис. 68).

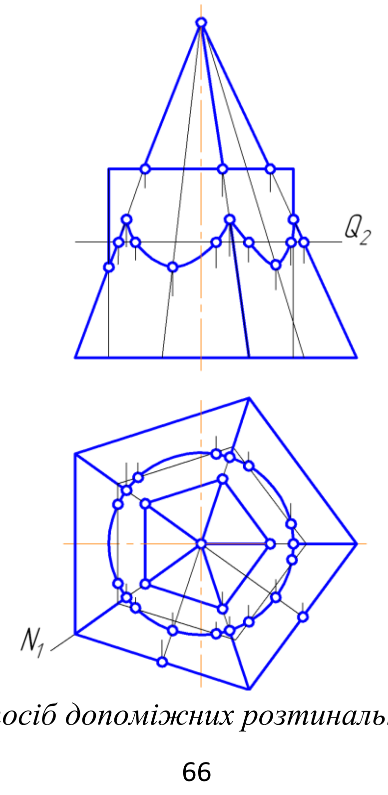


Рис. 66. Спосіб допоміжних розтинальних площин

На рис. 66 показано побудову лінії перетину п'ятигранної піраміди з циліндром, твірні якого перпендикулярні до горизонтальної площини проекцій.

Лінія перетину складається (рис. 66) з п'яти однакових між собою дуг еліпсів. Еліпси можуть бути побудовані по точкам перетину ребер й інших довільних прямих піраміди з поверхнею циліндра або за допомогою допоміжних горизонтальних площин, які перетинають циліндр по колу, а піраміду – по правильним п'ятикутникам.

На рис. 67 показано побудову лінії перетину зрізаного конуса з циліндром, методом концентричних сфер. Осі цих двох поверхонь обертання перетинаються і вони мають спільну фронтальну площину симетрії, а також задані однією фронтальною проекцією. Точки перетину меридіанів поверхонь обертання належать шуканій лінії перетину поверхонь. Їх визначаємо безпосередньо (без будь-яких додаткових побудов) на кресленику.

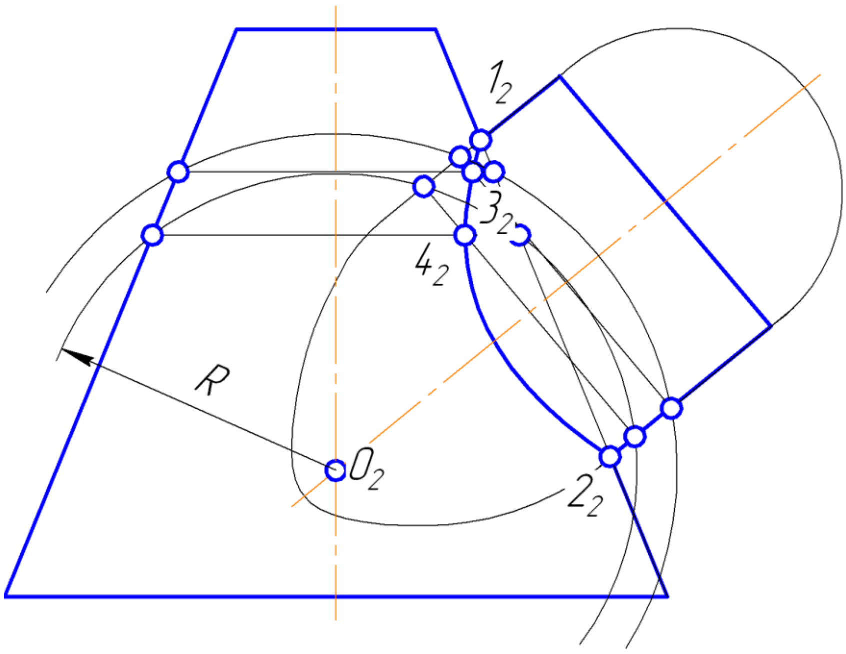


Рис. 67. Спосіб концентричних сфер

На рис. 68 побудовано лінію перетину поверхонь обертання, що мають спільну площину симетрії (одна з поверхонь – сфера), методом ексцентричних сфер. Осі поверхонь обертання не перетинаються. Кожна з таких поверхонь має цілий ряд кіл, по яким перетинаються ексцентричні сфери. Тут вісь поверхні обертання і центр сфери розташовані в одній фронтальній площині.

Будь-яка допоміжна розтинальна сфера з радіусом R і центром на осі поверхні обертання перетинає поверхню обертання і дану сферу по колу. Кола перетинаються у точках шуканої лінії перетину поверхонь. Обираючи інші розтинальні сфери різного радіуса та з різним положенням центрів на осі поверхні обертання, отримаємо ряд точок шуканої лінії перетину поверхонь.

Лінію перетину двох багатогранників можна визначити, виконуючи наступні побудови:

1) знайти точки перетину ребер одного багатогранника з гранями іншого;
2) знайти точки перетину ребер другого багатогранника з гранями першого;
3) знайдені точки послідовно з'єднати між собою прямими лініями.

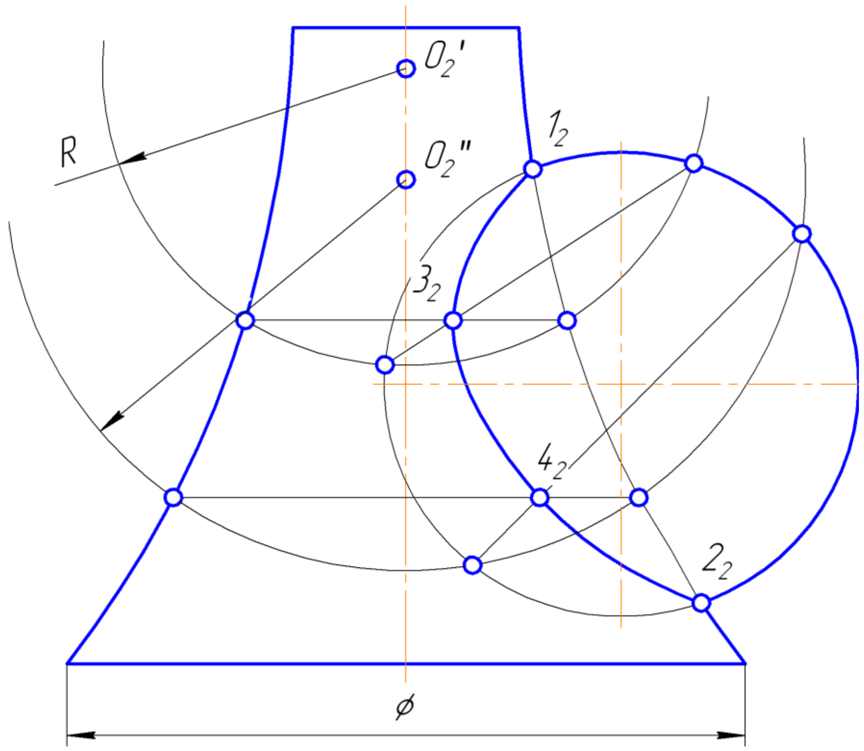


Рис. 68. Спосіб ексцентричних сфер

Вказівка

З'єднувати між собою необхідно обов'язково тільки ті точки, які лежать на одних і тих же гранях кожного з багатогранників.

УВАГА!

- Якщо хоча б одна з поверхонь має прямолінійні твірні, то лінію перетину можна визначити наступним шляхом: нанести на цій поверхні ряд твірних і знайти точки перетину їх з іншою поверхнею, а потім з'єднати ці точки кривою лінією.
- Інколи для того, щоб знайти точки лінії перетину кривих поверхонь, простіше ввести не площини, а поверхню – циліндричну, конічну або кульову.
- Будь-яка поверхня обертання перетинається з поверхнею кулі по колу, якщо центр кола лежить на осі обертання.

8.1. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Щоб отримати наочне зображення об'єкта, що розглядається (плоского або просторового) на будь-якій площині, необхідно увести або косокутне проекціювання, або, зберігши ортогональне проекціювання, замінити одну з основних площин проекцій довільно розташованою площиною.

Аксонометрична проекція, або аксонометрія, уявляє собою один із методів побудови наочних зображень об'єктів в одній площині (рис. 69).

Аксонометричні кресленики мають властивість наочності та одночасно можуть повертатись до попереднього зображення – за таким кресленником легко уявити загальну форму об'єкта і його положення у просторі.

Зображення предмета ми отримуємо в аксонометрії паралельним проекціюванням його на площину проекцій.

Щоб отримати таке зображення об’єкт жорстко пов’язують з системою трьох взаємоперпендикулярних координатних осей OXYZ.

В залежності від направлення проекціювання відносно площини аксонометричних проекцій аксонометрія може бути *косокутною* або *прямокутною*.

Означення

- ***Прямокутна ізометрична проекція*** *– прямокутна аксонометрична проекція предмета, яка має неспотворені чи однаково спотворені розміри вздовж аксонометричних осей X, Y, Z* (рис. 69).
- ***Косокутна аксонометрична про****екція – аксонометрична проекція предмета на площині кресленика, не перпендикулярній до напряму проекціювальних променів*.

Аксонометричні проекції використовуються як допоміжні кресленики, коли вимагається пояснити плоске зображення (кресленик предмета). Найчастіше використовують *прямокутну ізометрію* (рис. 70, а), для якої показники спотворення по всім осям однакові і дорівнюють 1 (збільшені), а також *прямокутну диметрію* – коефіцієнти спотворення по осям OX і OZ однакові і дорівнюють 1, по осі OY – 0,5 (рис. 70, б).

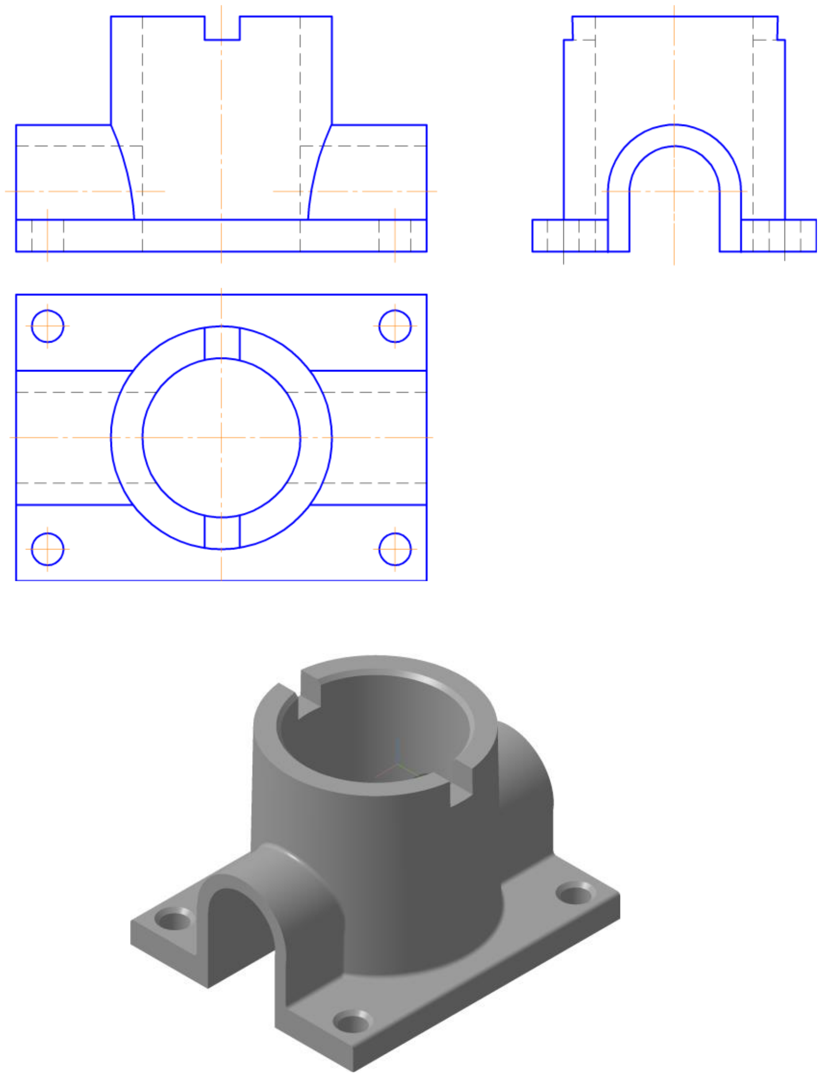
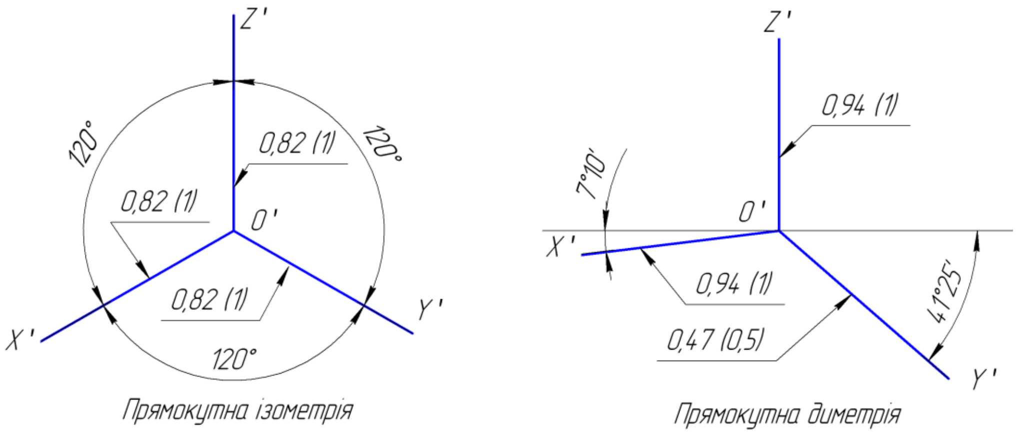


Рис. 69. Аксонометричне зображення деталі



а б

Рис. 70. Направлення осей в прямокутних аксонометричних проекціях

У ході побудов аксонометричних проекцій відрізки прямих ліній поверхонь, що паралельні осям проекцій на комплексному кресленику, повинні бути також паралельними відповідним аксонометричним осям. Плоскі криві і дуги кола великих радіусів в аксонометричних проекціях будуються за координатами точок.

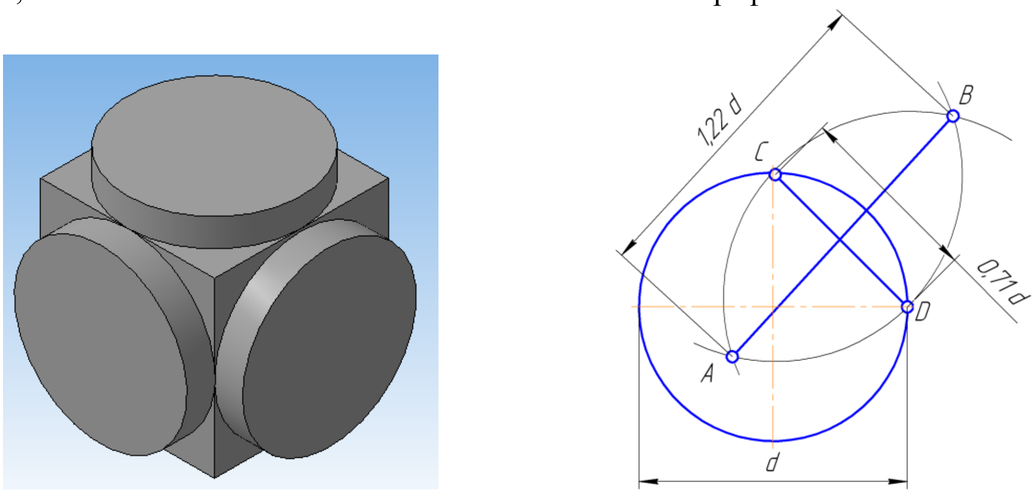
Для побудови ізометричних проекцій зручно користуватись трикутником з кутом 30°. Для побудови фронтальної диметричної проекції необхідно використовувати трикутник з кутом 45°.

Ізометричними проекціями кіл, розміщених у площинах проекцій або в паралельних їм площинах, є еліпси з однаковими співвідношеннями осей (рис. 71, а). Великі осі еліпсів дорівнюють 1,22d, а малі – 0,71d, де d – діаметр зображуваного кола. Напрямок осей еліпсів залежить від положення кола і визначається за правилом:

Правило

У прямокутній аксонометрії велика вісь еліпса завжди перпендикулярна до тієї аксонометричної осі, якої немає в площині, а мала збігається з напрямом цієї осі, або паралельна до неї.

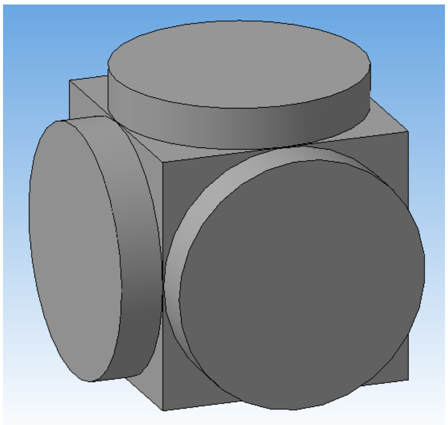
На практиці прийнято заміняти еліпси в ізометрії овалами, що значно спрощує побудову. На рис. 71, б показано визначення великої і малої осі еліпса графічно.



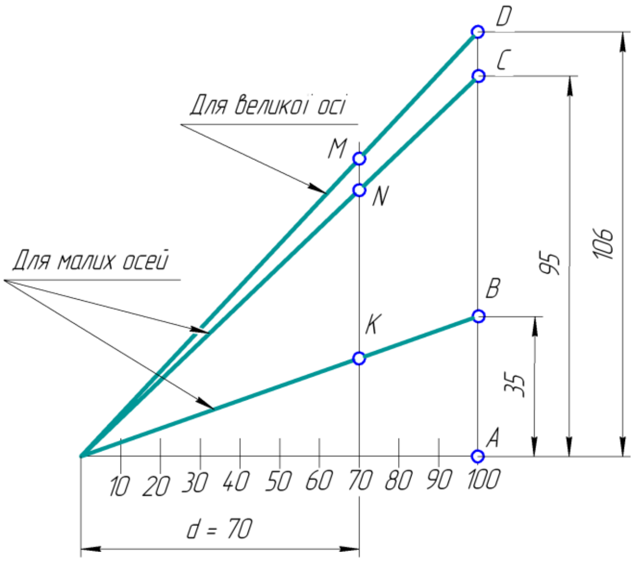
а б

Рис. 71. Прямокутна ізометрична проекція кола

На рис. 72, а зображено кола в прямокутній диметричній проекції, які проекціюють у вигляді еліпсів, малі осі яких, як і в ізометрії, паралельні осям, яких немає у площинах даних кіл.



а



б

Рис. 72. Прямокутна диметрична проекція кола

Довжина великої осі для всіх еліпсів однакова і дорівнює 1,06d, де d – діаметр зображуваного кола. Але довжина малої осі різна: для еліпса, що лежить або паралельний фронтальній площині проекцій вона становить – 0,95d, а для еліпсів, що лежать або паралельні до горизонтальної і профільної площин проекцій – 0,35d (рис. 72, а). На рис. 72, б показано визначення розмірів великої і малої осі еліпса за допомого графіка.

Лінії штрихування і перерізів в аксонометричних проекціях наносять паралельно одній з діагоналей аксонометричних проекцій квадратів, які лежать у відповідних координатних площинах і сторони, яких паралельні аксонометричним осям (рис. 73).

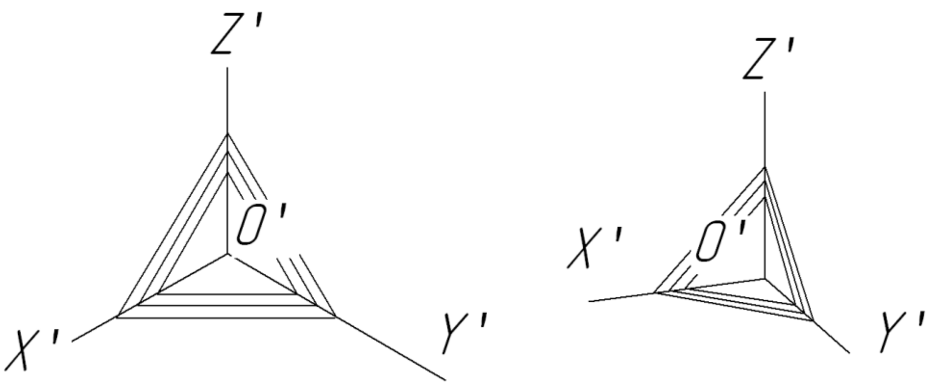


Рис. 73. Нанесення штрихування в аксонометричних проекціях у розтинах