2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Реальні системи при теоретичних дослідженнях подають у вигляді моделей, які мають деякий формальний опис, найчастіше математичний.

Математична модель системи – це опис процесів, що проходять в системі, мовою математики. Математичний опис може бути аналітичним (за допомогою рівнянь), графічним (за допомогою графіків, структурних схем та графів) і табличним (за допомогою таблиць).

Для отримання рівнянь САК на основі фізичних законів складають математичний опис окремих її елементів. Сукупність всіх рівнянь елементів і дає рівняння системи.

Математична модель однієї і тієї ж системи в залежності від мети дослідження може бути різною. Інколи корисно при розв'язанні задачі на різних етапах приймати різну математичну модель: почати дослідження з найпростішої моделі, а потім її поступово ускладнювати, щоб врахувати додаткові явища та зв'язки, які на початковому етапі розгляду були відкинуті як несуттєві. Загалом, до математичної моделі пред'являють суперечливі вимоги: з одного боку, вона повинна якомога повніше відображати властивості реальної системи керування, а з іншого боку, бути за можливістю простою, щоб не ускладнювати дослідження.

Правомірність вибору моделі підтверджується адекватною реакцією реальної системи і моделі на впливи однакового виду.

2.1. Диференціальні рівняння

Розглянемо математичний опис неперервних САК за допомогою диференціальних рівнянь.

Припустимо, що ланка, зображена на рис. 2.1, *а*, описується нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку:

$$F\left(y, \dot{y}, \ddot{y}; x, \dot{x}; f, \dot{f}\right) = 0, \tag{2.1}$$

де y – вихідна координата; x та f – керуюча дія та збурення; $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{f}$ – похідні за часом від відповідних змінних.

Рівняння (2.1), що описує процеси, які протікають в ланці, при довільних вхідних діях та початкових умовах, називають рівнянням динаміки. Нехай при постійних вхідних діях $x = x_0 = const$, $f = f_0 = const$ процес в системі з плином часу встановиться, вихідна координата набуде деякого постійного значення $y = y_0 = const$. В цьому режимі рівняння (2.1) набуде вигляду:

$$F(y_0, 0, 0; x_0, 0; f_0, 0) = 0 . \qquad (2.2)$$

Рівняння (2.2) описує статичний або усталений режим, і його називають рівнянням статики.

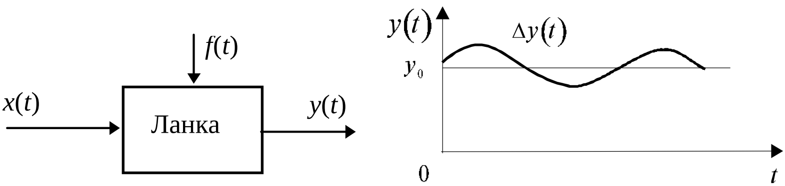
Статичний режим можна описати графічно за допомогою статичних характеристик, які отримують або шляхом розрахунків, використовуючи рівняння статики, або експериментально, подаючи на вхід елемента послідовність постійних вхідних дій та вимірюючи вихідну координату після закінчення перехідного процесу.

Якщо ланка має декілька входів, то вона описується за допомогою сімейства статичних характеристик. Наприклад, ланка, що описується в статиці рівнянням (2.2), графічно характеризується сімейством статичних характеристик, що відображають залежність вихідної координати y від вхідної дії x (або f) при різних фіксованих значеннях іншої дії f (або x).

Звичайно САК описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Але в багатьох випадках їх можна лінеаризувати, тобто при деяких припущеннях замінити початкові нелінійні рівняння виду (2.1) лінійними рівняннями, які наближено описують процеси в системі. Перетворення нелінійних рівнянь в лінійні називається лінеаризацією.

Лінеаризація нелінійного диференціального рівняння базується на припущенні про достатню малість відхилень всіх змінних (фізичних величин) ланки від їх усталених значень. Якщо, наприклад, вихідна координата $y(t)$ ланки на рис. 2.1, *а* в статичному режимі при вхідних діях $x = x_0 = const$, $f = f_0 = const$ характеризується значенням $y = y_0 = const$, то в динамічному режимі через різні невраховані збурюючі фактори

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t),$$
$$f(t) = f_0 + \Delta f(t),$$
тому вихідна координата набуває вигляду (рис. 2.1, б)
$$y(t) = y_0 + \Delta y(t),$$
де $\Delta x(t)$, $\Delta f(t)$, $\Delta y(t)$ – відхилення реальних значень змінних від їх розрахункових усталених значень.



а *б*

Рис. 2.1. До лінеаризації диференціального рівняння ланки:
а – вхідні та вихідні сигнали ланки;
б – зміна вихідного сигналу ланки $y(t)$

Припущення щодо достатню малість відхилень змінних звичайно виконується, оскільки замкнута САК прагне зменшити будь-які відхилення змінних від потрібних значень.

Розкладемо нелінійну функцію F (2.1) в ряд Тейлора в точці з координатами $(y_0,\ 0,\ 0;\ x_0,\ 0;\ f_0,\ 0)$, тобто відносно вибраного усталеного статичного стану ланки:

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}; x, \dot{x}; f, \dot{f}) = F(y_0, 0, 0; x_0, 0; f_0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \Delta \ddot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)_0 \Delta f +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)_0 \Delta \dot{f} + (\textit{члени розкладу вищого порядку}$$
$$\textit{малості}) = 0, \qquad (2.3)$$
де індекс "0" при частинних похідних означає, що після взяття похідної в її вираз підставляються усталені значення параметрів:

$$y = y_0;\ \dot{y} = \ddot{y} = 0;\ x = x_0;$$

$$\dot{x} = 0;\ f = f_0;\ \dot{f} = 0.$$

До складу членів розкладу вищого порядку малості входять добутки вищих частинних похідних на квадрати, куби та більш високі степені відхилень, а також на добутки відхилень.

Введемо позначення:

$$T_2^2 = \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0},\ T_1 = \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0},\ k_1 = \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0},$$

$$k_2 = \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0},\ k_3 = \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial f}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0},\ k_4 = \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0}.$$

Відкидаючи в (2.3) доданки вищого порядку малості, з врахуванням (2.2) та введених позначень дістанемо:

$$\begin{aligned} T_2^2 \frac{d^2\Delta y}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta y}{dt} + \Delta y = k_1 \Delta x + \\ + k_2 \frac{d\Delta x}{dt} + k_3 \Delta f + k_4 \frac{d\Delta f}{dt}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Вираз (2.4) називається лінійним диференціальним рівнянням ланки у відхиленнях. Відмітимо основні особливості такого рівняння:

– воно є наближеним, оскільки при виведенні були відкинуті доданки вищого порядку малості;

– це рівняння описує динамічний процес, який протікає у ланці, не у всій області зміни змінних, а лише в малому околі усталеного статичного стану;

– воно є лінійним лише відносно відхилень змінних.

В ТАК прийнято диференційні рівняння записувати так, щоб вихідна координата (шукана функція) та її похідні знаходилися у лівій частині рівняння, а всі інші змінні (вхідні дії) та їх похідні – у правій. Крім того, коефіцієнт біля вихідної координати звичайно дорівнює одиниці – це дозволяє відразу визначити фізичну природу та розмірність вихідної координати.

Якщо ввести символ диференціювання:

$$p = \frac{d}{dt},$$

тоді

$$p^2 = \frac{d^2}{dt^2},$$

і рівняння (2.4) зводиться до символічної (стандартної) форми:

$$\left(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1\right)\Delta y = k_1\left(1 + \tau_1 p\right)\Delta x + k_3\left(1 + \tau_2 p\right)\Delta f \;, \qquad (2.5)$$

де $\tau_1 = \frac{k_2}{k_1}$, $\tau_1 = \frac{k_4}{k_3}$.

Коефіцієнти T_1, T_2 називаються сталими часу ланки (мають розмірність секунд), k_1, k_2 – коефіцієнтами передачі ланки. Коефіцієнти τ_1, τ_2 також мають розмірність секунд і характеризують ступінь дії на ланку швидкостей зміни вхідної величини $x(t)$ та збурення $f(t)$.

В усталеному статичному режимі всі похідні дорівнюють нулю, тому, підставляючи в рівняння (2.5) $p = 0$, отримаємо рівняння статичного режиму (лінеаризовану статичну характеристику) ланки:

$$\Delta y = k_1 \Delta x + k_2 \Delta f \;. \qquad (2.6)$$

На рис. 2.2 побудовано сімейство характеристик $y = F(x)$ при $f = \text{const}$.

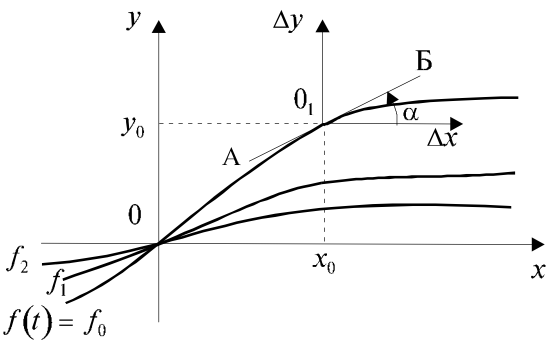


Рис. 2.2. Лінеаризація статичної характеристики ланки

Неважко встановити, що коефіцієнт k_1 дорівнює тангенсу кута нахилу α дотичної АБ до кривої $y = F(x)$ при $f = f_0$ в точці $0_1(x_0, y_0)$, або

$$k_1 = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = m\,tg\alpha\,, \tag{2.7}$$

де m – масштабний коефіцієнт.

Таким чином, геометрично лінеаризація нелінійної залежності між двома змінними (рис. 2.2) означає заміну початкової кривої відрізком її дотичної АБ в точці 0_1, яка відповідає заданому режимові, та паралельне перенесення початку координат в цю точку.

Ланки та системи, які описуються лінійними рівняннями, називаються відповідно лінійними ланками та лінійними системами.

В залежності від того, входить чи ні час у явному вигляді в рівняння, ланки та системи поділяють на стаціонарні та нестаціонарні.

<u>Стаціонарними лінійними системами</u> (ланками) називають системи (ланки), які описуються лінійними рівняннями з постійними коефіцієнтами; <u>нестаціонарними лінійними системами</u> (ланками) або <u>системами зі змінними параметрами</u> – системи (ланки), які описуються лінійними рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

2.2. Передатні функції

Зручність використаного у попередньому параграфі запису диференціального рівняння в символічній формі (2.5) полягає в тому, що на символ (оператор) диференціювання

$$p = \frac{d}{dt}$$

розповсюджуються деякі правила алгебри.

Поділивши вираз (2.5) на тричлен від p лівої частини, дістанемо нову форму запису диференціального рівняння ланки відносно вихідної (шуканої) координати:

$$y(t)=\frac{k_1(1+\tau_1 p)}{T_2^2p^2+T_1p+1}x(t)+\frac{k_3(1+\tau_2 p)}{T_2^2p^2+T_1p+1}f(t). \qquad (2.8)$$

Тут і далі знак Δ біля змінних y, x, f для зручності виключено. Однак належить пам'ятати, що рівняння (2.8) справедливо для малих відхилень.

Вирази:

$$W_1(p)=\frac{k_1(1+\tau_1 p)}{T_2^2p^2+T_1p+1},$$
$$W_2(p)=\frac{k_3(1+\tau_2 p)}{T_2^2p^2+T_1p+1} \qquad (2.9)$$

називаються передатними функціями ланки в операторній (символічній) формі за вхідною дією $W_1(p)$ та за збуренням $W_2(p)$.

За допомогою передатних функцій отримується проста форма запису диференційного рівняння:

$$y(t)=W_1(p)x(t)+W_2(p)f(t). \qquad (2.10)$$

Передатні функції характеризують властивості передачі сигналу ланкою з входу на вихід в динамічному режимі ($p\neq 0$). В статичному режимі, коли $p=0$, $W_1(0)=k_1$, $W_2(0)=k_2$, рівняння (2.10) набуває вигляду (2.6), тобто вигляд рівняння статичного режиму.

Поряд з передаточними функціями в операторній формі при дослідженні САК широко використовують передаточні функції у формі зображень Лапласа.

<u>Передатною функцією</u> ланки (системи) називають відношення зображення за Лапласом вихідної змінної до зображення за Лапласом вхідної змінної при нульових початкових умовах. Якщо ланка (система) має декілька входів, то при визначенні передатної функції відносно будь-якої однієї вхідної дії решта вхідних дій вважаються рівними нулю.

Розглянемо перетворення Лапласа та його основні властивості.

Перетворенням Лапласа називають відношення

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt,$$

яке ставить функції $x(t)$ дійсної змінної t у відповідність функцію $X(s)$ комплексної змінної $s = \sigma + j\omega$.

При цьому $x(t)$ називається оригіналом, а $X(s)$ – зображенням за Лапласом. Зв'язок між $X(s)$ та $x(t)$ формально може бути записаний у вигляді:

$$X(s) = L[x(t)],$$

де L – оператор перетворення Лапласа.

Перетворення Лапласа може застосовуватись, якщо функція має властивості:

$x(t)$ визначена та кусково-диференційована на усій додатній напівосі [0, ∞];

$x(t) = 0$ при $t < 0$;

існують такі додатні числа M та C, що $|x(t)| \le Me^{Ct}$ при $0 \le t < \infty$.

Співвідношення

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} x(s)\ e^{st} ds,$$

що визначає за відомим зображенням його оригінал, називається оберненим перетворенням Лапласа, що символічно записується так:

$$x(t) = L^{-1}[X(s)],$$

де L^{-1} – оператор оберненого перетворення Лапласа.

Зупинимося на основних властивостях перетворення Лапласа.

1. Властивість лінійності.

Для будь-яких постійних a та b

$$L[ax_1(t) + bx_2(t)] = aL[x_1(t)] + bL[x_2(t)] = aX_1(s) + bX_2(s).$$

2. Диференціювання оригіналу.

$$L\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0),$$

$$L\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0),$$

$$L\left[\frac{d^nx}{dt^n}\right] = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0),$$

де $X(s) = L[x(t)]$; $x(0), \dot{x}(0), \ldots, x^{(n-1)}(0)$ – значення координати $x(t)$ та її похідних при $t = +0$. Якщо початкові умови нульові, тобто $x(0) = \dot{x}(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$, то останній вираз набуває вигляду:

$$L\left[\frac{d^n x}{dt^n}\right] = s^n X(s).$$

Таким чином, за нульових початкових умов диференціювання оригіналу відповідає операції множення зображення на *s*.

3. Інтегрування оригіналу.

Інтегрування оригіналу зводиться до операції ділення зображення на s:

$$L\left[\int_0^t x(t)dt\right] = \frac{X(s)}{s}.$$

4. Теорема про граничні значення.

Якщо $x(t)$ – оригінал, а $X(s)$ – його зображення, то

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s);$$

за умови існування границі $x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t)$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s).$$

5. Теорема запізнення.

Для будь-якого додатного числа τ

$$L[x(t-\tau)] = e^{-s\tau}L[x(t)] = e^{-s\tau}X(s).$$

6. Теорема згортки (теорема множення зображень).

Якщо $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – оригінали, а $X_1(s)$ та $X_2(s)$ – їх зображення, то

$$L\left[\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)dt\right] = L\left[\int_0^t x_2(\tau)x_1(t-\tau)dt\right] = X_1(s)\cdot X_2(s).$$

7. Теорема розкладу.

Якщо функція $X(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$ – дробово-раціональна, причому степінь полінома чисельника менший за степінь полінома знаменника, то її оригіналом є помножена на $1(t)$ функція

$$x(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s\to s_k} \frac{d^{n_k - 1}}{ds^{n_k - 1}}\left[X(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st}\right], \quad (2.11)$$

де s_k – корені рівняння $B(s) = 0$; n_k – кратності коренів; l – число різних коренів.

Якщо всі корені знаменника зображення $X(s)$ прості і відсутні нульові корні, то формула розкладу набуває вигляду:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t} ,$$

де n – степінь полінома $B(s)$;

$$B'(s_k) = \left.\frac{dB}{ds}\right|_{s=s_k} .$$

Якщо знаменник зображення Лапласа $X(s)$ має один нульовий корінь $(s_0 = 0)$, то зображення потрібно представити у вигляді $X(s) = \frac{A(s)}{sB_1(s)}$. Тоді оригінал може бути знайдений за формулою:

$$x(t) = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A(s_k)}{s_k B_1'(s_k)} e^{s_k t} ,$$

де $B_1'(s_k) = \left.\frac{dB_1(s)}{ds}\right|_{s=s_k}$.

2.3. Рівняння та передатні функції типових динамічних ланок

В загальному випадку передаточна функція САК може бути подана у вигляді відношення двох поліномів:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} , \qquad (2.12)$$

причому, якщо порядок полінома чисельника m, а порядок полінома знаменника n, то умовою можливості фізичної реалізації системи є співвідношення

$$n \geq m .$$

З алгебри відомо, що поліном довільного порядку можна розкласти на прості множники, тому передтну функцію (2.12) можна представити у вигляді добутку простих множників виду

$$ks , \; (d_1 s + d_2), \; (d_1 s^2 + d_2 s + d_3), \qquad (2.13)$$

та простих дробів виду

$$\frac{k}{s},\ \frac{k}{d_1 s + d_2},\ \frac{k}{d_1 s^2 + d_2 s + d_3}. \tag{2.14}$$

Ланки, передаточні функції яких мають вигляд простих множників (2.13) або простих дробів (2.14), називають типовими або елементарними ланками.

У табл. 2.1 наведені рівняння та передатні функції типових динамічних ланок.

Звернемося до передаточної функції (2.14). Корені рівняння $B(s) = 0$ називаються нулями передатної функції $W(s)$, тобто такі значення s, за яких передатна функція перетворюється в нуль. Корені рівняння $A(s) = 0$ називаються полюсами передатної функції $W(s)$, тобто такі значення s, за яких передатна функція перетворюється у нескінченність.

Ланку називають мінімально-фазовою, якщо всі нулі та полюси її передатної функції мають від'ємні або рівні нулю дійсні частини.

Всі наведені в табл. 2.1 елементарні ланки відносяться до мінімально-фазових.

Ланку називають немінімально-фазовою, якщо хоча б один нуль або полюс її передатної функції має додатну дійсну частину.

Прикладами немінімально-фазових ланок є ланки з передатними функціями:

$$W(s) = \frac{k}{Ts - 1};$$

$$W(s) = k(Ts - 1);$$

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 - 2\xi Ts + 1};$$

$$W(s) = k\left(T^2 s^2 + 2\xi Ts - 1\right)$$

та інші.

Таблиця 2.1

Рівняння та передатні функції типових ланок

Назва ланки	Рівняння	Передаточна функція $W(s)$
Пропорційна (підсилююча)	$y(t) = kx(t)$	k
Інтегруюча	$y(t) = k\int_0^t x(t)dt$	$\frac{k}{s}$
Диференціююча	$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}$	ks
Аперіодична (інерційна)	$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{1+sT}$
Форсуюча 1-го порядку	$y(t) = k\left[T\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right]$	$k(1+sT)$
Коливальна	$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$, $0 < \xi < 1$	$\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$
Консервативна	$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{T^2s^2+1}$
Інерційна 2-го порядку	$T_1T_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (T_1+T_2)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$
Форсуюча 2-го порядку	$y(t) = k\left[T^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi T\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right]$	$k(T^2s^2+2\xi Ts+1)$
Чистого запізнювання	$y(t-\tau) = x(t)$	$e^{-s\tau}$

2.4. Структурні схеми

Структурні схеми широко використовують на практиці при проектуванні та дослідженні систем автоматичного керування, оскільки вони дають наочну уяву про зв'язки між ланками, про проходження та перетворення сигналів в системі.

Структурною схемою називають графічне зображення математичної моделі САК у вигляді з'єднання ланок. Ланку на структурній схемі умовно зображають у вигляді прямокутника, всередині якого записується вираз передатної функції ланки із зазначенням вхідних та вихідних координат (сигналів) (рис. 2.3, *а*). Вхідні та вихідні сигнали записуються у вигляді оригіналів або у вигляді зображень.

Елементи порівняння (рис. 2.3, *б*) та підсумовуючі елементи (рис. 2.3, *в*) зображуються у вигляді круга, поділеного на сектори. В елементі порівняння, сектор, на який подається від'ємний сигнал, затемняють або перед відповідним входом ставлять знак мінус.

Структурну схему складають на основі рівнянь, що описують динаміку системи. Ланка на структурній схемі не обов'язково відображає модель якого-небудь конкретного елемента. Вона може бути моделлю елемента, з'єднання елементів або взагалі будь-якої частини системи.

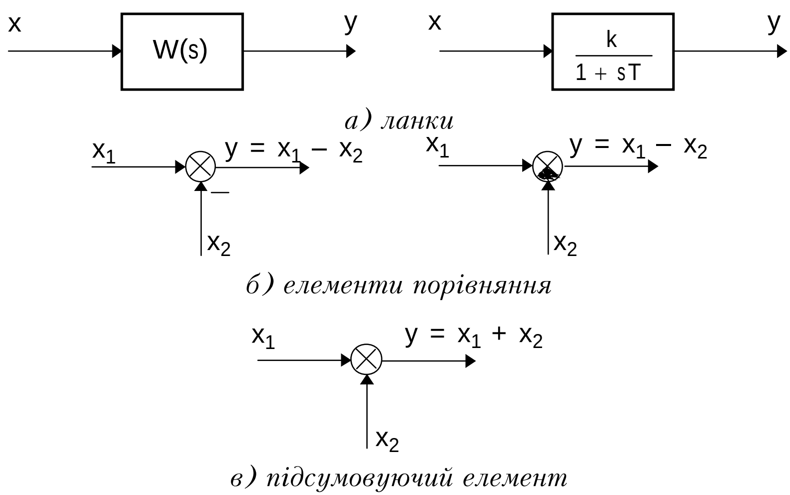


Рис. 2.3. Ланки структурної схеми

Існують три основних типи з'єднання ланок: послідовне, паралельне, із зворотним зв'язком.

При послідовному з'єднанні вихідна величина попередньої ланки подається на вхід наступної (рис. 2.4). Знайдемо передатну функцію n послідовно з'єднаних ланок:

$$W(s) = \frac{X_n(s)}{X_0(s)} = \frac{X_1(s)}{X_0(s)} \cdot \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \cdot \frac{X_3(s)}{X_2(s)} \cdot \ \dots \cdot \frac{X_n(s)}{X_{n-1}(s)} =$$
$$= W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s) \cdot \ldots \cdot W_n(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s) . \qquad (2.15)$$

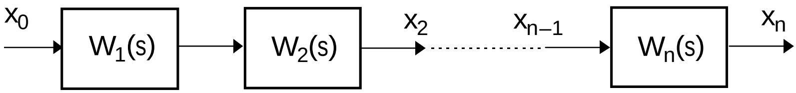


Рис. 2.4. Послідовне з'єднання ланок

При паралельному з'єднанні вхідна величина всіх ланок загальна, а вихідні координати підсумовуються (рис. 2.5). Передатна функція n паралельно з'єднаних ланок:

$$W(s) = \frac{X_\Sigma(s)}{X_0(s)} = \frac{X_1(s) + X_2(s) + \ldots + X_n(s)}{X_0(s)} =$$
$$= W_1(s) + W_2(s) + W_3(s) + \ldots + W_n(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s) . \qquad (2.16)$$

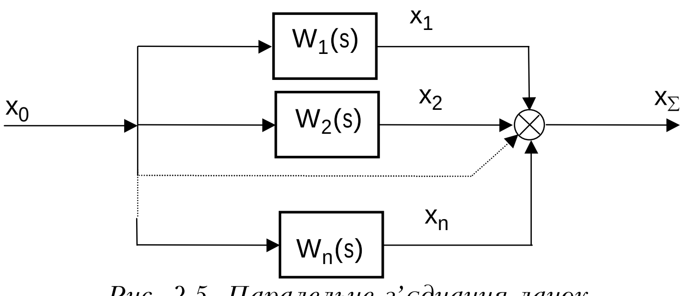


Рис. 2.5. Паралельне з'єднання ланок

З'єднання із зворотним зв'язком показано на рис. 2.6. Передатну функцію $W_1(s)$ називають передатною функцією прямого ланцюга, а передатну функцію $W_2(s)$ – зворотного ланцюга або зворотного зв'язку. Якщо $x = x_0 + x_2$, зворотний зв'язок називається додатним, а якщо $x = x_0 - x_2$ – від'ємним.

Знайдемо передатну функцію з'єднання ланок із зворотним зв'язком:

$$\Phi(s) = \frac{X_1(s)}{X_0(s)} = \frac{W_1(s)X(s)}{X_0(s)} = \frac{W_1(s)[X_0(s) \pm X_2(s)]}{X_0(s)} =$$

$$= W_1(s) \pm W_1(s)W_2(s)\frac{X_1(s)}{X_0(s)} = W_1(s)[1 \pm W_2(s)\Phi(s)].$$

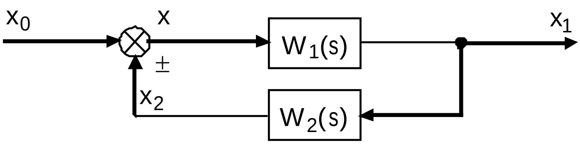


Рис. 2.6. З'єднання ланок із зворотним зв'язком

Після незначних перетворень отримаємо передатну функцію з'єднання ланок із зворотним зв'язком:

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)}, \tag{2.17}$$

яка дорівнює передатній функції прямого ланцюга, поділеній на різницю або суму одиниці з добутком передатних функцій прямого та зворотного ланцюгів, причому знак мінус у (2.17) відповідає додатному зворотному зв'язку, а знак плюс – від'ємному.

Належить відмітити, що отримані співвідношення (2.15)–(2.17) є справедливими лише для з'єднання детектуючих (або однонаправлених) ланок. Детектуючі ланки або їх з'єднання не впливають одне на одного, а їх початкові моделі (диференційні рівняння та передатні функції) при з'єднанні залишаються незмінними.

Розглянемо структурну схему САК із одиничним від'ємним зворотним зв'язком на рис. 2.7, де g – керуюча дія; f – збурення; y – керована координата; $x = g - y$ – похибка.

Якщо припустити, що $f(t) = 0$, то за нульових початкових умов знаходимо

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \tag{2.18}$$

де $W(s)$ – <u>передатна функція розімкнутої системи</u>, яка характеризує динамічні властивості передачі сигналу з основного входу на вихід системи при розірваному зворотному зв’язку.

Якщо припустити, що $g(t) = 0$, та розірвати ланцюг зворотного зв'язку, то

$$W_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}, \tag{2.19}$$

де $W_f(s)$ – <u>передатна функція розімкнутої системи за збуренням</u>, яка характеризує динамічні властивості передачі збурення на вихід системи при розірваному зворотному зв’язку.

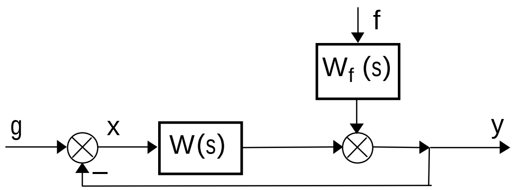


Рис. 2.7. Структурна схеми САК з від’ємним зворотним зв’язком

<u>Основною передатною функцією САК</u> або <u>передатною функцією замкнутої системи</u>, або <u>головним оператором</u> $\Phi(s)$ називається відношення зображень за Лапласом керованої координати до керівної дії за нульових початкових умов і при збуренні $f(t) = 0$,

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)}. \tag{2.20}$$

Передатна функція $\Phi(s)$ визначає динамічні властивості САК при проходженні основного, задаючого сигналу $g(t)$.

<u>Передатною функцією системи за збуренням</u> $\Phi_f(s)$ називається відношення зображень за Лапласом керованої координати до збурення за нульових початкових умов та при керуючій дії $g(t) = 0$:

$$\Phi_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{W_f(s)}{1 + W(s)}. \tag{2.21}$$

Передатна функція $\Phi_f(s)$ характеризує вплив збурень на керовану координату в статичному та динамічному режимах роботи САК.

Передатною функцією системи відносно похибки за задаючою дією або просто передатною функцією системи за похибкою $\Phi_x(s)$ називається відношення зображень за Лапласом похибки до керівної дії за нульових початкових умов та при збуренні $f(t) = 0$:

$$\Phi_x(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W(s)}. \tag{2.22}$$

Зв'язок між передатною функцією системи за похибкою та головним оператором можна встановити із виразу (2.20) за допомогою підстановки $Y(s) = G(s) - X(s)$, в результаті якої одержимо:

$$\Phi_x(s) = 1 - \Phi(s). \tag{2.23}$$

Передатна функція $\Phi_x(s)$ характеризує похибку САК при обробці задаючої дії в статичному та динамічному режимах.

В загальному випадку передаточна функція розімкнутої системи (2.18) може бути подана у вигляді відношення двох поліномів:

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \ldots + c_{n-1} s + c_n} = \frac{B(s)}{C(s)}. \tag{2.24}$$

Многочлен $C(s)$ називається характеристичним поліномом, а рівняння $C(s) = 0$ − характеристичним рівнянням розімкнутої системи.

Якщо вільний член полінома $C(s)$ $c_n \neq 0$, то система називається статичною.

Якщо передатна функція системи (2.24) може бути представлена у вигляді:

$$W(s) = \frac{B(s)}{s^r C_r(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{s^r \left(c_0 s^{n-r} + c_1 s^{n-r-1} + \ldots + c_{n-r-1} s + c_{n-r}\right)}, \tag{2.25}$$

то система називається астатичною з астатизмом r -го порядку. Це відповідає включенню в прямий ланцюг системи r інтегруючих ланок.

Знаючи передатну функцію (2.24), можна знайти головний оператор системи (2.20):

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{C(s) + B(s)} = \frac{B(s)}{D(s)}, \tag{2.26}$$

де

$$D(s) = C(s) + B(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n .$$

Многочлен $D(s)$ називається характеристичним поліномом, а рівняння

$$D(s) = 0$$

або

$$1 + W(s) = 0 \; - \tag{2.27}$$

характеристичним рівнянням замкнутої системи.

Характеристичні поліноми розімкнутої системи $C(s)$ та замкнутої системи $D(s)$ мають однаковий степінь.

Ознакою можливості фізичної реалізації системи є виконання умови

$$n \geq m . \tag{2.28}$$

де m – показник степеня поліному чисельника передаточної функції розімкнутої системи; n – показник степеня поліному знаменника передаточної функції розімкнутої (замкнутої) системи.

2.5. Контрольні запитання

1. Що таке “математична модель системи автоматичного керування”?
2. Назвіть основні види математичних моделей САК.
3. В чому різниця рівнянь динаміки та рівнянь статики системи?
4. Як отримуються з вихідних нелінійних диференційних рівнянь системи лінійні диференційні рівняння в відхиленнях?
5. Що таке “передатна функція ланки”?

6. Назвіть основні властивості перетворення Лапласа.
7. Які типові динамічні ланки ви знаєте? Приведіть їх диференційні рівняння та передаточні функції.
8. Що таке “структурна схема САК”?
9. Назвіть типові схеми з’єднання ланок системи і приведіть передатні функції таких з’єднань.
10. Які основні типи передатних функцій замкнутої системи ви знаєте? Наведіть функціональні зв’язки між основними передатними функціями.