

Н. П. Каргополова, А. Г. Ткачук

Електротехніка та електромеханіка. Ч. 1
«Електротехніка»

Рекомендовано вченою радою ЖДТУ як навчальний посібник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

24.09.2018р.

2018

УДК 621.3 (07)

К21

Каргополова Н.П., Ткачук А.Г. Електротехніка та електромеханіка. Ч. 1 «Електротехніка». Навчальний посібник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». – Житомир: ЖДТУ, 2018. – 333 с.

Рецензенти: доктор технічних наук, професор О.М. Безвесільна (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»), д. ф.-м. н., професор П.П. Москвін (ЖДТУ), д. т. н., професор В.А. Кирилович (ЖДТУ), д. т. н., доцент Фриз С.П. (ЖВІ ім. С.П. Корольова)

© Н.П. Каргополова, А.Г. Ткачук, 2018

Передмова

Навчальна дисципліна "Електротехніка та електромеханіка" належить до нормативної частини циклу професійної підготовки навчального плану для студентів спеціальності 151 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології".

Перша частина дисципліни "Електротехніка" вивчається студентами протягом семестру і її змістом є, по суті, теорія електричних та магнітних кіл. Передбачається, що студенти знайомі з основними поняттями теорії електромагнітного поля, які розглядаються у курсі фізики. Вважається також, що читачеві відомі основи алгебри комплексних чисел, тригонометричні та степеневі ряди, інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа, методи розв'язку диференціальних рівнянь, стандартні математичні пакети для обчислень.

Посібник написаний на основі багаторічного викладання курсу у Житомирському державному технологічному університеті. Усі теми проілюстровані великою кількістю прикладів, що сприяє глибшому засвоєнню матеріалу. Крім того, у кінці кожного розділу приводяться задачі для самостійного розв'язку та запитання для поточного контролю. Це полегшить читачеві підготовку до модульного контролю та підсумкового контролю вивчення дисципліни.

Автори глибоко вдячні рецензентам: д.т.н., проф. Безвесільній О.М., д.ф.-м.н., проф. Москвіну П.П. та д.т.н., доц. Фризу С.П. за поради та рекомендації, які сприяли покращенню змісту книги.

Список основных условных позначень електричних величин і одиниць їх вимірювання

$e(t)$, E , E_m – миттєве, діюче і амплітудне значення ЕРС джерела напруги [В];
 $i(t)$, I , I_m – миттєве, діюче і амплітудне значення струму незалежного джерела струму [А];

\dot{E} , \dot{U} , \dot{I} – комплексні діючі значення ЕРС, напруги [В] та струму [А];

EPC – електрорушійна сила [В];

R – активний опір [Ом];

L – індуктивність [Гн];

C – ємність [Ф];

X – реактивний опір [Ом];

Z – комплексний опір [Ом];

z – модуль комплексного опору [Ом];

Y – комплексна провідність [См];

y – модуль комплексної провідності [См];

P – активна потужність [Вт];

Q – реактивна потужність [Вар];

S – повна потужність [В·А];

\tilde{S} – комплексна потужність [В·А];

W – енергія [Дж];

f – циклічна частота [Гц];

ω – кутова частота [рад/с];

ψ – початкова фаза гармонічного коливання [рад];

t – час [с];

T – період [с];

Q – добротність;

Z_C – характеристичний опір, хвильовий опір [Ом];

Одиниці електричних величин

| | | |
|-------------------------|----------------------------|---------------------------|
| А – ампер (сила струму) | Гн – генрі (індуктивність) | Кл – кулон (заряд) |
| В – вольт (напруга) | Дж – джоуль (енергія) | Гц – герц (частота) |
| Ом – ом (опір) | Ф – фарада (ємність) | См – сименс (провідність) |
| Вт – ват (потужність) | с – секунда (час) | |

Префікси для позначення частки та кратності

| | | | |
|-------------------------|--------------------------|---------------------|---------------------|
| п – піко (10^{-12}) | мк – мікро (10^{-6}) | к – кіло (10^3) | Г – гіга (10^9) |
| н – нано (10^{-9}) | м – мілі (10^{-3}) | М – мега (10^6) | |

Вступ

На сучасному етапі розвитку суспільства практично неможливо знайти таку сторону життя людини, де можна було б обійтися без використання електричної енергії.

Науку про використання електричної енергії для практичних цілей та галузь техніки, що здійснює впровадження електричної енергії у всіх сферах діяльності людини, називають електротехнікою. Започаткувавшись у надрах фізики, як певною мірою пізнавальна та світоглядна, наука про електричні та магнітні явища породила могутні галузі техніки, які устократ збільшили мускульні та інтелектуальні можливості людини: енергетику та електромеханіку, радіотехніку та зв'язок, електроніку та обчислювальну техніку.

Перші відомості про електрику та магнетизм дійшли до нас з VI ст. до н.е. Саме тоді Талес відкрив здатність потертого бурштину притягувати до себе легкі предмети, а магніту – притягувати залізні речі. Від грецького "électron" (бурштин) і виникла назва "електрика". Тільки більш ніж два тисячоліття по тому (1600 р.) вийшов у світ трактат У. Гільберта "Про магнітні явища, магнітні тіла та про велике магнітне поле Землі", у якому закладені основи електро- та магнітостатики.

Протягом наступних двох століть наука про електрику неухильно розвивалася, залишаючись одним із розділів фізики:

1660 р. – сконструйована основана на терті електрична машина (О. Геріке);

1706 р. – початок досліджень розрядів у газах (Ф. Гаусбі);

1729 р. – відкрито явище електропровідності (С. Грей);

1745 – 1746 рр. – винайдений перший електричний конденсатор – лейденська банка (Е. Клейст, П. Мушенбрук);

1747 – 1753 рр. дослідження атмосферної електрики, доказ електричної природи блискавки (Б. Франклін, М.В. Ломоносов, Г. Ріхман);

1759 р. – розробка першої математичної теорії електричних та магнітних явищ (Ф. Епінус);

1785 р. – відкриття основного закону електричної взаємодії – закону Кулона (Ш. Кулон);

1799 р. – створення Вольта першого джерела електричного струму – електричної батареї ("вольтів стовп");

1802 р. – відкриття В.В. Петровим електричної дуги та можливостей її практичного застосування.

Перша половина XIX ст. характеризується цілим рядом відкриттів, які заклали теоретичне підґрунтя для широкого практичного використання електричних явищ. Найголовніші з них:

1820 р. – відкриття Х. Ерстедом магнітної дії струму; А. Ампер встановив правило, що визначає залежність між струмом та напрямом магнітного поля, створеного цим струмом;

1821 р. – М. Фарадей одержав обертання провідника зі струмом у магнітному колі (модель електродвигуна);

1823 р. – побудована модель електромотора (П. Барлоу), опублікована праця А. Ампера "Теорія електродинамічних явищ, виведена виключно із досліду";

1827 р. – Г. Ом відкрив закон, названий його іменем (Закон Ома) та ввів поняття електрорушійної сили, опору, електропровідності та сили струму;

1831 р. – відкриття М. Фарадеєм явища електромагнітної індукції;

1832 р. – побудова генератора змінного струму (І. Піксі); створення абсолютної системи електричних і магнітних одиниць (В. Вебер, К. Гаусс); відкриття Дж. Генрі явища самоіндукції;

1833 р. – Е.Х. Ленц сформулював правило для визначення напрямку електрорушійної сили індукції;

1834 р. – Б.С. Якобі винайшов електродвигун з робочим валом;

1841 р. – Дж. Джоуль установив закон теплової дії струму (у 1842 р. його також відкрив Е.Х. Ленц, звідки і назва – закон Джоуля-Ленца);

1845 р. відкриття закономірностей в розподілі електричного струму у розгалуженому колі (Г. Кірхгоф);

1860 – 1865 рр. – створення Дж. Максвеллом теорії електромагнітного поля та постулату про існування електромагнітних хвиль;

1888 р. Г. Герц дослідним шляхом виявив електромагнітні хвилі;

Нарешті, останні десятиліття ХІХ ст. ознаменувалися появою великої кількості робіт, що поклали початок практичній електротехніці:

1876 – 1878 рр. – винайдення П.М. Яблочковим першого практично значимого джерела електричного освітлення та першого трансформатора;

1888 – 1891 рр. – створення М.О. Доливо-Добровольським генератора трифазного струму, трифазного асинхронного двигуна, трифазного трансформатора, здійснення електропередачі трифазного струму.

Застосування змінного струму вимагало розв'язання багатьох теоретичних питань, що обумовило появу наукового напрямку – теоретичних основ електротехніки.

Навчальна дисципліна «Електротехніка та електромеханіка» складається з двох частин: «Електротехніка» та «Електромеханіка». У першій частині розглядаються теоретичні основи розрахунку електричних та магнітних кіл. Друга частина присвячена аналізу роботи широкого класу електротехнічних пристроїв.

Частина перша

Лінійні електричні кола

Розділ 1. Лінійні електричні кола постійного струму

1.1. Елементи електричних кіл та схем

Електричним струмом називають впорядкований рух електричних зарядів у просторі.

За фізичною природою розрізняють електричний струм провідності (впорядкований рух носіїв струму у провідниках чи напівпровідниках під дією електричного поля) та струм зміщення (рух зв'язаних заряджених часток у діелектрику при зміні поляризації діелектрика).

Сукупність пристроїв, які створюють шляхи для електричного струму, називають **електричним колом**.

До складу електричних кіл входять джерела енергії та пристрої для її передачі, перетворення чи споживання.

Електричні кола, у яких електрорушійні сили (ЕРС), струми та напруги не змінюються у часі, називають **колами постійного струму**. У таких колах магнітні та електричні поля також незмінні в часі.

В електротехнічній літературі прийнято ЕРС, електричні струми, напруги та інші фізичні величини, які характеризують електричне коло постійного струму, позначати великими літерами латинського алфавіту.

Елементи електричних кіл можна описати певною залежністю між струмами I , що протікають через ці елементи, та напругами U , що виникають на них. Характеристики $U(I)$ та $I(U)$ одержали назву **вольт-амперних (ВАХ)**. Електричні кола, що складаються тільки з елементів з лінійними ВАХ, називаються **лінійними**.

Щоб полегшити вивчення процесів в електричному колі, його замінюють розрахунковою схемою заміщення, тобто ідеалізованим колом, яке є розрахунковою моделлю реального кола.

Структурними елементами електричних кіл є *вітки, вузли, контури*.

Віткою електричного кола та його схеми називають ділянку, що має тільки послідовно з'єднані джерела ЕРС та споживачі. **Через всі елементи вітки протікає один і той самий електричний струм.**

Вузлом кола та його схеми називають точку, де збігається на менше трьох струмів.

Контур – це замкнене окреслення, що проходить через вітки та вузли, причому кожний вузол в одному контурі зустрічається не більше одного разу.

Електричному струму I на ділянці кола приписують певний напрям. Напрямок струму характеризується знаком струму. Поняття "додатний струм" чи "від'ємний струм" мають сенс тільки тоді, коли порівнюється напрям струму з деяким, заздалегідь вибраним орієнтиром – так званим додатним напрямом. Додатний напрям струму для розрахунків вибирають довільно, вказуючи його стрілкою. Якщо в результаті розрахунку струму, виконаного за умови вибраного додатного напрямку, одержують $I > 0$, то це означає, що його напрям співпадає з вибраним додатним напрямом. У протилежному випадку, якщо струм від'ємний ($I < 0$), він направлений у протилежну сторону.

Різниця електричних потенціалів φ точок a та b кола називається напругою на даній ділянці кола. Так само, як і для струму, для напруги вибирається додатний напрям. Частіше всього його вибирають співпадаючим з додатним напрямом струму. Додатний напрям напруги можна також позначити стрілкою. Часто користуються позначення напрямку напруги за допомогою індексів, порядок розміщення яких відповідає вибраному додатному напрямку:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$$

У системі SI струм вимірюється в амперах (A), напруга та потенціали – в вольтах (B).

Споживачем електричної енергії у колах постійного струму є резистивний елемент (резистор). У такому елементі електрична енергія перетворюється в теплову, що було вперше

експериментальним шляхом доведено Джоулем та Ленцем. Електричний опір R такого елемента вимірюється в омах ($Ом$); величина, обернена опоріві, називається провідністю g і вимірюється у сименсах ($См$).

Важливим елементом електричного кола є джерело енергії. Джерелами електричної енергії є пристрої, в яких теплова, механічна, хімічна, ядерна енергія тощо, перетворюються в електричну.

Прийнято класифікувати джерела енергії на незалежні та залежні (керовані), джерела ЕРС (напруги) та джерела струму (ДС).

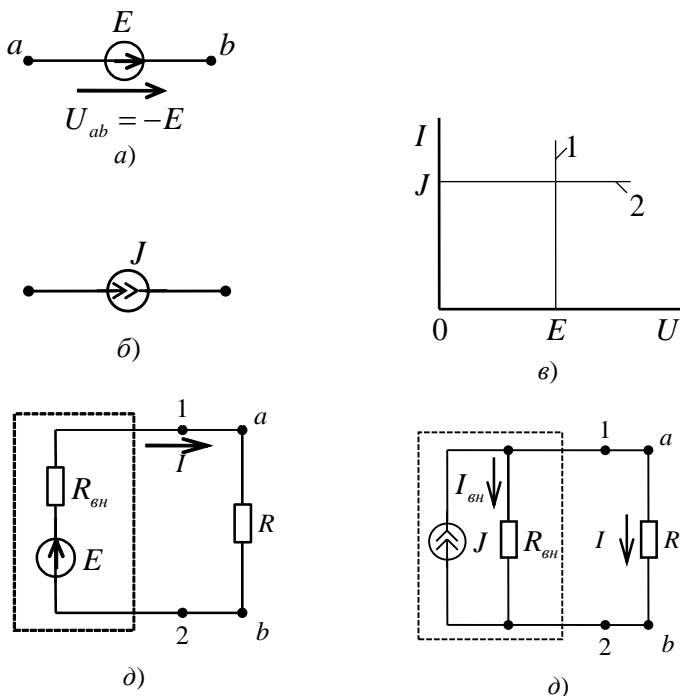


Рис. 1.1.

Незалежне джерело ЕРС постачає до кола ЕРС (напругу), яка не залежить від параметрів навантаження. Від навантаження залежить струм через джерело ЕРС. Умовне графічне зображення

ідеального джерела ЕРС приведене на рис. 1.1, а. Стрілка всередині круга показує напрям ЕРС, тобто напрям підвищення потенціалу. Напруга U_{ab} на ділянці з ЕРС чисельно дорівнює величині E , але має протилежний напрям.

Незалежним джерелом струму називають таке джерело енергії, яке віддає до зовнішнього кола задану величину струму, яка не залежить від параметрів навантаження. Умовне графічне зображення ідеального ДС показане на рис. 1.1, б. Стрілки вказують напрям протікання струму через ДС.

Вольт-амперні характеристики ідеальних джерел ЕРС та струму приведені на рис. 1.1, в (прямі 1 та 2 відповідно).

Реальні джерела енергії мають власний (внутрішній) опір $R_{вн}$, обумовлений принципом дії джерела.

Джерело енергії з відомою ЕРС та внутрішнім опором $R_{вн}$ можна зображувати двома основними схемами заміщення (еквівалентними схемами) (рис. 1.1, з, д).

На рис. 1.1, з зображено першу схему заміщення джерела енергії, або схему з **джерелом ЕРС**. На цій схемі внутрішній опір джерела $R_{вн}$ з'єднаний послідовно з елементом ЕРС E . Якщо $R_{вн} \ll R$ та $U_{вн} \ll U$, то можна вважати, що **напруга на полюсах джерела ЕРС майже не залежить від опору споживача і завжди дорівнює ЕРС E** . Для ідеального джерела ЕРС $R_{вн} = 0$.

Джерело енергії можна зобразити і другою схемою заміщення – з джерелом струму I (рис. 1.1, д).

Якщо $R_{вн} \gg R$ та $I_{вн} \ll I$, то **струм джерела струму I майже не залежить від опору навантаження**. Для ідеального джерела струму $R_{вн} = \infty$.

Надалі, коли немає спеціальних вказівок, термінами «джерело ЕРС» та «джерело струму» позначаються ідеальні джерела.

Схему заміщення, зображену на рис. 1.1, *з*, можна перетворити в схему рис. 1.1, *д*, і навпаки, використавши співвідношення: $E = J \cdot R_{\text{вн}}$.

У реальних електричних колах вибирають ту чи іншу схему заміщення джерела, враховуючи електричні властивості кола та умови поставленої задачі.

1.2. Закон Ома для ділянки кола з ЕРС

Для однозначного визначення потенціалу будь-якої точки кола потрібно довільно задати потенціал якоїсь іншої точки. Прийнемо для схеми, зображеної на рис 1.2, *а*, $\varphi_c = \text{const}$.

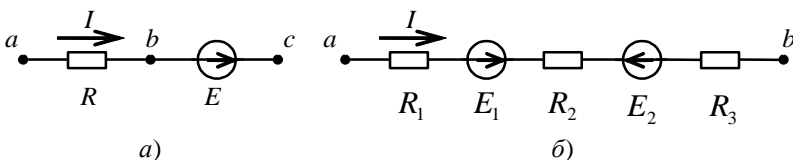


Рис. 1.2

Потенціал точки *b* менший від потенціалу точки *c* на величину ЕРС, тобто:

$$\varphi_b = \varphi_c - E$$

Струм *I* протікає від точки з вищим потенціалом до точки, де потенціал нижчий. Тому:

$$\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R = \varphi_c - E + I \cdot R$$

Напруга на ділянці *ac*:

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = I \cdot R - E, \quad (1.1)$$

звідки струм:

$$I = \frac{U_{ac} + E}{R}. \quad (1.2)$$

Аналогічно можна записати формулу для струму вітки, що має у своєму складі будь-яку кількість послідовно з'єднаних ЕРС та споживачів. Для схеми, зображеної на рис. 1.2, *б*, маємо:

$$I = \frac{U_{ab} + E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U_{ab} + \sum_a^b E}{R_{ab}}, \quad (1.3)$$

де R_{ab} — сумарний опір вітки, U_{ab} — напруга на затискачах вітки, відрахована за вибраним напрямком струму, $\sum_a^b E$ — алгебрична сума ЕРС на даній ділянці, причому ЕРС, напрям якої співпадає з вибраним напрямком струму, входить у суму з додатним знаком, у протилежному випадку — з від'ємним.

Формула (1.3) — *узагальнений закон Ома* для ділянки кола з ЕРС.

Якщо в результаті підрахунку струму за формулою (1.3) вийде від'ємний результат, то це означає, що справжній додатний напрям струму в цій вітці не співпадає з довільно вибраним за додатний.

Додатний напрям напруги вказаний порядком вживання індексів біля літери U . Таким чином, i струм, i напругу при підрахунках необхідно розглядати як алгебричні величини.

1.3. Закони Кірхгофа

Закони Кірхгофа, нарівні з законами Ома та Джоуля-Ленца, є основними законами електричного кола. Режим роботи електричного кола довільної конфігурації повністю визначається першим та другим законами Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа встановлює зв'язок між струмами n віток, що сходяться у вузлі кола. Він формулюється так: алгебрична сума струмів віток, що сходяться у вузлі кола, дорівнює нулеві:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (1.4)$$

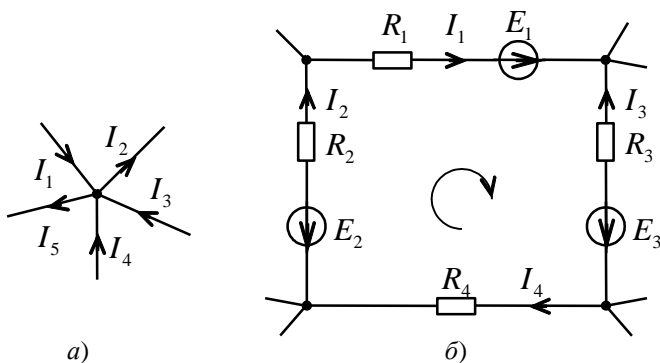


Рис. 1.3

У це рівняння з однаковими знаками повинні входити струми, однаково орієнтовані відносно вузла (рис. 1.3, а).

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0.$$

Якщо до певного вузла приєднане джерело струму, то струм цього джерела повинен теж бути врахований у рівнянні (1.4) за таким самим правилом знаків, як і струми віток.

Часто вживається інше формулювання цього закону: **сума струмів, що підходять до вузла в електричному колі, дорівнює сумі струмів, що відходять від цього вузла.** Для нашого прикладу:

$$I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5.$$

Перший закон Кірхгофа є наслідком того очевидного факту, що у вузлі електричного кола заряд накопичуватися не може.

Другий закон Кірхгофа встановлює зв'язок між напругами віток, що створюють замкнутий контур. Він формулюється так: у замкнутому контурі алгебрична сума напруг дорівнює нулеві:

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0. \quad (1.5)$$

З додатним знаком в цю суму входять напруги, додатні напрями яких співпадають з напрямком обходу контура.

Часто використовується інше формулювання другого

закону Кірхгофа: *алгебрична сума ЕРС у замкненому контурі дорівнює алгебричній сумі спадів напруг на всіх його елементах*. У цьому випадку спади напруг, які спрямовані по струмах, записують зі знаком "+", якщо їх напрям збігається з обходом контуру, і зі знаком "-", коли ці напрями протилежні. Це ж саме правило знаків стосується і ЕРС. Для схеми, зображеної на рис. 1.3, б можна записати, довільно вибравши напрям обходу контура (наприклад, за годинниковою стрілкою):

$$I_1 \cdot R_1 - E_1 - I_3 \cdot R_3 - E_3 + I_4 \cdot R_4 + E_2 + I_2 \cdot R_2 = 0 \quad (1.6)$$

або $I_1 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 + I_2 \cdot R_2 = E_1 + E_3 - E_2$.

1.4. Розрахунок простих електричних кіл

Будемо вважати простими електричні кола, які мають одне джерело енергії. Що стосується споживачів, то вони можуть бути з'єднані послідовно, паралельно або ж змішаним способом.

Нагадаємо, що при послідовному з'єднанні елементів через них протікає один і той самий струм.

Для послідовного з'єднання (рис. 1.4, а) за другим законом Кірхгофа:

$$I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 = E .$$

Або ж: $I = E/R_{екв}$, де $R_{екв} = R_1 + R_2 + R_3$.

Тобто, для n послідовно з'єднаних опорів еквівалентний опір схеми:

$$R_{екв} = \sum_{k=1}^n R_k . \quad (1.7)$$

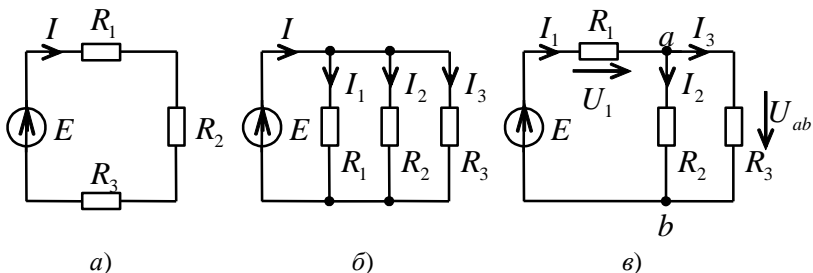


Рис. 1.4

На полюсах паралельно з'єднаних елементів виникає однакова напруга.

Для паралельного з'єднання (рис. 1.4, б) за першим законом Кірхгофа:

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Кожен із струмів визначається за законом Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_1}; I_2 = \frac{E}{R_2}; I_3 = \frac{E}{R_3}.$$

Введемо **провідність вітки** g , тобто величину, обернену опоріві кожної вітки. Тоді:

$$I = E \cdot (g_1 + g_2 + g_3) = E \cdot g_{екв},$$

де $g_{екв} = g_1 + g_2 + g_3$.

Для n паралельно з'єднаних віток еквівалентна провідність:

$$g_{екв} = \sum_{k=1}^n g_k. \quad (1.8)$$

У цьому випадку теж можна користуватися поняттям еквівалентного опору:

$$R_{екв} = \frac{1}{g_{екв}}. \quad (1.9)$$

Для схеми рис. 1.4, в) маємо:

$$R_{екв} = \frac{1}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$

При послідовно-паралельному (змішаному) з'єднанні (рис. 1.4, е) маємо:

$$E = U_1 + U_{ab} = I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}.$$

Тоді:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}};$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3};$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

Співвідношення для розрахунку струмів I_2 та I_3 деколи називають *формулами чужого опору*.

1.5. Розрахунок складних електричних кіл за допомогою законів Кірхгофа

Розрахувати струми у всіх вітках електричного кола складної конфігурації можна за допомогою законів Кірхгофа. Нехай електричне коло має y вузлів, n незалежних контурів та b віток з невідомими струмами. Тоді для визначення b струмів треба скласти $y-1$ рівнянь першого закону Кірхгофа та $b-(y-1)$ рівнянь другого закону Кірхгофа. Напрями струмів у вітках та напрями обходу незалежних контурів вибирають довільно.

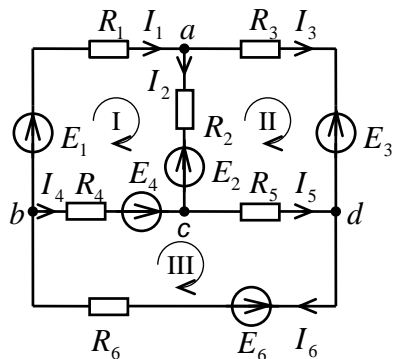


Рис. 1.5

Для схеми, зображеної на рис. 1.5, при вказаних напрямках струмів маємо:

$$\begin{aligned} \text{вузол } a: I_1 - I_2 - I_3 &= 0; \\ \text{вузол } b: I_6 - I_1 - I_4 &= 0; \\ \text{вузол } c: I_4 + I_2 - I_5 &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Рівняння першого закону Кірхгофа для вузла d записувати не потрібно, воно зайве, оскільки може бути одержане як наслідок перших трьох рівнянь.

Вказавши напрямки обходу незалежних контурів, запишемо рівняння другого закону Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \text{контур I: } I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_4 R_4 &= E_1 - E_2 - E_4; \\ \text{контур II: } I_3 R_3 - I_5 R_5 - I_2 R_2 &= E_2 - E_3; \\ \text{контур III: } I_4 R_4 + I_5 R_5 + I_6 R_6 &= E_4 - E_6. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Спільний розв'язок рівнянь (1.10) та (1.11) дає можливість знайти всі шість невідомих струмів. Якщо в результаті розв'язку цих рівнянь буде одержане від'ємне значення для якогось з струмів, то це означає, що справжній напрям цього струму протилежний вибраному за додатний.

Приклад 1.1.

Розрахувати струми у всіх вітках схеми, зображеної на рис. 1.6. Параметри схеми: $E_1 = 100$ В; $E_2 = 150$ В; $E_3 = 60$ В; $J = 2$ А; $R_1 = 70$ Ом; $R_2 = 40$ Ом; $R_3 = 50$ Ом.

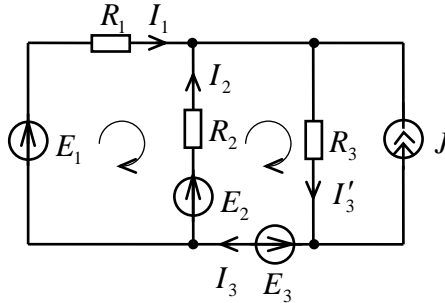


Рис. 1.6

Розв'язок.

У схемі – чотири невідомих струми, три вузли та два незалежних контури. Позначивши довільно напрямки струмів у вітках, складемо два рівняння за першим законом Кірхгофа та два – за другим.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I'_3 + J = 0; \\ I'_3 - I_3 - J = 0; \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2; \\ I_2 R_2 + I'_3 R_3 = E_2 - E_3. \end{cases}$$

Підставивши числові значення, маємо:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I'_3 = -2; \\ I'_3 - I_3 = 2; \\ 70 \cdot I_1 - 40 \cdot I_2 = -50; \\ 40 \cdot I_2 + 50 \cdot I'_3 = 90. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо:

$$I_1 = -0,59 \text{ А}; \quad I_2 = 0,217 \text{ А}; \quad I_3 = -0,374 \text{ А}; \quad I'_3 = 1,626 \text{ А}.$$

Розрахунки свідчать, що реальні напрями струмів I_1 та I_3 протилежні вибраним за додатні.

1.6. Метод контурних струмів

Для розрахунку складних електричних кіл методом контурних струмів (МКС) допускають, що через всі вітки кожного з незалежних контурів протікає свій, так званий **контурний струм**. Записують рівняння другого закону Кірхгофа для контурів, розв'язують їх відносно цих умовних контурних струмів, а потім визначають справжні струми у кожній з віток.

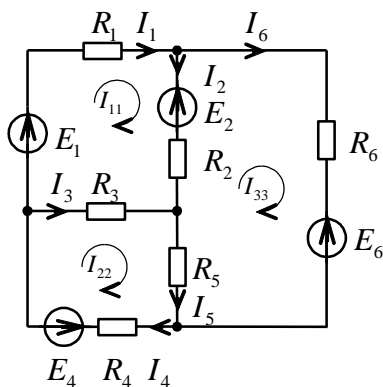


Рис. 1.7

Для схеми, зображеної на рис. 1.7, виберемо незалежні контури та позначимо довільно додатний напрям контурних струмів I_{11} , I_{22} , I_{33} . Запишемо рівняння другого закону Кірхгофа для кожного з контурів, враховуючи, що спади напруг на резисторах кожного з контурів обумовлені струмами і власного, і суміжного контурів.

Так, у рівнянні для першого контура на резисторі R_2 виникає спад напруги за рахунок контурних струмів I_{11} та I_{33} . Оскільки напрям струму I_{33} протилежний напрямку власного контурного струму I_{11} для першого контура, то цей спад напруги необхідно записати у цьому рівнянні як $(I_{11} - I_{33})R_2$.

Застосовуючи такі міркування і до усіх інших елементів схеми, запишемо систему рівнянь для усіх контурів:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}R_1 + (I_{11} - I_{33})R_2 + (I_{11} - I_{22})R_3 &= E_1 - E_2 \\ I_{22}R_4 + (I_{22} - I_{11})R_3 + (I_{22} - I_{33})R_5 &= -E_4 \\ I_{33}R_6 + (I_{33} - I_{22})R_5 + (I_{33} - I_{11})R_2 &= E_2 - E_6 \end{aligned} \right\}.$$

Впорядкувавши коефіцієнти, одержимо:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2 + R_3) + I_{22}(-R_3) + I_{33}(-R_2) &= E_1 - E_2 \\ I_{11}(-R_3) + I_{22}(R_3 + R_4 + R_5) + I_{33}(-R_5) &= -E_4 \\ I_{11}(-R_2) + I_{22}(-R_5) + I_{33}(R_2 + R_6 + R_5) &= E_2 - E_6 \end{aligned} \right\}.$$

Введемо позначення:

$$\left. \begin{aligned} R_{11} = R_1 + R_2 + R_3; R_{12} = R_{21} = -R_3; E_{11} = E_1 - E_2 \\ R_{22} = R_3 + R_4 + R_5; R_{13} = R_{31} = -R_2; E_{22} = -E_4 \\ R_{33} = R_2 + R_6 + R_5; R_{23} = R_{32} = -R_5; E_{33} = E_2 - E_6 \end{aligned} \right\}. \quad (1.12)$$

Тоді рівняння МКС приймають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} &= E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} &= E_{22} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{23} + I_{33}R_{33} &= E_{33} \end{aligned} \right\}. \quad (1.13)$$

У цих рівняннях R_{11} , R_{22} , R_{33} – *власні опори* відповідних контурів, R_{12} , R_{21} , R_{13} , R_{31} , R_{23} , R_{32} – *спільні опори* контурів. Праві частини рівнянь (E_{11} , E_{22} , E_{33}) називаються *контурними ЕРС*. Опори віток, спільних для двох контурів (R_2 , R_3 , R_5), мають у рівняннях (1.12) від'ємний знак тому, що контурні струми при вибраних на рис. 1.7 напрямках протікають через ці вітки у протилежних напрямках.

Узагальнюючи викладене, для схеми, що має K незалежних контурів, рівняння МКС можна записати у вигляді:

Розв'язок.

Вибираємо незалежні контури та позначаємо додатні напрями контурних струмів I_{11} , I_{22} , I_{33} . Оскільки схема має 3 незалежні контури, то система рівнянь МКС має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} &= E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} &= E_{22} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} &= E_{33} \end{aligned} \right\}.$$

Визначаємо власні та спільні опори контурів

$$R_{11} = R_1 + R_5 + R_3 = 55 \text{ Ом};$$

$$R_{22} = R_2 + R_4 + R_5 = 60 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = R_3 + R_4 + R_6 = 50 \text{ Ом};$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_5 = -25 \text{ Ом};$$

$$R_{13} = R_{31} = -R_3 = -20 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_4 = -20 \text{ Ом};$$

Контурні ЕРС:

$$E_{11} = E_5 - E_1 = 40 \text{ В};$$

$$E_{22} = E_2 - E_5 = -70 \text{ В};$$

$$E_{33} = E_6 = 80 \text{ В}.$$

Таким чином, маємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} 55I_{11} - 25I_{22} - 20I_{33} &= 40 \\ -25I_{11} + 60I_{22} - 20I_{33} &= -70 \\ -20I_{11} - 20I_{22} + 50I_{33} &= 80 \end{aligned} \right\}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо значення контурних струмів: $I_{11} = 1,84 \text{ А}$; $I_{22} = 0,44 \text{ А}$; $I_{33} = 2,51 \text{ А}$.

Позначаємо довільно напрями струмів віток та визначаємо ці струми:

$$I_1 = -I_{11} = -1,84 \text{ А};$$

$$I_2 = I_{22} = 0,44 \text{ А};$$

$$I_3 = I_{33} - I_{11} = 0,67 \text{ А};$$

$$I_4 = I_{33} - I_{22} = 2,07 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{11} - I_{22} = 1,40 \text{ A};$$

$$I_6 = I_{33} = 2,51 \text{ A}.$$

1.7. Метод вузлових потенціалів (напруг)

Метод вузлових потенціалів (МВП) зручно застосовувати для розрахунку таких кіл, які мають будь-яку кількість віток, але порівняно невелику кількість вузлів. За рівняннями МВП спочатку розраховують потенціали вузлів кола, а потім, за законом Ома, визначають струми в вітках.

Виведемо рівняння МВП для кола, схема якого зображена на рис. 1.9. Позначимо всі вузли схеми. Довільно виберемо та позначимо додатні напрямки струмів у вітках. Розподіл струмів у схемі не порушиться, якщо заземлити всю схему одним вузлом, тобто прийняти для цього вузла потенціал рівний нулеві.

Нехай для схеми рис. 1.9. $\varphi_4 = 0$.

Запишемо рівняння першого закону Кірхгофа для вузла 1:

$$-I_1 + I_2 - I_5 - I_7 = 0. \quad (1.15)$$

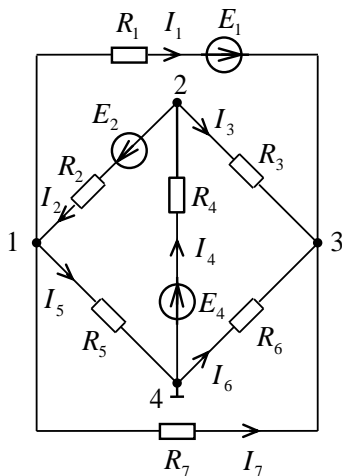


Рис. 1.9

Кожен із струмів визначимо за законом Ома через потенціали вузлів, ЕРС та провідності віток:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_3 + E_1)g_1; \quad I_5 = (\varphi_1 - \varphi_4)g_5;$$

$$I_2 = (\varphi_2 - \varphi_1 + E_2)g_2; \quad I_7 = (\varphi_1 - \varphi_3)g_7.$$

Підставивши ці формули для струмів в (1.15) та виконавши деякі арифметичні операції, маємо:

$$\begin{aligned} -\varphi_1 g_1 + \varphi_3 g_1 + \varphi_2 g_2 - \varphi_1 g_2 - \varphi_1 g_5 + \varphi_4 g_5 - \varphi_1 g_7 + \varphi_3 g_7 = \\ = E_1 g_1 - E_2 g_2 \end{aligned}$$

Домноживши останнє рівняння на "-1", привівши подібні члени та врахувавши, що $\varphi_4 = 0$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi_1(g_1 + g_2 + g_5 + g_7) + \varphi_2(-g_2) + \varphi_3(-g_1 - g_7) = \\ = -E_1 g_1 + E_2 g_2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Записавши перший закон Кірхгофа для вузлів 2 та 3 і виконавши перетворення, подібні приведені вище, одержимо:

для вузла 2:
$$\begin{aligned} \varphi_1(-g_2) + \varphi_2(g_2 + g_3 + g_4) + \varphi_3(-g_3) = \\ = -E_2 g_2 + E_4 g_4; \end{aligned} \quad (1.17)$$

для вузла 3:
$$\begin{aligned} \varphi_1(-g_1 - g_7) + \varphi_2(-g_3) + \varphi_3(g_1 + g_3 + g_6 + g_7) = \\ = E_1 g_1. \end{aligned}$$

Введемо позначення коефіцієнтів при невідомих потенціалах вузлів:

$$\begin{aligned} G_{11} = g_1 + g_2 + g_5 + g_7; \quad G_{12} = G_{21} = -g_2; \\ G_{22} = g_2 + g_3 + g_4; \quad G_{13} = G_{31} = -g_1 - g_7; \\ G_{33} = g_1 + g_3 + g_6 + g_7; \quad G_{23} = G_{32} = -g_3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Коефіцієнти G_{11} , G_{22} , G_{33} називають **власними вузловими провідностями** відповідних вузлів. Вони визначаються, як сума провідностей всіх віток, що сходяться у відповідному вузлі. Провідності G з різними індексами називають **спільними вузловими провідностями** відповідної пари вузлів. Вони

визначаються сумарною провідністю віток, що зв'язують між собою ці вузли. Власні вузлові провідності у рівняннях МВП завжди мають додатні числові значення, спільні провідності – завжди від'ємні значення.

Розглянемо праві частини рівнянь (1.16 – 1.17). Маємо величини, які прийнято позначати для відповідних вузлів, як I_{11} , I_{22} , I_{33} . Тобто:

$$\begin{aligned} I_{11} &= -E_1 g_1 + E_2 g_2; \\ I_{22} &= -E_2 g_2 + E_4 g_4; \\ I_{33} &= E_1 g_1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Це так звані **вузлові струми** вузлів **1, 2, 3**. Вони визначаються, як алгебричні суми добутків ЕРС у кожній вітці, що зв'язана у відповідному вузлі, на провідність цієї вітки. Добуток типу $E \cdot g$ зі знаком "плюс", якщо ЕРС направлена до вузла, для якого записується рівняння, і зі знаком "мінус" – у противному разі.

Таким чином, система рівнянь МВП для схеми, зображеної на рис. 1.9 має вигляд:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11} \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I_{22} \cdot \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I_{33} \end{cases} \tag{1.20}$$

Розв'язавши систему рівнянь (1.20), одержимо значення потенціалів всіх вузлів схеми. Струми у вітках розраховуємо за законом Ома.

Узагальнюючи рівняння МВП на випадок електричного кола, що має b вузлів, можна записати $b-1$ рівнянь відносно $b-1$ потенціалів (нагадаємо, що потенціал одного з вузлів схеми приймається рівним нулеві).

Якщо електричне коло має не тільки джерела ЕРС, але і джерела струму, то при складанні рівнянь типу (1.20) струми заданих джерел струму враховуються у правій частині для кожного вузла, причому, з додатними знаками повинні бути взяті

струми джерел струму, спрямовані до даного вузла, з від'ємними знаками – від вузла.

Для перевірки правильності розрахунків МВП застосовують перший закон Кірхгофа.

Приклад 1.3.

Для електричного кола, схема якого зображена на рис. 1.8, розрахувати всі струми МВП, використавши параметри схеми, приведені в прикладі 1.2.

Розв'язок.

Заземлимо схему у вузлі 4, тобто приймемо, що $\varphi_4 = 0$.

Схема має три вузли з невідомими потенціалами, тому система рівнянь МВП має вигляд:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11} \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I_{22} \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I_{33} \end{cases}$$

Розрахуємо вузлові провідності:

$$G_{11} = g_1 + g_2 + g_5 = 0,207 \text{ См};$$

$$G_{22} = g_1 + g_3 + g_6 = 0,25 \text{ См};$$

$$G_{33} = g_2 + g_4 + g_6 = 0,217 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -g_1 = -0,1 \text{ См};$$

$$G_{13} = G_{31} = -g_2 = -0,067 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = -g_6 = -0,1 \text{ См}.$$

Вузлові струми для вузлів 1, 2, 3:

$$I_{11} = -E_1 g_1 - E_5 g_5 - E_2 g_2 = -20,27 \text{ А};$$

$$I_{22} = E_1 g_1 + E_6 g_6 = 18 \text{ А};$$

$$I_{33} = E_2 g_2 - E_6 g_6 = -3,33 \text{ А}.$$

Таким чином, система приймає вигляд:

$$\begin{cases} 0,207\varphi_1 - 0,1\varphi_2 - 0,067\varphi_3 = -20,37 \\ -0,1\varphi_1 + 0,25\varphi_2 - 0,1\varphi_3 = 18 \\ -0,067\varphi_1 - 0,1\varphi_2 + 0,217\varphi_3 = -3,33 \end{cases} .$$

Розв'язавши систему, отримаємо:

$$\varphi_1 = -105 \text{ В}, \quad \varphi_2 = 13,4 \text{ В}, \quad \varphi_3 = -41,4 \text{ В}.$$

За законом Ома струми у вітках:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_1)g_1 = -1,84 \text{ А};$$

$$I_2 = (\varphi_1 - \varphi_3 + E_2)g_2 = 0,43 \text{ А};$$

$$I_3 = (\varphi_2 - \varphi_4)g_3 = 0,67 \text{ А};$$

$$I_4 = (\varphi_4 - \varphi_3)g_4 = 2,07 \text{ А};$$

$$I_5 = (\varphi_1 - \varphi_4 + E_5)g_5 = 1,40 \text{ А};$$

$$I_6 = (\varphi_3 - \varphi_2 + E_6)g_6 = 2,52 \text{ А}.$$

Перевіримо розрахунки, використавши перший закон Кірхгофа:

для вузла 1: $-I_1 - I_2 - I_5 = 0$; $1,84 - 0,43 - 1,40 \approx 0$;

для вузла 2: $I_6 + I_1 - I_3 = 0$; $2,52 - 1,84 - 0,67 \approx 0$;

для вузла 3: $I_2 + I_4 - I_6 = 0$; $0,43 + 2,07 - 2,52 \approx 0$.

Для розрахунку електричних кіл, що мають тільки два вузли і будь-яку кількість віток, зручно застосовувати метод вузлових потенціалів, який при використанні в таких схемах називають **методом двох вузлів**. Розглянемо деякі особливості розрахунку цим методом на прикладі схеми, зображеної на рис. 1.10.

Прийнявши, що $\varphi_b = 0$, маємо в відповідності з (1.20):

$$G_{aa} \cdot \varphi_a = I_{aa}, \text{ звідки } \varphi_a = \frac{I_{aa}}{G_{aa}},$$

де $G_{aa} = g_1 + g_2 + g_3$, $I_{aa} = E_1g_1 - E_2g_2 + J$.

Напруга U_{ab} між двома вузлами:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{E_1g_1 - E_2g_2 + J}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (1.21)$$

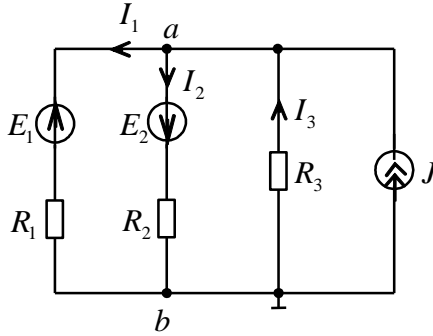


Рис. 1.10

Узагальнюючи формулу (1.36) на випадок схеми, що має n віток з навантаженням та p джерел струму, одержимо основну формулу методу двох вузлів:

$$U_{ab} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{s=1}^p J_s}{\sum_{k=1}^n g_k}. \quad (1.22)$$

Суми в чисельнику – алгебричні. Добуток $E_k g_k$ входить у суму зі знаком "плюс", якщо ЕРС вітки E_k орієнтована до вузла a , у протилежному випадку добуток $E_k g_k$ входить у суму зі знаком "мінус". Струм джерела струму J_s входить у суму зі знаком "плюс", якщо він направлений до вузла a , інакше J_s входить у суму зі знаком "мінус".

Сума в знаменнику (1.22) – арифметична.

Розрахувавши напругу U_{ab} , позначають довільно напрями струму в вітках і визначають їх за законом Ома:

$$I_1 = (U_{ab} - E_1)g_1;$$

$$I_2 = (U_{ab} + E_2)g_2;$$

$$I_3 = -U_{ab}g_3.$$

Правильність розрахунку перевіряють за першим законом Кірхгофа. Для даної схеми:

$$-I_1 - I_2 + I_3 + J = 0.$$

Приклад 1.4.

Розрахувати всі струми методом двох вузлів у схемі, зображеній на рис. 1.11. Параметри схеми: $E_1 = 50 \text{ В}$, $E_2 = 60 \text{ В}$, $E_3 = 75 \text{ В}$, $R_1 = 50 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 25 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$.

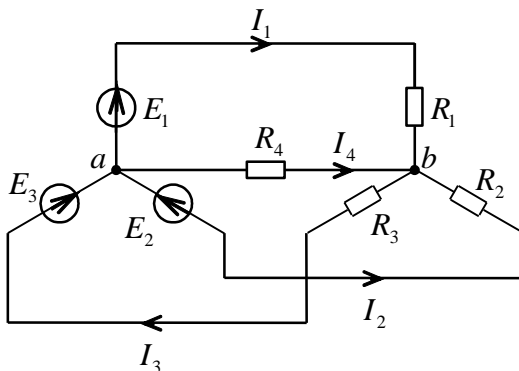


Рис. 1.11

Розв'язок.

Розрахуємо напругу між вузлами a та b :

$$\begin{aligned} U_{ab} &= \frac{-E_1 g_1 + E_2 g_2 + E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4} = \\ &= \frac{-50 \cdot 0,02 + 60 \cdot 0,05 + 75 \cdot 0,04}{0,02 + 0,05 + 0,04 + 0,05} = 31,2 \text{ В}. \end{aligned}$$

Позначимо довільно напрямки струмів у вітках та визначимо їх за законом Ома:

$$I_1 = (U_{ab} + E_1) g_1 = (31,2 + 50) \cdot 0,02 = 1,62 \text{ А};$$

$$I_2 = (U_{ab} - E_2) g_2 = (31,2 - 60) \cdot 0,05 = -1,44 \text{ А};$$

$$I_3 = (-U_{ab} + E_3) g_3 = (-31,2 + 75) \cdot 0,04 = 1,75 \text{ А};$$

$$I_4 = U_{ab} g_4 = 31,2 \cdot 0,05 = 1,56 \text{ А}.$$

Перевірка:

$$I_1 + I_2 + I_4 - I_3 = 0;$$

$$1,62 - 1,44 + 1,56 - 1,75 \approx 0.$$

1.8. Основні властивості та теореми лінійних електричних кіл

Найважливіша особливість лінійних електричних кіл – лінійність причинно-наслідкових зв'язків. Звернемося до системи рівнянь МКС (1.14). Розв'язок системи рівнянь відносно будь-якого із контурних струмів I_k можна записати в вигляді:

$$I_k = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n D_{ik} E_i, \quad (1.23)$$

де D – визначник системи рівнянь;

D_{ik} – алгебричний доданок елемента R_{ik} визначника системи;

E_i – контурна ЕРС (алгебрична сума ЕРС віток, що входять до i -го контуру).

Рівняння (1.23) дає можливість сформулювати **принцип накладання (суперпозиції)**: реальний струм у кожній вітці схеми можна розглядати, як алгебричну суму частинних струмів, що обумовлені дією кожної з ЕРС окремо.

У схемах електричних кіл будь-якої конфігурації завжди є декілька віток, струми яких співпадають з контурними струмами тих контурів, до яких входять ці вітки.

Принцип взаємності встановлює наступне: якщо в електричному колі джерело ЕРС E , включене у i -ту вітку, викликає у k -й вітці струм I , то такий самий струм I буде протікати в i -й вітці, якщо джерело ЕРС E перенести у вітку k (рис. 1.12). Це твердження дійсне, коли джерело ЕРС E – єдине в схемі (на рис. 1.12 схема всього кола, крім віток i та k , зображена в вигляді прямокутника $П$).

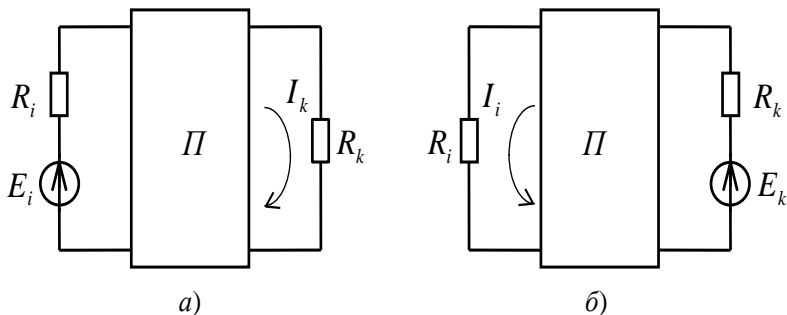


Рис. 1.12

Справді, для схеми рис. 1.12, а з рівняння (1.23) маємо:

$$I_k = \frac{D_{ik}}{D} E_i.$$

Для схеми рис. 1.16, б, у свою чергу:

$$I_i = \frac{D_{ki}}{D} E_k.$$

Але ж $E_i = E_k = E$, та, крім того, враховуючи, що визначник D симетричний ($R_{ik} = R_{ki}$), симетричні і алгебричні доповнення: $D_{ik} = D_{ki}$. Тобто, доведено, що $I_k = I_i = I$.

Якщо ЕРС, що включаються у i -ту та k -ту вітки, різні, то:

$$\frac{E_i}{I_k} = \frac{E_k}{I_i}.$$

Це більш загальне формулювання принципу взаємності.

Теорема компенсації. Струми в електричному колі не зміняться, якщо будь-яку ділянку кола замінити ЕРС, по величині рівній напрузі на ділянці та направлений протилежно напрямку струму на даній ділянці кола.

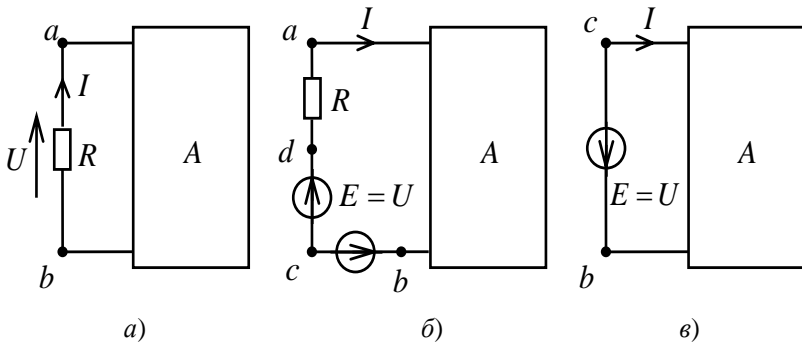


Рис. 1.13

Виділимо у схемі електричного кола (рис. 1.13, а) вітку з струмом I . Решту схеми зобразимо прямокутником A . У теорії кіл частину схеми, яка має два зовнішні полюси для підключення, називають **двополюсником**. Двополюсник, що не містить джерел енергії, називають **пасивним** (наприклад, на рис. 1.12 маємо пасивний двополюсник Π). Якщо двополюсник містить джерела енергії, його називають **активним** двополюсником. Включимо у виділену вітку дві протилежно направлені ЕРС, по величині рівні напрузі на опорі R (рис. 1.13, б). Розподіл струмів у схемі при цьому не зміниться. У схемі рис. 13, б маємо: $U_{ac} = -IR + E = 0$, тобто $\varphi_a = \varphi_c$. Об'єднаємо точки a та c , в результаті одержимо схему рис. 1.13, в, еквівалентну схемі, зображеній на рис. 1.13, а.

Теорема про активний двополюсник (еквівалентний генератор). Розглянемо схему, зображену на рис. 1.14, а. Згідно з вищеназваною теоремою **по відношенню до виділеної вітки $a-b$ активний двополюсник можна замінити еквівалентним генератором, ЕРС якого дорівнює напрузі холостого ходу на полюсах вітки $a-b$, а внутрішній опір дорівнює вхідному опору двополюсника відносно затискачів $a-b$ при розімкнутій ділянці $a-b$ кола** (рис. 1.14, б).

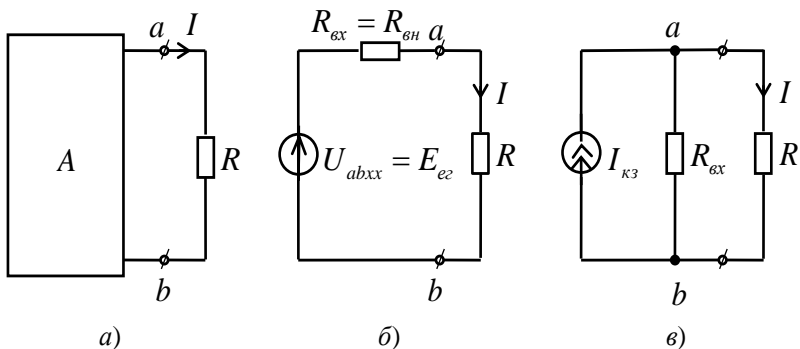


Рис. 1.14

Для доведення теореми включимо до вітки $a - b$ дві рівні та протилежно направлені ЕРС E (рис. 1.15, a). Тепер застосуємо принцип суперпозиції і розділимо схему на дві (рис. 1.15, $б, в$).

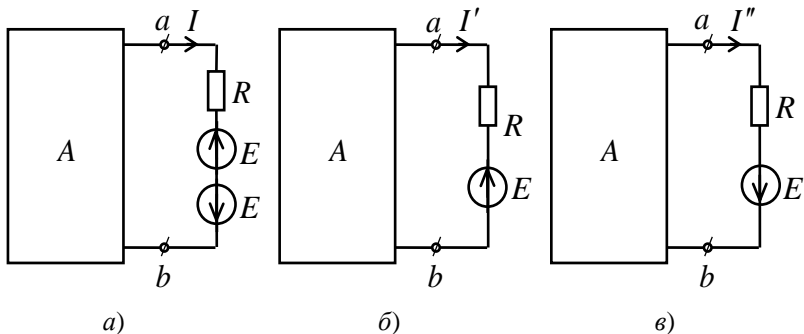


Рис. 1.15

Для розрахунку частинного струму I' врахуємо всі джерела енергії двополюсника та одну з двох ЕРС. За законом Ома маємо:

$$I' = \frac{U_{ab} - E}{R}. \quad (1.24)$$

У схемі рис. 1.15, *в* двополюсник представлений пасивною схемою з певним вхідним опором R_{ex} . Струм:

$$I'' = \frac{E}{R_{ex} + R}. \quad (1.25)$$

Виберемо величину E такою, щоб струм I' дорівнював нулю (режим холостого ходу). Це можливо, якщо в формулі (1.24) $E = U_{ab_{xx}}$. Тоді частинний струм I'' із (1.25):

$$I'' = \frac{E}{R_{ex} + R} = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{ex} + R}.$$

Реальний струм за методом накладання:

$$I = I' + I'' = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{ex} + R}. \quad (1.26)$$

Синтезувавши коло за співвідношенням (1.26), одержуємо схему, зображену на рис. 1.14, *б*.

Ця теорема має ще назву теореми Тевенена-Гельмгольца. Джерело ЕРС можна перетворити в еквівалентне джерело струму (рис. 1.14, *в*). **Теорема Норттона** стверджує, що, якщо нас цікавить режим роботи однієї вітки, то решту схеми електричного кола можна замінити джерелом струму, струм якого дорівнює струму короткого замикання у даній вітці, а внутрішній опір, як і в попередньому випадку, дорівнює вхідному опору схеми відносно виділених полюсів (рис. 1.14, *в*). При $R = 0$ (режим короткого замикання вітки $a - b$) маємо з формули (1.26):

$$I_{кз} = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{ex}}.$$

Тоді струм у навантаженні R :

$$I = \frac{I_{кз} R_{ex}}{R_{ex} + R}. \quad (1.27)$$

Схеми, зображені на рис. 1.14, *б*, *в* називають схемами заміщення з еквівалентним генератором відповідно напруги та

струму. Вибирати ту чи іншу схему слід у залежності від того, яка з них зручніша для розрахунку даного електричного кола.

1.9. Еквівалентні перетворення схем електричних кіл

Для спрощення розрахунків в електричних колах часто виявляються доцільними еквівалентні перетворення окремих частин схеми. Власне, найпростішими перетвореннями такого типу є заміни послідовно чи паралельно з'єднаних декількох резисторів одним, еквівалентним. До таких перетворень належить також еквівалентний перехід від схеми заміщення джерела ЕРС до джерела струму і навпаки.

Розглянемо ще деякі найчастіше вживані еквівалентні перетворення, які можна застосовувати для спрощення розрахунку в електричних колах.

Перетворення паралельно сполучених віток з джерелами ЕРС та джерелами струму. Якщо у схемі електричного кола є декілька паралельних віток з джерелами ЕРС (рис. 1.16, а), то цю групу віток можна замінити однією віткою з еквівалентним джерелом ЕРС та її еквівалентним внутрішнім опором (рис. 1.16, б).

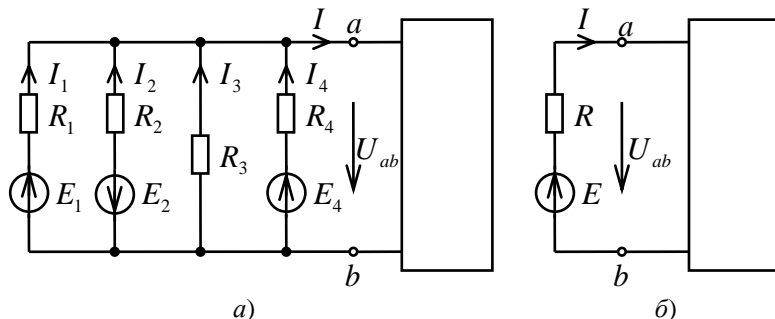


Рис. 1.16

Позначимо умовно прямокутником всю ту частину схеми, до полюсів $a - b$ якої підключені паралельні вітки з джерелами ЕРС. Очевидно, що ліві частини схем рис. 1.16, а та рис. 1.16, б будуть еквівалентні по відношенню до полюсів $a - b$, якщо струм I та

напруга U_{ab} у цих двох схемах будуть тотожно рівними. Для схеми рис. 1.16, а маємо:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (E_1 - U_{ab})g_1 + \\ &+ (-E_2 - U_{ab})g_2 + (-U_{ab})g_3 + (E_4 - U_{ab})g_4 = \\ &= E_1g_1 - E_2g_2 + E_4g_4 - U_{ab}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4). \end{aligned}$$

Для схеми рис. 1.16, б:

$$I = (E - U_{ab})g = Eg - U_{ab}g.$$

Оскільки умови еквівалентності повинні виконуватися при будь-яких значеннях струму I та напруги U_{ab} , то прирівнявши праві частини двох одержаних рівнянь, маємо:

$$g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4. \quad (1.28)$$

$$E = \frac{E_1g_1 - E_2g_2 + E_4g_4}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}. \quad (1.29)$$

У формулу (1.29) для еквівалентної ЕРС з додатним знаком ввійшли ті ЕРС віток, які орієнтовані відносно полюсів $a - b$ так само, як і ЕРС E , зі знаком "мінус" – ЕРС E_2 , орієнтована зустрічно. У третій вітці ЕРС відсутня, тому добутку E_3g_3 в формулі для еквівалентної ЕРС немає, але до еквівалентної провідності g входить провідність третьої вітки g_3 .

Узагальнюючи ці міркування, можна записати умови еквівалентної заміни n паралельних віток однією, еквівалентною:

$$E = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^n E_k g_k. \quad (1.30)$$

$$g = \sum_{k=1}^n g_k. \quad (1.31)$$

Якщо до полюсів $a - b$, крім n віток з джерелами ЕРС, підключені m віток з джерелами струму, то струми цих джерел треба врахувати при обчисленні еквівалентної ЕРС E :

$$E = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^n E_k g_k + \frac{1}{g} \sum_{p=1}^m J_p . \quad (1.32)$$

З додатними знаками до формули входять струми, які орієнтовані відносно вузлів $a - b$ так само, які і ЕРС E .

Потужність, що створюється джерелами ЕРС E_k та джерелами струму J_p , не дорівнює потужності еквівалентної ЕРС E .

Перенесення джерел в схемі. У ряді випадків розрахунок електричних кіл спрощується в результаті перенесення у схемі джерел ЕРС чи струму.

Джерело ЕРС можна перенести із якої-небудь вітки схеми до всіх інших віток, з'єднаних в одному вузлі з даною віткою. Струми у вітках схеми у цьому випадку не зміняться, оскільки, як свідчить другий закон Кірхгофа, вони залежать від сумарних ЕРС контурів. Доведемо це на прикладі схеми, зображеної на рис. 1.17.

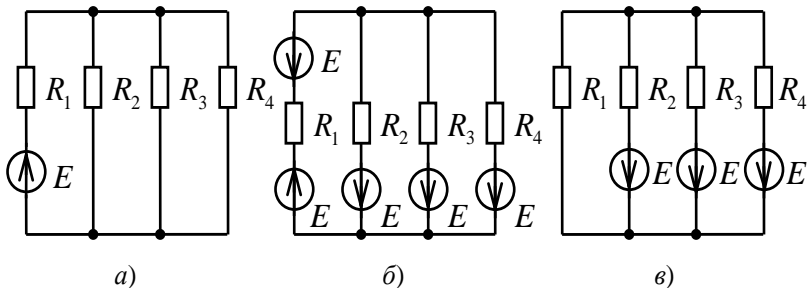


Рис. 1.17

Нехай, наприклад, треба перенести ЕРС E з першої вітки схеми рис. 1.17, а. Включимо у цю вітку компенсуючу ЕРС такої ж самої величини, причому, щоб струми у вітках не змінювалися, треба включити в три інші вітки такі самі ЕРС, орієнтовані відносно вузлів схеми так само, як і компенсуюча ЕРС. В результаті одержимо схему, зображену на рис. 1.17, б.

Якщо у всіх вітках схеми, крім однієї, що сходяться в одному вузлі, є однакові джерела ЕРС, орієнтовані однаково відносно

цього вузла, то ці ЕРС можна замінити одним джерелом у вітці, яка ЕРС не мала.

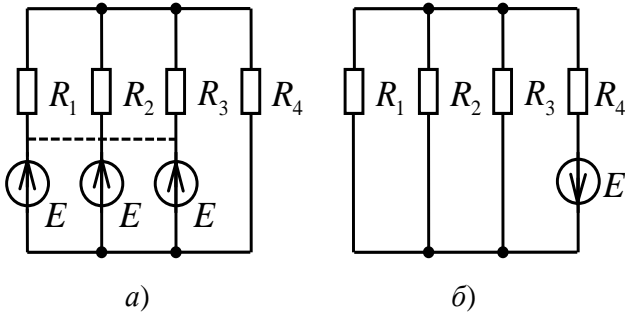


Рис. 1.18

Розглянемо схему, зображену на рис. 1.18, а. Оскільки ЕРС усіх джерел однакові, можна об'єднати другі полюси ЕРС, як точки з однаковими потенціалами, в результаті чого одержимо схему, зображену на рис. 1.18, б.

Перенесення джерел струму. При перенесенні джерел струму вони приєднуються до вузлів схеми так, щоб залишилися незмінними сумарні струми у вузлах. При цьому напруги між вузлами залишаються незмінними. Приклад такого переносу приведений в схемі рис. 1.19, а, б.

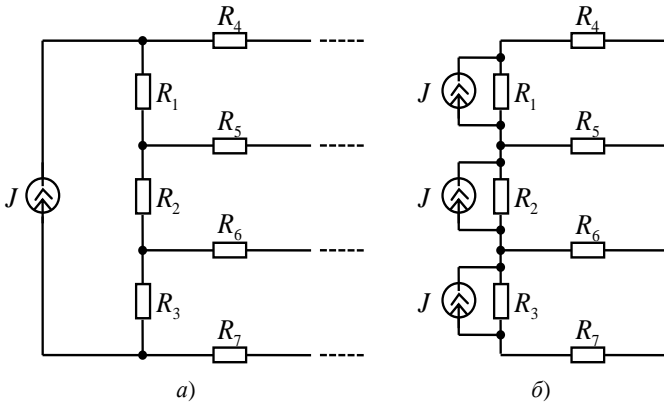


Рис. 1.19

Перетворення з'єднання опорів трикутником в з'єднання зіркою і навпаки. На рис. 1.20 приведені схеми сполучення опорів трикутником (1.20, а) та зіркою (1.20, б).

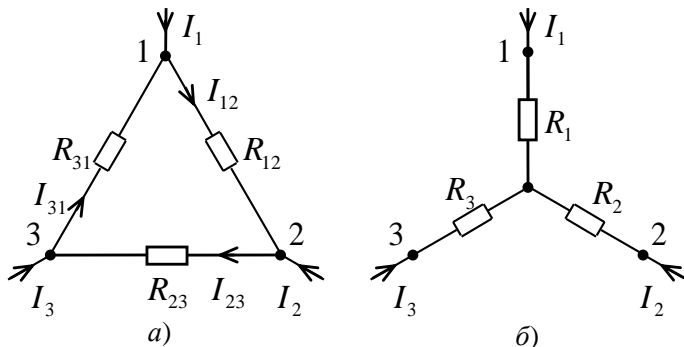


Рис. 1.20

Очевидно, ці схеми будуть еквівалентними у тому випадку, коли струми, що підтікають до однойменних вузлів, будуть однаковими, а також однаковими будуть напруги між однойменними вузлами обох схем.

Виведемо співвідношення для еквівалентного переходу від з'єднання трикутником до з'єднання зіркою, тобто одержимо співвідношення для розрахунку R_1 , R_2 та R_3 через задані значення R_{12} , R_{23} , R_{31} .

Для схеми рис. 1.20, а за першим законом Кірхгофа для вузлів 1 та 2:

$$I_{12} = I_1 + I_{31}; \quad I_{12} = I_{23} - I_2.$$

За другим законом Кірхгофа для цієї схеми:

$$I_{12}R_{12} + I_{23}R_{23} + I_{31}R_{31} = 0.$$

Підставимо перші рівняння у рівняння другого закону Кірхгофа:

$$I_{12}R_{12} + R_{23}(I_{12} + I_2) + R_{31}(I_{12} - I_1) = 0;$$

$$I_{12} = \frac{I_1R_{31} - I_2R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напруга між вузлами 1 та 2 у схемі рис. 1.20, а:

$$\begin{aligned}
 U_{12} &= R_{12} I_{12} = \\
 &= I_1 \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} - I_2 \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Для схеми рис. 1.20, б напруга між цими ж вузлами:

$$U_{12} = I_1 R_1 - I_2 R_2. \tag{1.34}$$

Для виконання умов еквівалентності напруг в двох схемах маємо:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \\
 R_2 &= \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \\
 R_3 &= \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Вираз для R_3 можна отримати круговою заміною індексів. Таким чином, одержано співвідношення для еквівалентного переходу від з'єднання опорів трикутником до з'єднання зіркою.

При переході від з'єднання зіркою до з'єднання трикутником заданими є опори R_1 , R_2 , R_3 . Відповідні співвідношення для такого переходу виведемо з формул (1.35). Розділимо третє рівняння на друге та на перше. Маємо:

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_{31}}{R_{12}}; \quad \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23}}{R_{12}}.$$

Звідси:

$$R_{31} = \frac{R_3 R_{12}}{R_2}; \quad R_{23} = \frac{R_3 R_{12}}{R_1}.$$

Підставимо останні співвідношення у рівняння для R_1 і одержимо після деяких перетворень:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}. \quad (1.36)$$

Формули для визначення R_{23} та R_{31} можна отримати круговою заміною індексів:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}. \quad (1.37)$$

При переході від з'єднання зіркою до з'єднання трикутником часто використовують провідності віток. Так, формулу (1.36) можна записати так:

$$\frac{1}{g_{12}} = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{g_3}{g_1 g_2}.$$

Тоді:

$$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (1.38)$$

Аналогічно:

$$g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}; \quad g_{31} = \frac{g_3 g_1}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (1.39)$$

Всі наведені вище перетворення дають можливість спростити складні електричні кола, що в деяких випадках спрощує і розрахунки. Послідовне "згортання" складних ділянок кіл та еквівалентна їх заміна простими може позбавити від необхідності розв'язування систем рівнянь, але подальші розрахунки вимагають, у свою чергу, послідовного повернення до початкових варіантів схем та визначення струмів та напруг на їх ділянках. Застосування такого розрахунку важко піддається програмній реалізації.

Приклад 1.5.

Методом еквівалентних перетворень визначити всі струми в електричному колі, схема якого зображена на рис. 1.21, а.

Параметри схеми: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$, $R_5 = 25 \text{ Ом}$, $R_6 = 10 \text{ Ом}$, $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = 70 \text{ В}$, $E_5 = 140 \text{ В}$, $E_6 = 80 \text{ В}$.

Розв'язок.

Послідовність еквівалентних перетворень схеми показана на рис. 1.21, а – ж

Перетворимо джерело ЕРС E_6 в еквівалентне джерело струму (рис. 1.21, б):

$$J_6 = \frac{E_6}{R_6} = 8 \text{ А.}$$

З'єднання опорів R_3 , R_4 , R_6 трикутником замінимо еквівалентним з'єднанням зіркою (рис. 1.21, в):

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_6} = 8 \text{ Ом};$$

$$R_{46} = \frac{R_4 R_6}{R_3 + R_4 + R_6} = 4 \text{ Ом};$$

$$R_{63} = \frac{R_6 R_3}{R_3 + R_4 + R_6} = 4 \text{ Ом.}$$

Перенесемо джерело струму J_6 (рис. 1.21, в) та перейдемо до еквівалентних джерел ЕРС E_{46} та E_{63} (рис. 1.21, г).

$$E_{46} = J_6 \cdot R_{46} = 32 \text{ В}; \quad E_{63} = J_6 \cdot R_{63} = 32 \text{ В.}$$

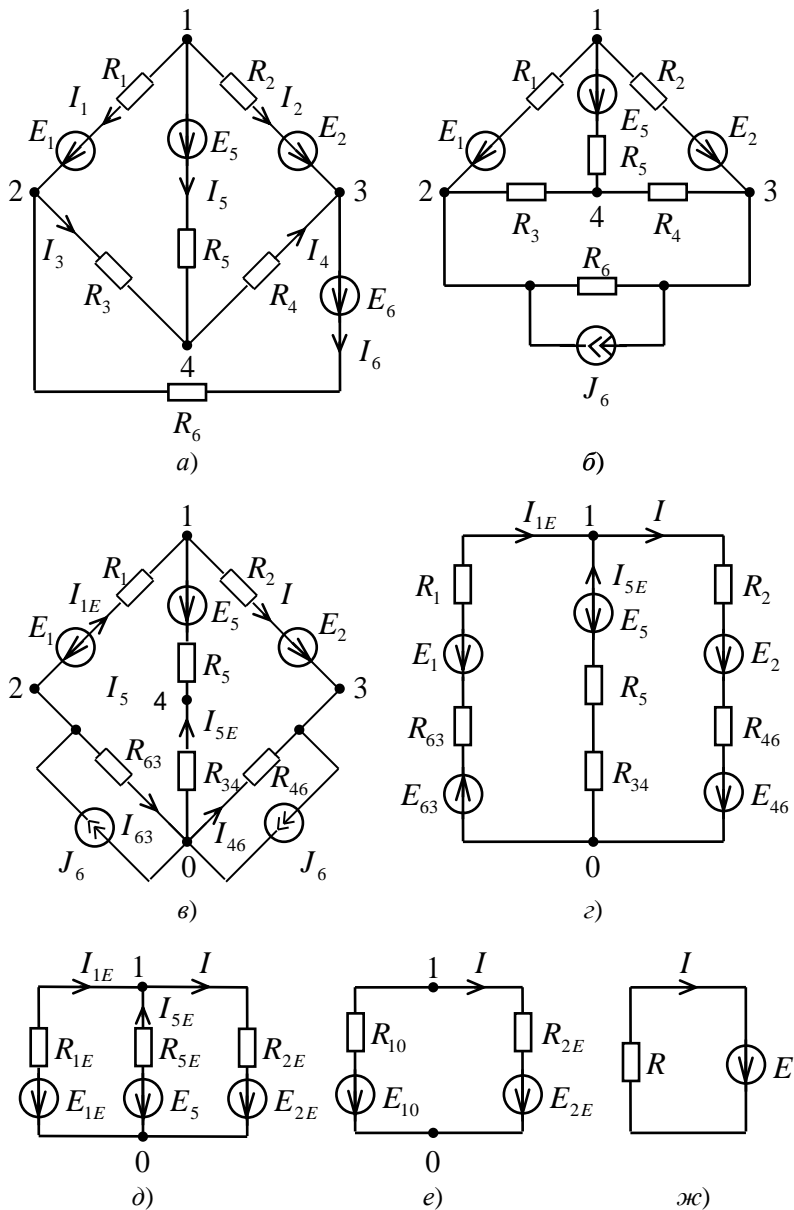


Рис. 1.21

Замінімо послідовне з'єднання ЕРС та опорів у кожній з трьох віток еквівалентними (рис. 1.21, *д*):

$$E_{1A} = E_1 - E_{63} = 68 \text{ В};$$

$$E_{2A} = E_2 + E_{46} = 102 \text{ В};$$

$$R_{1A} = R_1 + R_{63} = 14 \text{ Ом};$$

$$R_{2A} = R_2 + R_{46} = 19 \text{ Ом};$$

$$R_{5A} = R_5 + R_{34} = 33 \text{ Ом}.$$

Дві паралельні вітки зліва замінімо однією еквівалентною (рис. 1.21, *е*), з параметрами:

$$R_{10} = \frac{1}{g_{10}} = \frac{1}{g_{1E} + g_{5E}} = 9,8 \text{ Ом};$$

$$E_{10} = \frac{E_{1E}g_{1E} + E_5g_{5E}}{g_{10}} = 89,2 \text{ В}.$$

Нарешті, для схеми рис. 1.21, *ж* маємо:

$$R = R_{10} + R_{2E} = 28,8 \text{ Ом},$$

$$E = E_{2E} - E_{10} = 12,8 \text{ В}.$$

$$I = \frac{E}{R} = 0,44 \text{ А}.$$

Тепер послідовно, у зворотному порядку розглядаючи приведені схеми, розраховуємо в них напруги та струми:

Напруга U_{01} в схемах рис. 1.21, *е* – *в*:

$$U_{01} = IR_{10} + E_{10} = 93,6 \text{ В}.$$

Струми:

$$I_{1E} = \frac{U_{01} - E_{1E}}{R_{1E}} = 1,84 \text{ А};$$

$$I_{5E} = \frac{U_{01} - E_5}{R_{5E}} = -1,4 \text{ А}.$$

За першим законом Кірхгофа для схеми рис.1.21, в:

$$I_{63} = J_6 - I_{1E} = 6,16 \text{ A};$$

$$I_{46} = J_6 - I = 7,56 \text{ A}.$$

Розрахуємо напруги:

$$U_{24} = I_{63} R_{63} + I_{5E} R_{34} = 13,5 \text{ B};$$

$$U_{43} = -I_{5E} R_{34} + I_{46} R_{46} = 41,4 \text{ B};$$

$$U_{23} = U_{24} + U_{43} = 54,9 \text{ B}.$$

Нарешті, струми у початковому варіанті схеми (рис. 1.21, а):

$$I_1 = -I_{1E} = -1,84 \text{ A}; \quad I_2 = I = 0,44 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{U_{24}}{R_3} = 0,67 \text{ A}; \quad I_4 = \frac{U_{43}}{R_4} = 2,07 \text{ A};$$

$$I_5 = -I_{5E} = 1,4 \text{ A}; \quad I_6 = \frac{-U_{23} + E_6}{R_6} = 2,51 \text{ A}.$$

В результаті розрахунку одержані числові значення струмів, що співпадають з одержаними при застосуванні МКС у прикладі 1.2.

1.10. Метод накладання

В основу розрахунку електричних кіл методом накладання покладено *принцип суперпозиції* (накладання).

При визначенні кожної з частинних складових струмів за методом накладання припускають, що у схемі діє лише одне джерело енергії. При цьому відсутні джерела ЕРС замінюють їх внутрішніми опорами, відсутні джерела струму – їх внутрішніми провідностями.

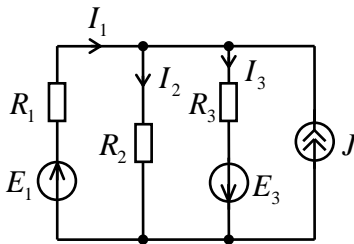
Проілюструємо розрахунок струмів методом накладання на прикладі схеми, зображеної на рис. 1.22, а, припустивши, що всі джерела енергії ідеальні.

Спочатку визначимо струми від дії ЕРС E_1 , закоротивши полюси ЕРС E_3 та відключивши вітку з джерелом струму J (рис. 1.22, б):

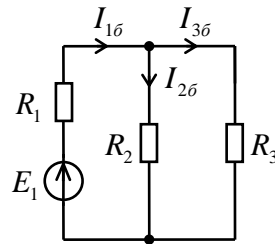
$$I_{1\delta} = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}};$$

$$I_{2\delta} = I_{1\delta} \frac{R_3}{R_2 + R_3};$$

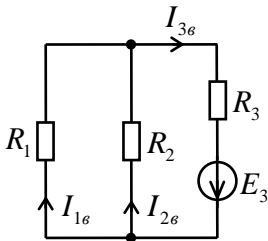
$$I_{3\delta} = I_{1\delta} \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$



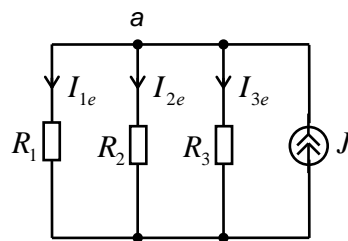
a)



б)



е)



з)

Рис. 1.22

Аналогічно розраховуємо струми для схеми рис. 1.22, в:

$$I_{3e} = \frac{E_3}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}};$$

$$I_{1\bar{6}} = I_{3\bar{6}} \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$I_{2\bar{6}} = I_{3\bar{6}} \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Нарешті, для схеми з джерелом струму (рис. 1.22, з) можна записати:

$$I_{1e} = \frac{U_{ab}}{R_1} = J \frac{R_{екв}}{R_1} = J \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1};$$

$$I_{2e} = J \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1};$$

$$I_{3e} = J \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$

Істинні значення струмів у схемі – це алгебрична сума частинних струмів:

$$I_1 = I_{1\bar{6}} + I_{1\bar{6}} - I_{1e};$$

$$I_2 = I_{2\bar{6}} - I_{2\bar{6}} + I_{2e};$$

$$I_3 = I_{3\bar{6}} + I_{3\bar{6}} + I_{3e}.$$

Очевидно, принцип накладання дійсний для будь-яких лінійних взаємозв'язків, що характеризують електромагнітні процеси (вузлових і контурних рівнянь у струмах і напругах віток, рівнянь контурних струмів та вузлових напруг). Але він недійсний для рівнянь потужностей, оскільки тут причинно-наслідкові зв'язки квадратичні.

1.11. Метод еквівалентного генератора

У літературі цей метод ще називають методом активного двополюсника, методом холостого ходу і короткого замикання. Він ґрунтується на використанні теореми про еквівалентний

генератор. Застосовувати його доцільно для розрахунку струму в одній з віток складного електричного кола. Розглянемо послідовність визначення струму методом еквівалентного генератора ЕРС.

Для розрахунку струму I у довільній вітці $a-b$, опір якої R , треба цю вітку розімкнути і будь-яким відомим методом обчислити напругу на полюсах розімкнутої вітки ($U_{ab_{xx}}$). Вхідний опір пасивного кола відносно полюсів $a-b$ розраховується після заміни короткозамкнутими ділянками всіх джерел ЕРС у схемі та відключення всіх джерел струму.

Струм у вітці $a-b$ визначається по закону Ома (див. формулу 1.26):

$$I = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{\text{вх}} + R}.$$

Приклад 1.6.

Визначити струм I_5 в діагоналі мостової схеми (рис. 1.23, а) методом еквівалентного генератора.

Параметри кола: $E = 120 \text{ В}$, $R_1 = 60 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$, $R_3 = 90 \text{ Ом}$, $R_4 = 60 \text{ Ом}$, $R_5 = 12 \text{ Ом}$.

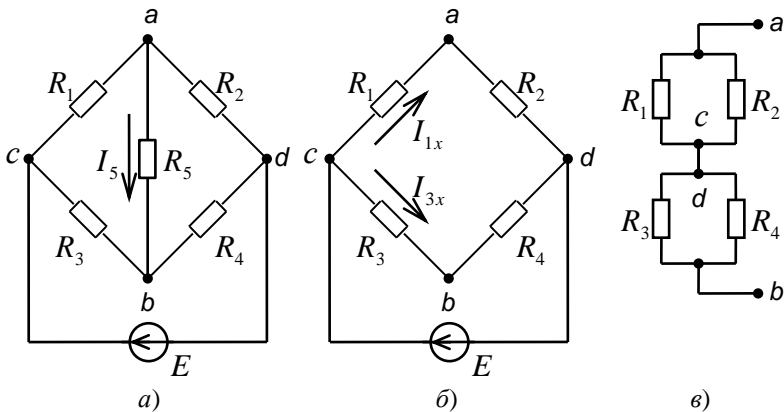


Рис. 1.23

Розв'язок.

Розімкнемо вітку U_{ab} (рис. 1.23, б) та розрахуємо напругу холостого ходу на полюсах розімкненої вітки. Маємо:

$$U_{abxx} = -I_{1x}R_1 + I_{3x}R_3.$$

Визначаємо струми I_{1x} та I_{3x} за законом Ома:

$$I_{1x} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1,6 \text{ A}; \quad I_{3x} = \frac{E}{R_3 + R_4} = 0,8 \text{ A}.$$

Отже, $U_{abxx} = -24 \text{ В}$.

Далі для розрахунку R_{ex} замкнемо джерело ЕРС E . Схема приймає вигляд, зображений на рис. 1.23, в. Тоді:

$$R_{ex} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} = 48 \text{ Ом}.$$

Нарешті, визначаємо шуканий струм:

$$I_5 = \frac{U_{abxx}}{R_{ex} + R_5} = -0,4 \text{ A}.$$

Таким чином, струм I_5 направлений від вузла b до вузла a і дорівнює $0,4 \text{ A}$.

1.12. Потужність у колах постійного струму

Потужністю називають швидкість зміни електромагнітної енергії в часі. Для постійного струму згідно з законом Джоуля-Ленца потужність P визначають співвідношенням:

$$P = UI = RI^2. \quad (1.40)$$

На підставі закону збереження енергії для електричного кола постійного струму алгебрична сума електричних потужностей джерел енергії повинна дорівнювати сумі потужностей, що споживається в навантаженнях кола.

Потужність джерела ЕРС E визначається добутком EI . При цьому джерело ЕРС може працювати в режимі генератора енергії, коли напрями ЕРС та струму збіжні (рис. 1.24, а), або у режимі споживача – якщо напрями E та I протилежні (рис. 1.24, б).

Потужність джерела струму визначається добутком JU (рис. 1.24, в).

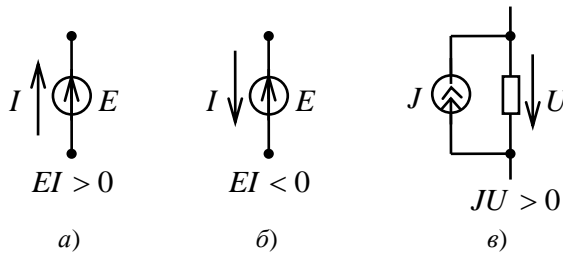


Рис. 1.24

Таким чином, рівняння балансу потужності у загальному вигляді можна записати так:

$$\sum_{k=1}^n E_k I_k + \sum_{p=1}^s U_p J_p = \sum_{k=1}^n R_k I_k^2. \quad (1.41)$$

Під час складання балансу потужності в джерелах враховуються умовно-додатні напрями струмів. Дійсний режим джерел ЕРС чи джерел струмів визначається після підставлення числових значень струмів джерел ЕРС та напруг джерел струмів. Сума в правій частині рівняння (1.41) – арифметична.

Приклад 1.7.

Скласти баланс потужностей для кола, схему якого зображено на рис. 1.7, використавши числові та умовно-додатні напрями струмів, одержані в прикладі 1.2.

Розв'язок.

Згідно з рівнянням (1.41), використовуючи правило знаків для балансу потужності, маємо:

$$\begin{aligned} E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_5 I_5 + E_6 I_6 = \\ = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6. \end{aligned}$$

Звернемо увагу, що в результаті розрахунку струмів було одержано для струму I_1 значення від'ємне, решта струмів –

додатні. Виходить, що в даній схемі джерело ЕРС E_1 працює у режимі споживача, решта джерел енергії працюють у генераторному режимі.

Після підстановки числових значень одержимо:

$$243,6 \text{ Вт} = 243,44 \text{ Вт}.$$

Деяка невелика розбіжність обумовлена похибками заокруглення.

1.13. Передача енергії від активного двополюсника до пасивного

Розглянемо еквівалентну схему заміщення активного двополюсника, яку можна прийняти як спрощену схему лінії електропередачі постійного струму (рис. 1.25, а), навантаженої на опір R_n .

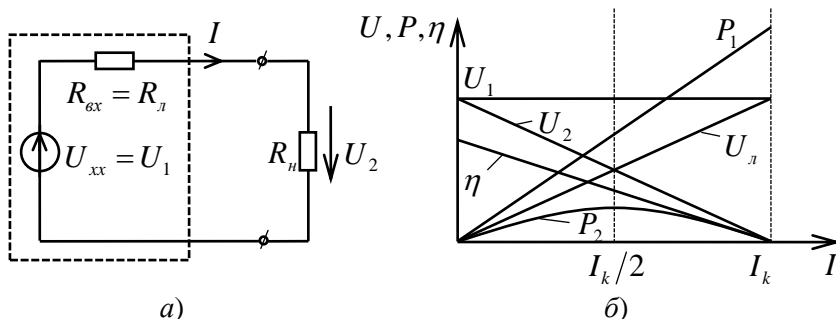


Рис. 1.25

Прийmemo, що напруга U_1 на початку лінії підтримується незмінною, а під опором $R_{вх}$ будемо мати на думці опір прямого і зворотного проводів лінії передачі $R_л$. Тоді у загальному випадку струм:

$$I = \frac{U_1}{R_л + R_n}. \quad (1.42)$$

Перш за все визначимо, при якому співвідношенні між опорами $R_л$ та R_n в навантаженні виділяється максимальна потужність.

Потужність споживача:

$$P_2 = U_1 I - R_l I^2, \quad (1.43)$$

де $U_1 I$ – потужність еквівалентного активного двополюсника;

$R_l I^2$ – потужність втрат у цьому двополюснику.

Щоб визначитися, при якому струмі ця потужність буде максимальною, знайдемо похідну від P_2 по I та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dP_2}{dI} = U_1 - 2R_l I = 0.$$

Звідси:

$$I = \frac{U_1}{2R_l}.$$

Порівнявши отриманий вираз з (1.42), робимо висновок, що потужність максимальна при $R_n = R_l$.

При такому режимі (який, до речі, називають режимом узгодженого навантаження), потужність споживача:

$$P_{2\max} = I^2 R_n = \frac{U_1^2}{4R_l}.$$

Потужність, що генерується джерелом енергії:

$$P_1 = U_1 I. \quad (1.44)$$

Відношення потужності, яка споживається навантаженням, до потужності, що виробляється джерелом енергії, називають коефіцієнтом корисної дії (ККД) лінії η . Отже, маємо:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 I - R_l I^2}{U_1 I} = 1 - \frac{R_l I}{U_1} = \frac{R_n}{R_l + R_n}. \quad (1.45)$$

У режимі узгодженого навантаження $\eta = 0,5$. При $R_n > R_l$ ККД буде більшим, ніж 0,5.

Таким чином, при експлуатації лінії передачі виникає дилема: щоб мати максимальну потужність споживача, треба використати режим узгодженого навантаження, але в такому режимі ККД

невисокий; з іншого боку, для підвищення ККД треба збільшувати R_n , але при цьому зменшується P_2 . Як правило, в реальних лініях електропередачі великої потужності оптимальним вважається $\eta = 0,94 \dots 0,96$, тобто потужність у навантаженні менша від максимальної. При передаванні сигналів по малопотужних лініях зв'язку намагаються одержати максимальне значення P_2 , що приводить до низького ККД.

Потужність втрат у лінії:

$$P_e = R_e I^2 = \rho \frac{2l}{s} \left(\frac{P_2}{U_2} \right)^2, \quad (1.46)$$

де ρ – питомий опір проводів лінії;

l – її довжина;

s – поперечний переріз проводів.

Втрати потужності обернено пропорційні квадратів напруги лінії, що, зокрема, обумовлює загальну тенденцію до підвищення напруг ліній електропередачі.

На рис. 1.25, б показані характеристики лінії електропередачі залежно від струму I .

Напруга U_1 незмінна, за умовою, у всіх режимах роботи лінії. Напруга на навантаженні:

$$U_2 = U_1 - R_l I,$$

тобто характеристика $U_2(I)$ є рівнянням прямої, що проходить через точки з координатами $U_2 = U_1$, $I = 0$ (лінія розімкнута) та $U_2 = 0$, $I = I_k = U_1/R_l$ (коротке замикання лінії). Характеристика $U_l = R_l I$ також є рівнянням прямої.

Характеристики $P_2(I)$, $P_1(I)$, $\eta(I)$ побудовані в відповідності з рівняннями (1.43) – (1.45).

1.14. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.14.1. Визначити напругу на вході схеми (рис. 1.26), якщо струм $I = 0,5 \text{ A}$, а значення опорів в омах наведені на схемі.

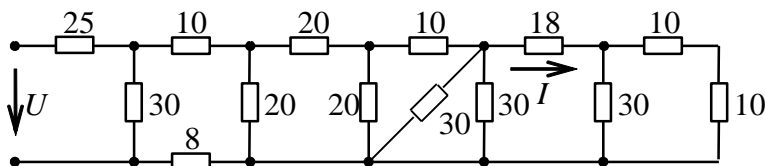


Рис. 1.26

Відповідь: $U = 600 \text{ В}$.

Завдання 1.14.2. Визначити відношення напруги на виході U_2 (рис. 1.27) до напруги на вході кола. Опори окремих віток в омах вказані на схемі.

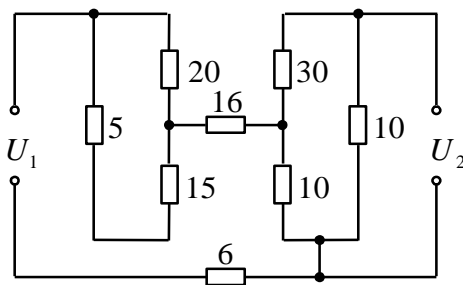


Рис. 1.27

Відповідь: 0,05 .

Завдання 1.14.3. Визначити покази ватметра у схемі, зображеній на рис. 1.28

Параметри схеми: $U = 30 \text{ В}$, $R_1 = 180 \text{ Ом}$, $R_2 = 60 \text{ Ом}$, $R_3 = 80 \text{ Ом}$, $R_4 = 120 \text{ Ом}$, $R_5 = 120 \text{ Ом}$.

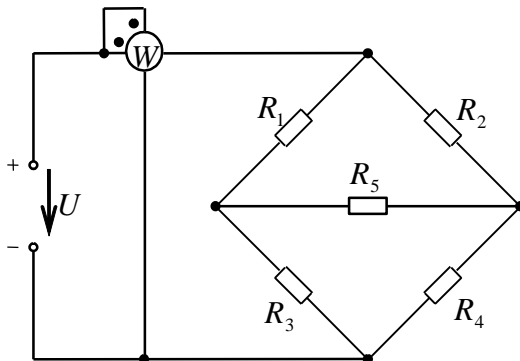


Рис. 1.28

Відповідь: $P = 9 \text{ Вт}$.

Завдання 1.14.4. Розрахувати всі струми у схемі рис. 1.29 методом контурних струмів, якщо: $J = 50 \text{ мА}$, $E = 60 \text{ В}$, $R_1 = 5 \text{ кОм}$, $R_2 = 4 \text{ кОм}$, $R_3 = 16 \text{ кОм}$, $R_4 = 2 \text{ кОм}$, $R_5 = 8 \text{ кОм}$.

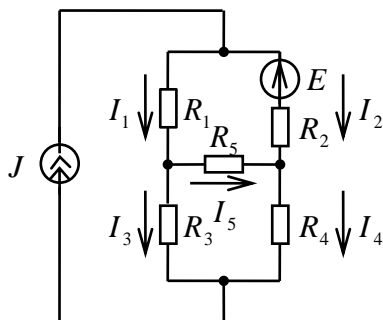


Рис. 1.29

Відповідь: $I_1 = 20 \text{ мА}$, $I_2 = 30 \text{ мА}$, $I_3 = 10 \text{ мА}$, $I_4 = 40 \text{ мА}$, $I_5 = 10 \text{ мА}$.

Завдання 1.14.5. Розрахувати всі струми у схемі рис. 1.30 методом вузлових потенціалів.

Параметри схеми: $E_1 = 160 \text{ мВ}$, $E_2 = 100 \text{ мВ}$, $R_3 = 100 \text{ Ом}$,
 $R_4 = 100 \text{ Ом}$, $R_5 = 150 \text{ Ом}$, $R_6 = 40 \text{ Ом}$.

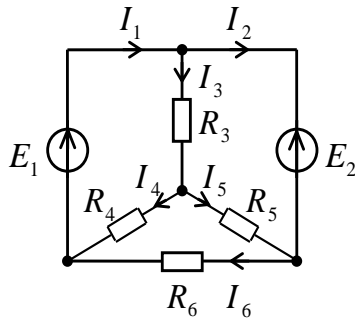


Рис. 1.30

Відповідь: $I_1 = 2,25 \text{ мА}$, $I_2 = 1,4 \text{ мА}$, $I_3 = 0,85 \text{ мА}$,
 $I_4 = 0,75 \text{ мА}$, $I_5 = 0,1 \text{ мА}$, $I_6 = 1,5 \text{ мА}$.

Завдання 1.14.6. Методом еквівалентного генератора струму розрахувати струм I_5 (див. рис. 1.31), якщо схема має параметри: $E_1 = E_2 = 20 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 160 \text{ Ом}$, $R_5 = 20 \text{ Ом}$.

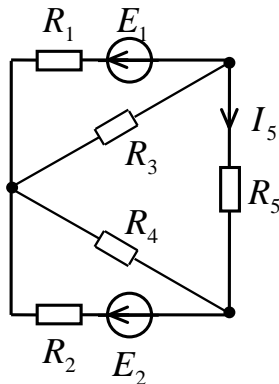


Рис. 1.31

Відповідь: $I_5 = 0,2 \text{ А}$.

Завдання 1.14.7. Для схеми, зображеної на рис. 1.32, визначити, при якому значенні опору R_5 в ньому виділиться максимальна потужність і чому вона дорівнює.

Параметри кола: $U = 72 \text{ В}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$.

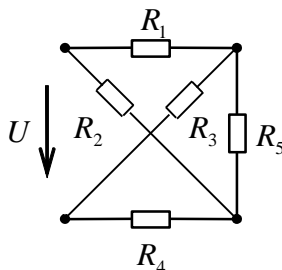


Рис. 1.32

Відповідь: $R_5 = 30 \text{ Ом}$, $P_{\max} = 1,2 \text{ Вт}$.

1.15. Запитання для поточного контролю

1. Дайте визначення вітки, вузла та контура електричного кола.
2. Які джерела енергії називають ідеальними джерелами ЕРС, а які – джерелами струму?
3. Який вигляд мають схеми заміщення реальних джерел ЕРС та джерел струму?
4. Приведіть формулу узагальненого закону Ома для ділянки кола.
5. Сформулюйте перший та другий закони Кірхгофа та приведіть їх аналітичні формулювання.
6. Як визначаються власні та спільні опори незалежних контурів у МКС?
7. Що називають власними та спільними вузловими провідностями у МВП?
8. Пояснити, як розраховують вузлові струми при розрахунку схеми МВП.

-
9. Привести загальний вигляд формули для розрахунку напруги між двома вузлами у схемі з двома вузлами.
 10. Пояснити суть принципу суперпозиції.
 11. Привести формули для перетворення з'єднання опорів трикутником у з'єднання зіркою і навпаки.
 12. Що таке напруга холостого ходу на полюсах вітки та як її визначати?
 13. Як розраховується вхідний опір активного двополюсника?
 14. Як розраховується потужність джерел ЕРС та джерел струму?
 15. Що таке режим узгодженого навантаження, яка потужність виділяється на навантаження у цьому режимі?
 16. Який коефіцієнт корисної дії двополюсника у режимі узгодженого навантаження?

Розділ 2. Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму

2.1. Синусоїдні електричні величини

Електричні величини (струми, напруги, ЕРС), які змінюються в часі, називаються змінними. Значення, яких ці величини набувають кожної миті часу, називають *миттєвими значеннями*. Для позначення миттєвих значень струмів, напруг та ЕРС вживають малі літери: i , u , e . Величини, миттєві значення яких повторюються через рівні проміжки часу в однаковій послідовності, називають *періодичними*, а найменший проміжок часу, через який ці повторення відбуваються, називають *періодом* T . Таким чином, для періодичного струму:

$$i(t) = i(t + T).$$

Величина, обернена періоду змінного струму, називається *частотою* f змінного струму:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота вимірюється в герцах: $f = 1 \text{ Гц}$, якщо $T = 1 \text{ с}$, тобто $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Постійний струм можна розглядати, як такий окремий випадок періодичного струму, для якого період T нескінченно великий, тобто частота дорівнює нулю.

Діапазон частот змінних струмів, що застосовуються в електротехніці, дуже широкий – від десятків до мільярдів герц. У енергетиці України та в державах Європи стандартною є частота 50 Гц , у США – 60 Гц .

Найпростішими для математичного опису періодичними функціями є *синусоїдні функції*. Синусоїдні струми широко використовуються в електроенергетиці, для передачі інформації (зв'язок, радіомовлення, телемеханіка та ін.).

Миттєве значення синусоїдного струму описується виразом:

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right), \quad (2.1)$$

де I_m – максимальне значення, або **амплітуда** струму, аргумент синуса $(2\pi/T + \psi)$ – **фаза** синусоїдного струму.

Кут ψ визначає фазу в початковий момент часу при $t = 0$, і тому називається **початковою фазою**. Фаза синусоїдного струму з часом безперервно зростає, збільшуючись протягом періоду T на величину 2π . Величина $2\pi/T$ показує швидкість, з якою змінюється фаза, і позначається літерою ω .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Величину ω називають **кутовою частотою**. Вимірюється вона числом радіанів, на яке фаза збільшується за секунду. Для частоти $f = 50$ Гц кутова частота $\omega \approx 314$ рад/с.

Миттєві значення синусоїдних струму, напруги та ЕРС запишемо тепер в найбільш поширеному вигляді:

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i); \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u); \\ e &= E_m \sin(\omega t + \psi_e). \end{aligned}$$

На рис. 2.1 побудовані залежності напруги u та струму i від t (або від пропорційної часу величини ωt). Це так звані часові діаграми.

Початкова фаза функції відраховується від моменту початку синусоїди (при переході її через нульове значення від від'ємного до додатного) до початку координат. Для нашого прикладу маємо: $\psi_u > 0$, $\psi_i < 0$. Якщо початкові фази синусоїдних функцій однакової частоти не однакові, то кажуть, що ці функції зсунуті одна відносно одної по фазі. Різницю фаз при цьому називають **зсувом фаз** чи **кутом зсуву фаз**: $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Вимірюють найчастіше в колах синусоїдного струму його **діюче значення**.

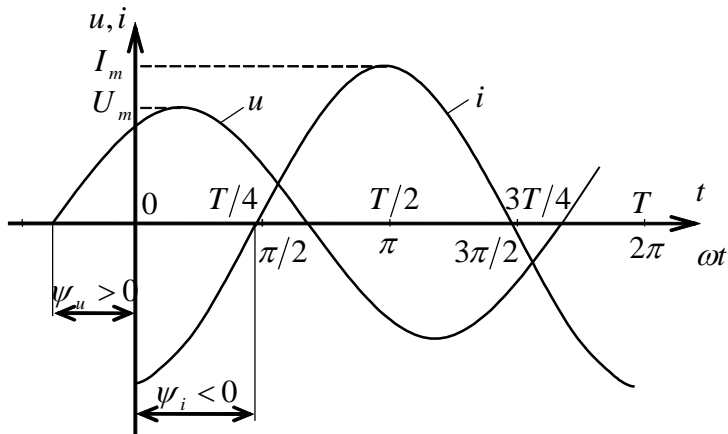


Рис. 2.1

Діюче значення синусоїдного струму ще називають ефективним або середньо-квадратичним. Воно визначається для змінного струму (і для синусоїдного, зокрема) за формулою:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2.2)$$

Підставивши миттєве значення i , маємо:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2}{2} (1 - \cos(2\omega t + 2\psi_i)) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Діючі значення синусоїдних струмів, напруг та ЕРС завжди позначають великими літерами I , U , E . Таким чином:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.3)$$

Діюче значення синусоїдного струму визначає його енергетичну дію. Енергія, що виділяється змінним струмом i в резисторі R за період T :

$$W = \int_0^T Ri^2 dt .$$

Середня електрична потужність P за цей час:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2 dt = RI^2 .$$

Тому часто говорять, що діюче значення синусоїдного струму I чисельно дорівнює такому значенню постійного струму, яке за період T виділяє таку саму кількість енергії, що й змінний.

Середні арифметичні значення синусоїдних функцій за період дорівнюють нулеві. Тому в електротехніці часто використовують їх середні значення за напівперіод $T/2$, а саме:

$$\begin{aligned} I_{\text{сеп}} &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} (-\cos \omega t) \Big|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} I_m ; \\ E_{\text{сеп}} &= \frac{2}{\pi} E_m ; \\ U_{\text{сеп}} &= \frac{2}{\pi} U_m . \end{aligned} \tag{2.4}$$

В електротехніці використовуються синусоїдні напруги та струми з діючими значеннями від мікрвольт та мікроампер до сотень тисяч вольт та десятків тисяч ампер.

Номінальні струми та напруги електротехнічних пристроїв – це, як правило, діючі значення. Для їх вимірювання застосовують прилади теплової, електродинамічної, електромагнітної, електростатичної систем.

Виробляється електрична енергія змінного струму генераторами змінного струму. Конструкція та принцип дії таких генераторів різноманітні, залежать, зокрема, від діапазону генерованих частот та продукуюваної потужності. Розглядається це питання у другій частині нашої дисципліни та у інших курсах.

2.2. Синусоїдний струм в резисторі, котушці індуктивності та конденсаторі

У колах змінного струму навантаженнями можуть бути резистивні, індуктивні та ємнісні елементи. Отримаємо основні розрахункові співвідношення, які характеризують поведінку таких елементів у колах синусоїдного струму.

Для аналізу і розрахунку електричних кіл змінного струму, так само, як і для кіл постійного струму, перш за все треба довільно вибрати умовно-додатні напрями струмів та напруг.

Підключимо резистор з опором R до синусоїдної напруги (рис. 2.2, а):

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Тоді струм:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Таким чином, закон Ома зв'язує між собою миттєві, амплітудні та діючі значення струму та напруги на резисторі:

$$i = \frac{u}{R}; I_m = \frac{U_m}{R}; I = \frac{U}{R}. \quad (2.5)$$

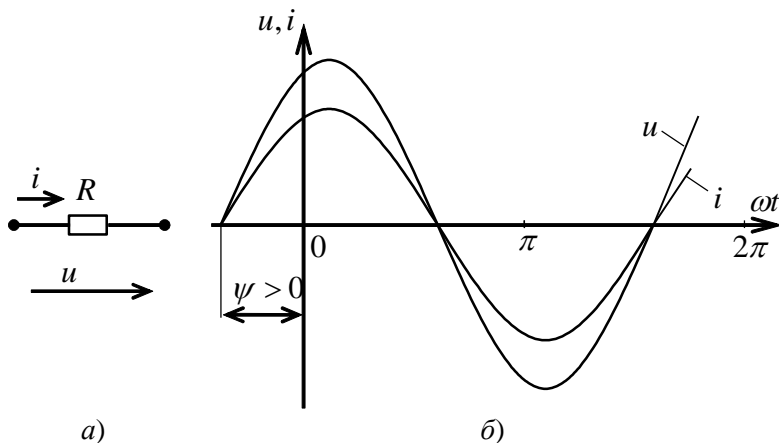


Рис. 2.2

Струм та напруга на резисторі мають однакову фазу, тобто *співпадають* по фазі, і зсув фаз φ дорівнює (рис. 2.2, б):

$$\varphi_R = \psi_u - \psi_i = 0.$$

Оскільки додатні напрями струму і напруги співпадають, то відношення $\frac{u}{i} > 0$, тобто завжди $R > 0$.

Миттєва потужність, що витрачається та такій ділянці кола:

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos(2\omega t + 2\psi)) = \\ &= UI - UI \cos(2\omega t + 2\psi). \end{aligned}$$

Ця потужність має постійну складову UI та складову, що змінюється з подвійною, в порівнянні зі струмом, частотою 2ω . На рис. 2.3 зображена ця залежність $p(t)$, причому для простоти прийнято, що $\psi = 0$. Оскільки миттєві значення струму та напруги завжди мають однакові знаки, то і миттєва потужність завжди додатна. У межах періоду вона змінюється від нуля до $2UI$.

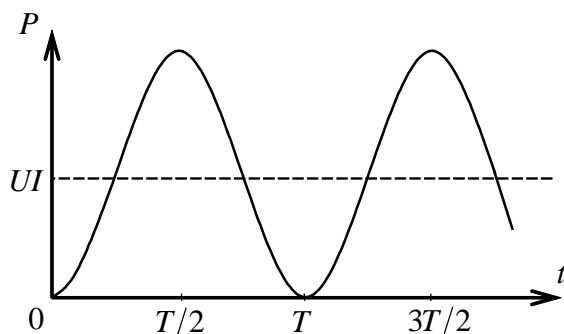


Рис. 2.3

Середнє значення миттєвої потужності за період в колах змінного струму називають *активною потужністю* P .

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt . \quad (2.6)$$

Для резистивного елемента:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI - UI \cos(2\omega t + 2\psi)] dt = UI = I^2 R \quad (2.7)$$

Активна потужність вимірюється в ватах (Вт).

З курсу фізики відомо, що опір провідника на змінному струмі більший, чим при постійному, за рахунок поверхневого ефекту, виникнення вихрових струмів і т.ін. Ці явища слід враховувати при значних частотах. Опір провідника при змінному струмі називають **активним** опором.

На відміну від активного опору, індуктивні та ємнісні елементи не розсіюють енергію, а запасують, накопичують її та можуть повернути назад до кола.

Індуктивним елементом або **індуктивністю** називають ідеалізований елемент електричного кола, що накопичує електричну енергію у магнітному колі. Реальним елементом, властивості якого близькі до такого накопичувача, є котушка індуктивності. Умовне позначення індуктивності L наведено на рис. 2.4, а.

При протіканні змінного струму через індуктивність виникає змінний магнітний потік $\Phi(t)$. Добуток магнітного потоку на кількість витків W котушки (повний магнітний потік) називається потокозчепленням Ψ . І магнітний потік, і потокозчеплення вимірюються в веберах (Вб).

Для лінійної індуктивності зв'язок між струмом і потокозчепленням лінійний:

$$\Psi = Li ,$$

де коефіцієнт пропорційності L **носить назву індуктивності і вимірюється в генрі (Гн).**

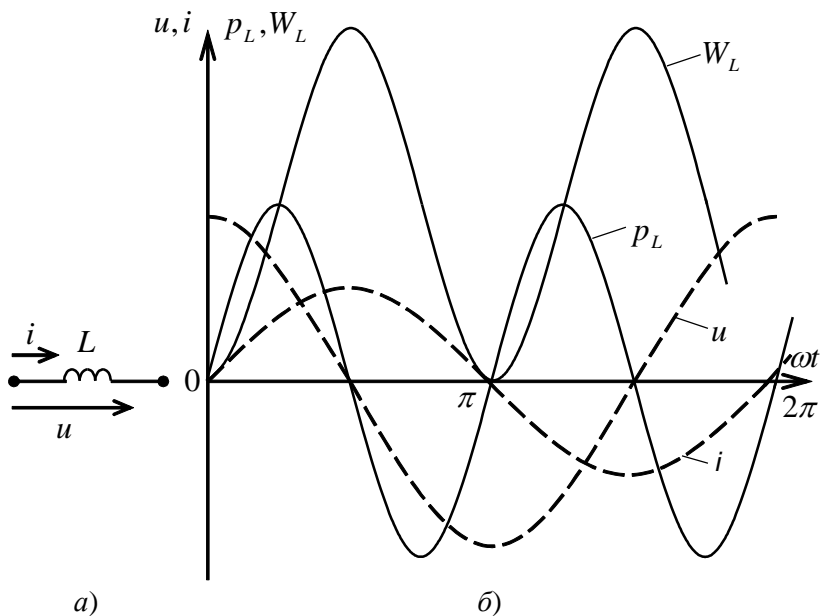


Рис. 2.4

Лінійна індуктивність:

$$L = \frac{\Psi}{i} = const.$$

Згідно з законом електромагнітної індукції Фарадея-Максвелла зміна поточозчеплення в часі викликає появу електрорушійної сили самоіндукції e_L :

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

По закону Ленца (принцип електромагнітної інерції) ЕРС самоіндукції протидіє зміні поточозчеплення.

Напряга на індуктивності:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}. \tag{2.8}$$

Нехай через індуктивність протікає синусоїдний струм:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Тоді напруга на індуктивності:

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= U_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \end{aligned} \quad (2.9)$$

де $U_m = \omega L \cdot I_m$.

З формули (2.9) витікає ряд важливих обставин. По-перше, зсув фаз φ між напругою на індуктивності та струмом через індуктивність:

$$\varphi_L = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2},$$

тобто струм i відстає від напруги u_L за початковою фазою на $\pi/2$.

Коли струм проходить через нуль, напруга на індуктивності досягає максимального (додатного чи від'ємного) значення, оскільки швидкість зміни струму при його проходженні через нуль максимальна. **У колах постійного струму при $I = const$, $dI/dt = 0$ і, як наслідок, u_L дорівнює нулеві.**

По-друге, добуток ωL (має розмірність опору) – це опір індуктивного елемента при частоті струму ω . Його позначають X_L і називають **реактивним опором індуктивності**:

$$X_L = \omega L.$$

Величина, обернена опоріві X_L , називається провідністю і позначається b_L , тобто $b_L = 1/\omega L$.

Нарешті, миттєві значення струму i та напруги u_L зв'язані диференціальним співвідношенням (2.8), але для амплітудних та діючих значень виконується закон Ома:

$$U_m = I_m X_L ; U = IX_L .$$

Розглянемо миттєву потужність, що поступає до індуктивності:

$$\begin{aligned} p_L &= ui = U_m I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} 2 \cos(\omega t + \psi_i) \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= UI \sin 2(\omega t + \psi_i). \end{aligned}$$

Миттєва потужність має амплітуду UI та коливається з подвійною частотою (рис. 2.4, б). Вона більша нуля для інтервалів часу, коли одночасно $i > 0$ та $u_L > 0$ або $i < 0$ та $u_L < 0$, в протилежному разі потужність від'ємна. Середнє значення миттєвої потужності за період (активна потужність P) дорівнює нулеві.

Енергія магнітного поля, що накопичується в індуктивності:

$$\begin{aligned} W_L &= \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_i) = \\ &= \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)). \end{aligned}$$

Вона змінюється в часі з подвійною частотою в межах від 0 до $LI^2/2$, досягаючи максимального значення при амплітудному значенні струму та зменшуючись до нуля при $i = 0$ (рис. 2.4, б). При $p_L > 0$ енергія забирається від джерела та запасується у магнітному полі котушки, при $p_L < 0$ енергія магнітного поля повертається назад до джерела. Так відбувається коливання енергії між джерелом та індуктивністю.

Ємнісний елемент або ємність накопичує енергію в електричному колі. Реальним елементом, близьким за своїми властивостями до ємності, є, наприклад, конденсатор. Умовне позначення ємності наведено на рис. 2.5, а.

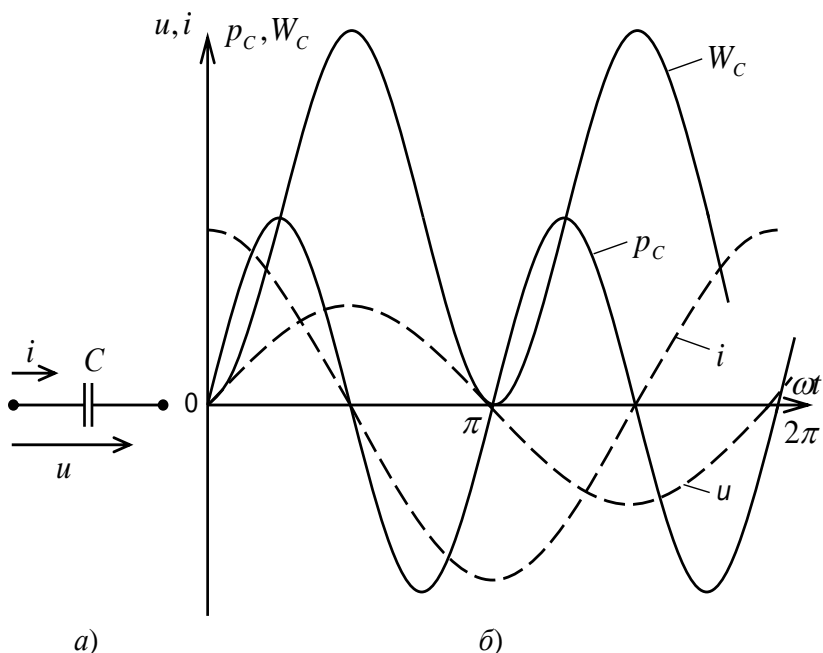


Рис. 2.5

Властивості ємнісного елемента обумовлені можливістю накопичення на ньому електричного заряду q , пропорційного напрузі на елементі:

$$q = Cu_C,$$

де q – заряд, в кулонах (Кл); **коєфіцієнт пропорційності C називається ємністю і вимірюється в фарадах (Φ).**

Для лінійної ємності зв'язок заряду та напруги лінійний і величина $C = q/u_C = const$.

Струм у вітці з ємністю визначається, як швидкість зміни заряду на електродах конденсатора:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}, \text{ звідси } u_C = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (2.10)$$

З формули (2.10) випливає, що струм через ємність дорівнює нулеві, якщо $u_C = const$. **Це означає, що в колах постійного струму через ємність струм протікати не може.**

Нехай напруга на ємності синусоїдна:

$$u_C = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

У відповідності з формулою (2.10) струм:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u) = I_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.11)$$

де $I_m = \omega C \cdot U_m$.

Таким чином, як випливає з формули (2.11), **струм через ємність випереджає за початковою фазою напругу u_C на кут $\pi/2$** , тобто, при максимальних (додатних чи від'ємних) значеннях напруги u_C , а значить і заряду q , струм i дорівнює нулеві.

Добуток $\omega C = b_C$ – **провідність** ділянки з ємністю. Величина, обернена провідності, називається **реактивним опором ємності** і позначається X_C , тобто:

$$X_C = 1/(\omega C).$$

Амплітудні та діючі значення струму та напруги на ємності зв'язані між собою законом Ома:

$$I_m = \frac{U_m}{X_C}; \quad I = \frac{U}{X_C}.$$

Миттєва потужність, що надходить до ємності:

$$p_C = ui = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = UI \sin 2(\omega t + \psi_u).$$

Вона змінюється за таким само законом, як і для індуктивного елемента (рис. 2.5, б).

Енергія електричного поля ємності:

$$W_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_u) = \frac{CU^2}{2} (1 - \cos 2(\omega t + \psi_u))$$

змінюється періодично з частотою 2ω у межах від 0 до $CU^2/2$.

Надходячи від джерела, енергія запасється в електричному колі ємності, а потім знову повертається до джерела.

Таким чином, як і в випадку індуктивності, відбувається коливання енергії між джерелом та ємністю.

2.3. Закони Кірхгофа в диференційній формі

Зв'язок між струмами та напругами в електричних колах синусоїдного (як і в колах постійного) струму визначається законами Кірхгофа. Для складання рівнянь за законами Кірхгофа довільно вибирають додатні напрями миттєвих значень струмів у вітках та додатні напрями обходу незалежних контурів.

Перший закон Кірхгофа формулюється так: алгебрична сума миттєвих значень струмів віток, що сходяться у вузлі електричного кола, дорівнює нулеві.

Другий закон Кірхгофа: алгебрична сума миттєвих значень падінь напруг у замкненому контурі дорівнює алгебричній сумі миттєвих значень ЕРС у цьому контурі.

Правила знаків для складання законів Кірхгофа залишаються такими самими, як і для кіл постійного струму. Складемо рівняння законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 2.6.

Довільно позначивши додатні напрями струмів та вибравши незалежні контури і додатні напрями їх обходу, маємо:

$$\text{вузол } a : i_1 - i_2 - i_6 = 0;$$

$$\text{вузол } b : i_4 - i_1 - i_3 = 0;$$

$$\text{вузол } c : i_2 + i_3 + i_5 = 0.$$

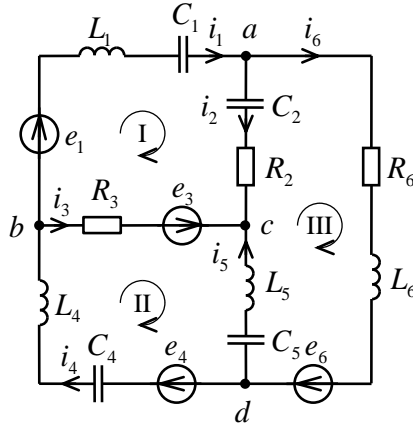


Рис. 2.6

$$\text{Контур I: } L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_2 R_2 - i_3 R_3 = e_1 - e_3;$$

$$\begin{aligned} \text{контур II: } i_3 R_3 - L_5 \frac{di_5}{dt} - \frac{1}{C_5} \int i_5 dt + \frac{1}{C_4} \int i_4 dt + L_4 \frac{di_4}{dt} = \\ = e_3 + e_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{контур III: } i_6 R_6 + L_6 \frac{di_6}{dt} + \frac{1}{C_5} \int i_5 dt + L_5 \frac{di_5}{dt} - i_2 R_2 - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = \\ = e_6. \end{aligned}$$

Отримали систему лінійних інтегро-диференційних рівнянь для знаходження шести невідомих струмів, кожен з яких, нагадаємо, являє собою синусоїдну функцію. Очевидно, що така тригонометрична форма розрахунку електричних кіл може застосовуватися тільки для найпростіших кіл, інакше розрахунок виявиться вкрай важким.

2.4. Символічне зображення синусоїдних функцій

Розрахунок кіл змінного струму значно спрощується, якщо зображувати синусоїдні струми, напруги та ЕРС векторами чи комплексними числами. Застосування комплексних чисел до

аналізу електричних кіл введене в інженерну практику А.Е. Кеннелі та Ч.П. Штейнметцем в 1893 – 1894 рр.

Нагадаємо деякі основні визначення з теорії комплексних чисел.

Комплексним числом називається співвідношення, що має вигляд:

$$C = a + jb,$$

де a , b – дійсні числа, j – уявна одиниця, що задовольняє рівність $j^2 = -1$. Число a називається **дійсною частиною**, число b – **уявною частиною** числа C , і позначаються відповідно: $a = \operatorname{Re} C$, $b = \operatorname{Im} C$. Таку форму запису комплексного числа називають **алгебричною**.

Комплексне число можна зобразити точкою чи відповідним радіус-вектором на комплексній площині. Осі Ox та Oy (у прямокутній декартовій системі координат) називаються відповідно дійсною та уявною осями. Додатний напрям дійсної осі прийнято позначати знаком $+1$, додатний напрям уявної осі – знаком $+j$ (рис. 2.7, а).

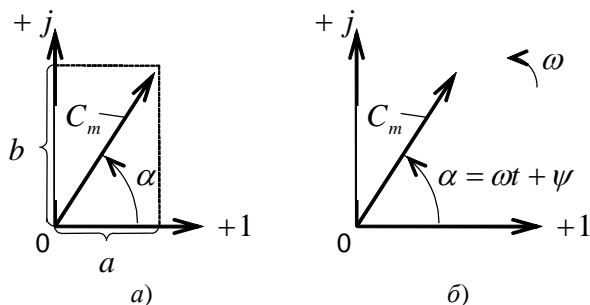


Рис. 2.7

На комплексній площині комплексне число зображається радіус-вектором, проекція якого на дійсну вісь дорівнює a , на уявну – b . Тоді:

$$a + jb = C_m \cos \alpha + jC_m \sin \alpha = C_m e^{j\alpha}.$$

Одержані дві нові форми запису комплексного числа називаються відповідно **тригонометричною** та **показниковою (полярною)**. Величина C_m називається **модулем**, α – **аргументом чи фазою** комплексного числа.

Припустимо, що радіус-вектор з модулем C_m обертається на комплексній площині в напрямку проти годинникової стрілки з кутовою частотою ω . Тоді для будь-якого моменту часу t аргумент числа можна записати так:

$$\alpha = \omega t + \psi ,$$

де ψ – початкова фаза при $t = 0$.

У такому випадку:

$$C_m e^{j(\omega t + \psi)} = C_m \cos(\omega t + \psi) + j C_m \sin(\omega t + \psi)$$

або $\operatorname{Re}[C_m e^{j(\omega t + \psi)}] = C_m \cos(\omega t + \psi)$,

$$\operatorname{Im}[C_m e^{j(\omega t + \psi)}] = C_m \sin(\omega t + \psi).$$

З останньої формули виходить, що синусоїдна функція часу може розглядатися як уявна частина відповідної комплексної функції. Часто кажуть, що функція $C_m e^{j(\omega t + \psi)}$ є **символічним чи комплексним зображенням** синусоїдної функції $C_m \sin(\omega t + \psi)$, і записують це так:

$$C_m \sin(\omega t + \psi) \sim C_m e^{j(\omega t + \psi)}.$$

Тоді:

$$C_m e^{j(\omega t + \psi)} = C_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} = \dot{C}_m e^{j\omega t},$$

де \dot{C}_m – комплексна величина, модуль якої дорівнює C_m , а кут, під яким вектор C_m проведений відносно осі $+1$ на комплексній площині, дорівнює початковій фазі ψ . Величина

$$\dot{C}_m = C_m e^{j\psi} \tag{2.12}$$

називається **комплексною амплітудою** (комплексні величини, що є зображеннями синусоїдних функцій часу, прийнято в електротехнічній літературі позначати великими літерами або з

крапкою зверху, або підкресленими знизу. Обрано, таким чином, перший з цих варіантів).

Комплексна амплітуда – це комплексна величина, що не залежить від часу. Модуль і аргумент комплексної амплітуди дорівнюють відповідно амплітуді та початковій фазі гармонічної функції часу. Відповідність між комплексною амплітудою та синусоїдною функцією часу взаємно однозначна. Наприклад, для синусоїдної функції $i = 12 \sin(\omega t + 48^\circ)$ комплексна амплітуда $\dot{I}_m = 12e^{j48^\circ}$, а комплексній амплітуді $\dot{E}_m = 45e^{-j115^\circ}$ відповідає синусоїдна функція $e = 45 \sin(\omega t - 115^\circ)$.

Введення поняття про комплексну амплітуду значно спрощує математичні операції над гармонічними функціями, а саме: замість перетворень синусоїдних функцій можна виконувати відповідні перетворення їх комплексних амплітуд, а потім результат цих перетворень переносити в площину часових функцій.

Особливості виконання деяких математичних операцій з комплексними числами приводяться в додатку 1.

На зображенні гармонічних функцій часу комплексними амплітудами ґрунтується символічний (комплексний) метод розрахунку кіл синусоїдного струму.

2.5. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Розглянемо застосування **методу комплексних амплітуд** для послідовного та паралельного з'єднання елементів R , L , C у колі синусоїдного струму.

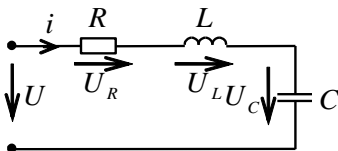


Рис. 2.8

Нехай при послідовному з'єднанні цих елементів (рис. 2.8) у колі протікає струм:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \sim \dot{I}_m.$$

Напруга на затискачах схеми:

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = \\ &= I_m R \sin(\omega t + \psi_i) + I_m \omega L \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) + \\ &+ I_m \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) \end{aligned}$$

Безумовно, сума трьох синусоїдних функцій – теж функція синусоїдна, тобто:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Позначимо комплексну амплітуду вхідної напруги $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ та замінимо синусоїдні напруги на елементах кола їх відповідними символічними зображеннями:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = \dot{I}_m \operatorname{Re} e^{j\omega t} + \dot{I}_m \omega L e^{j\omega t} e^{j90^\circ} + \dot{I}_m \frac{1}{\omega C} e^{j\omega t} e^{-j90^\circ}$$

Скоротивши всі частини рівняння на множник $e^{j\omega t}$ та врахувавши, що $e^{j90^\circ} = j$, $e^{-j90^\circ} = \frac{1}{e^{j90^\circ}} = \frac{1}{j} = -j$, одержимо

другий закон Кірхгофа в комплексній формі:

$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m.$$

Винесемо за дужки \dot{I}_m :

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right). \quad (2.13)$$

Величина в дужках має назву **комплексного опору** ділянки електричного кола і позначається великою буквою Z :

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX. \quad (2.14)$$

Таким чином, одержано рівняння:

$$\dot{U}_m = Z\dot{I}_m,$$

що визначає **закон Ома для комплексних амплітуд**. Поділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{2}$, одержимо **закон Ома для комплексних діючих значень**:

$$\dot{U} = Z\dot{I}. \quad (2.15)$$

При розрахунках електричних кіл синусоїдного струму найчастіше оперують якраз діючими значеннями струмів та напруг.

У формулі (2.14) для визначення комплексного опору Z маємо: R – активний опір кола, X – реактивний опір кола. Раніше було визначено, що активний опір R додатний, тобто завжди $R > 0$. Реактивний опір X – величина алгебрична, і, як видно з (2.14), $X > 0$ для випадку, коли $X_L > X_C$, та $X < 0$, якщо $X_L < X_C$. У першому випадку кажуть, що коло має індуктивний характер, у другому – характер кола ємнісний. Перейдемо до показникової форми запису:

$$Z = R + jX = ze^{j\varphi}. \quad (2.16)$$

Тут $z = |Z|$ – модуль комплексного числа Z – є повним опором кола, φ – аргумент комплексного опору.

Співвідношення, що зв'язують між собою складові комплексного опору кола, очевидні:

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}, \quad (2.17)$$

$$R = z \cos \varphi, \quad X = z \sin \varphi.$$

Комплекс діючого значення струму в колі:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{ze^{j\varphi}} = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = \frac{U}{z} e^{j\psi_i}.$$

Аргумент комплексного опору $\varphi = \psi_u - \psi_i$ визначає зсув початкових фаз між напругою та струмом для ділянки кола. Це величина алгебрична: $\varphi > 0$, якщо напруга випереджає по фазі струм на ділянці кола, та $\varphi < 0$, коли напруга відстає по фазі від струму.

Комплексні діючі значення струмів та напруг на комплексній площині можна зобразити відповідними обертовими векторами. Прийнято ці вектори будувати для моменту $t = 0$ (зрозуміло, що арифметичні операції над такими векторами можна виконувати тільки в тому випадку, коли вони мають однакову частоту обертання ω). **Діаграма, утворена сукупністю векторів струмів та напруг, побудованих з дотримання їх взаємної орієнтації, називається векторною діаграмою.**

Побудуємо векторну діаграму для послідовного R, L, C -кола. За початковий вектор зручно приймати вектор струму \dot{I} (рис. 2.9, а). Напруга на активному опорі \dot{U}_R співпадає по фазі зі струмом \dot{I} , напруга на індуктивності \dot{U}_L випереджає струм \dot{I} на 90° , напруга на ємності \dot{U}_C відстає від струму на 90° . Вектор вхідної напруги \dot{U} є сумою векторів \dot{U}_R , \dot{U}_L та \dot{U}_C . У нашому випадку векторна діаграма побудована в припущенні, що $X_C > X_L$, тобто характер кола – ємнісний.

Прямокутний трикутник, катетами якого є \dot{U}_R та $\dot{U}_L + \dot{U}_C$, а гіпотенузою – \dot{U} , називають **трикутником напруг**. Величину вектора \dot{U}_R називають активною складовою напруги ($U_a = U_R$), величину вектора $\dot{U}_L + \dot{U}_C$ – відповідно реактивною складовою напруги ($U_p = |\dot{U}_L + \dot{U}_C|$).

Розділивши всі сторони трикутника напруг на величину струму I , одержимо трикутник опорів (рис. 2.9, б, в).

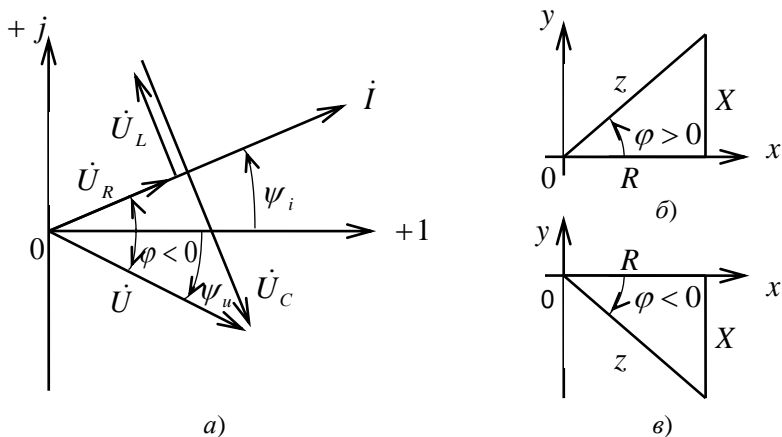


Рис. 2.9

Прийнято опір R відкладати в додатному напрямку осі Ox , а опір X , в залежності від його знаку, в додатному ($X > 0$) чи від'ємному ($X < 0$) напрямку осі Oy . Взаємозв'язок між величинами z , R , X та φ , визначений формулами (2.17), одержує прозору геометричну інтерпретацію.

Розглянемо тепер паралельне з'єднання елементів R , L та C (рис. 2.10) у колі синусоїдного струму.

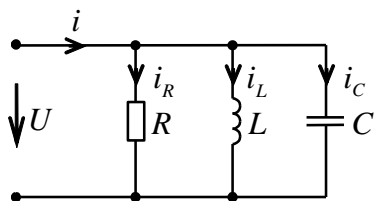


Рис. 2.10

Позначимо комплекс діючого значення напруги на вході $\dot{U}_m = Ue^{j\psi_u}$. За першим законом Кірхгофа для миттєвих значень:

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Перейдемо від миттєвих значень струмів до відповідних їм комплексних діючих значень, визначених за законом Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= \frac{\dot{U}}{R} = g\dot{U}; \\ \dot{I}_L &= \frac{\dot{U}}{j\omega L} = -jb_L\dot{U}; \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}}{1/j\omega C} = jb_C\dot{U}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

У формулі (2.18): $g = 1/R$ – активна провідність, $b_L = 1/X_L = 1/\omega L$ – реактивна провідність вітки з індуктивністю, $b_C = 1/X_C = \omega C$ – реактивна провідність вітки з ємністю.

Струм на вході схеми:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U}(g - jb_L + jb_C) = \\ &= \dot{U}(g + j(b_C - b_L)) = \dot{U}(g + jb) = \dot{U}Y. \end{aligned}$$

Величина $Y = g + jb$ є комплексною провідністю даної схеми. Тоді можна записати:

$$Y = g + jb = ye^{j\varphi}, \quad (2.19)$$

де $y = |Y|$ – величина комплексної провідності Y , φ – аргумент комплексної провідності. Очевидно, що:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{g^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{g}; \\ g &= y \cos \varphi; \quad b = y \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Побудуємо векторну діаграму для паралельного з'єднання елементів. Початковим вектором зручно вважати вектор напруги \dot{U} (рис. 2.11, а). Вектори струмів \dot{I}_R , \dot{I}_L та \dot{I}_C будуємо під відповідними кутами до цієї напруги.

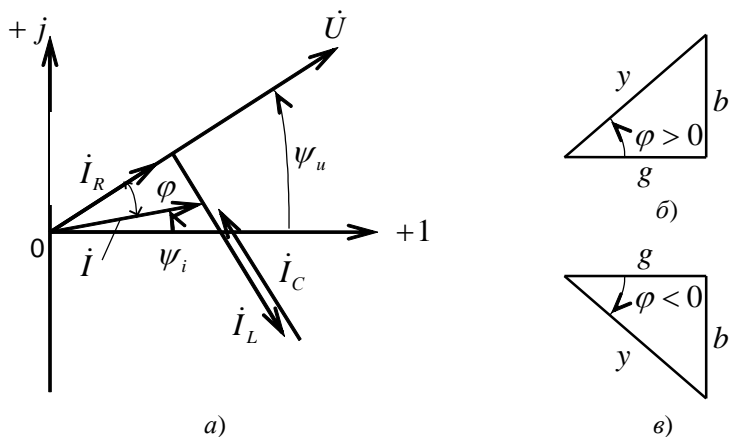


Рис. 2.11

Прямокутний трикутник з катетами \dot{I}_R та $\dot{I}_L + \dot{I}_C$ і гіпотенузою \dot{I} називається трикутником струмів. Величина \dot{I}_R називається активною складовою струму $I_a = I_R$, реактивна складова струму $I_p = |\dot{I}_L + \dot{I}_C|$. Розділивши всі сторони трикутника струму на напругу U , маємо трикутник провідностей. Трикутники провідностей зображені на рис. 2.11, б, в для двох режимів роботи схеми: при ємнісному характері кола $b_C > b_L$ і $\varphi > 0$ та при індуктивному характері схеми: $\varphi < 0$, оскільки $b_L > b_C$.

Одержані таким чином співвідношення між струмами та напругами в комплексній формі дають можливість сформулювати закони Кірхгофа в комплексному (символічному) вигляді. Перший закон Кірхгофа: **алгебрична сума комплексів діючих значень струмів віток, що сходяться у вузлі схеми, дорівнює нулеві.** Тобто:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0. \quad (2.21)$$

Другий закон Кірхгофа: у замкнутому контурі кола алгебрична сума комплексних діючих значень спадів напруги дорівнює алгебричній сумі комплексних діючих значень ЕРС:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k \left(R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} \right) = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k. \quad (2.22)$$

Правила знаків при формуванні цих рівнянь залишаються такими ж самими, як і для рівнянь законів Кірхгофа в диференційній формі.

Виходячи з цих міркувань, запишемо рівняння законів Кірхгофа в комплексному (символічному) вигляді для схеми, зображеної на рис. 2.12.

$$\text{Вузол } a: \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0;$$

$$\text{вузол } b: -\dot{I}_1 + \dot{I}_4 - \dot{I}_6 = 0;$$

$$\text{вузол } c: \dot{I}_2 - \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0.$$

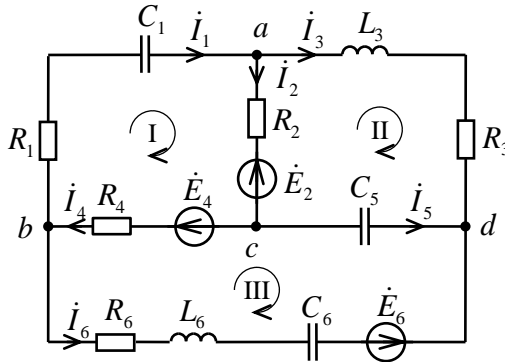


Рис. 2.12

$$\text{контур I: } R_1 \dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 + R_4 \dot{I}_4 = -\dot{E}_2 + \dot{E}_4;$$

$$\text{контур II: } j\omega L_3 \dot{I}_3 + R_3 \dot{I}_3 - \frac{1}{j\omega C_5} \dot{I}_5 - R_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_2;$$

$$\text{контур III: } -R_4 \dot{I}_4 + \frac{1}{j\omega C_5} \dot{I}_5 - \frac{1}{j\omega C_6} \dot{I}_6 - j\omega L_6 \dot{I}_6 - R_6 \dot{I}_6 = -\dot{E}_4 - \dot{E}_6.$$

Отже, застосування символічних зображень синусоїдних функцій дозволило перейти від системи інтегро-диференціальних рівнянь до системи рівнянь алгебричних, що має значно спростити розв'язок.

Приклад 2.1.

Реостат з опором $R = 50 \text{ Ом}$, котушка індуктивності з активним опором дроту $R_L = 40 \text{ Ом}$ та індуктивністю $L = 0,35 \text{ Гн}$ і конденсатор з ємністю $C = 19,9 \text{ мкФ}$ з'єднані послідовно (рис. 2.13). Схема підключена до напруги $u = 141 \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ В}$ з частотою $f = 50 \text{ Гц}$. Визначити діюче значення струму в колі та записати його миттєве значення.

Розв'язок.

Для знаходження струму в колі використовуємо закон Ома для комплексних діючих значень (формула 2.15):

$$\dot{I} = \dot{U} / Z.$$

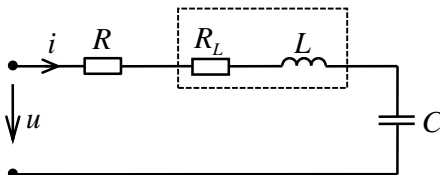


Рис. 2.13

Комплексне діюче значення напруги на вході кола:

$$\dot{U} = U e^{j\psi_U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_U} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j15^\circ} = 100 e^{j15^\circ} \text{ В.}$$

Розрахуємо комплексний опір схеми.

Кутова частота $\omega = 2\pi f = 314 \text{ рад/с}$. Реактивні опори індуктивності X_L та ємності X_C :

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0,35 = 110 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 19,9} = 160 \text{ Ом.}$$

Комплексний опір кола:

$$\begin{aligned} Z &= R + R_L + jX_L - jX_C = 50 + 40 + j110 - j160 = \\ &= 90 - j50 = 103e^{-j29^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Модуль z та фазу φ комплексного опору розраховуємо за співвідношеннями (2.17):

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{90^2 + 50^2} = 103 \text{ Ом}; \\ \varphi &= \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{-50}{90} = -29^\circ. \end{aligned}$$

Тоді комплексне діюче значення струму в колі:

$$\dot{i} = \frac{100e^{j15^\circ}}{103e^{-j29^\circ}} = 0,97e^{j44^\circ} \text{ А.}$$

Миттєве значення струму має амплітуду $I_m = \sqrt{2}I = \sqrt{2} \cdot 0,97 = 1,37 \text{ А}$ та початкову фазу $\psi_i = 44^\circ$, тобто $i = 1,37 \sin(\omega t + 44^\circ) \text{ А}$.

Приклад 2.2.

На вхід схеми, зображеної на рис. 2.14, *a*, подається напруга, комплексна амплітуда якої $\dot{U}_m = 70,5e^{-j30^\circ} \text{ В}$. Параметри кола: $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 79,7 \text{ мГн}$, $C = 15,9 \text{ мкФ}$, частота вхідної напруги $f = 100 \text{ Гц}$. Визначити комплексні діючі значення усіх струмів та побудувати векторну діаграму.

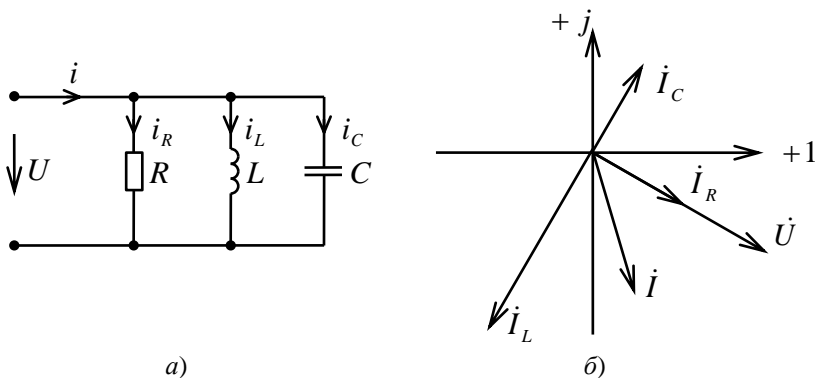


Рис. 2.14

Розв'язок.

Комплекс діючого значення напруги на вході:

$$\dot{U} = \frac{70,5}{\sqrt{2}} e^{-j30^\circ} = 50 e^{-j30^\circ} \text{ В.}$$

Кутова частота сигналу на вході:

$$\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 100 = 628 \text{ рад/с.}$$

Комплексна провідність кола:

$$\begin{aligned} Y &= g - j(b_L - b_C) = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = \\ &= \frac{1}{100} - j\left(\frac{10^3}{628 \cdot 79,7} - 628 \cdot 15,9 \cdot 10^{-6}\right) = \\ &= 0,01 - j(0,02 - 0,01) = 0,01 - j0,01 = 0,014 e^{-j45^\circ} \text{ См.} \end{aligned}$$

Струм на вході кола:

$$\dot{I} = \dot{U}Y = 50 e^{-j30^\circ} \cdot 0,014 e^{-j45^\circ} = 0,7 e^{-j75^\circ} \text{ А}$$

Струми на ділянках кола:

$$\dot{I}_R = g\dot{U} = 0,5 e^{-j30^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_L = -jb_L\dot{U} = 0,02 e^{-j90^\circ} \cdot 50 e^{-j30^\circ} = 1 e^{-j120^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = j b_C \dot{U} = 0,01 e^{j90^\circ} \cdot 50 e^{-j30^\circ} = 0,5 e^{j60^\circ} \text{ A.}$$

Перевірку правильності розрахунків виконаємо за першим законом Кірхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C;$$

$$0,7 e^{-j75^\circ} = 0,5 e^{-j30^\circ} + 1 e^{-j120^\circ} + 0,5 e^{j60^\circ};$$

$$0,18 - j0,68 = 0,43 - j0,25 - 0,5 - j0,87 + 0,25 + j0,43;$$

$$0,18 - j0,68 = 0,18 - j0,69.$$

Векторна діаграма струмів зображена на рис. 2.14, б.

2.6. Розрахунок складних електричних кіл комплексним методом

Для розрахунку електричних кіл синусоїдного струму застосовують всі методи розрахунку кіл постійного струму. При цьому замість постійних струмів, напруг, потенціалів та ЕРС необхідно використовувати комплексні амплітудні (чи діючі) значення цих величин, а також користуватися комплексними опорами та провідностями.

Приклад 2.3.

Розрахувати струми в схемі, зображеній на рис. 2.15, методом контурних струмів, якщо: $e_1 = 141 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}$, $e_2 = 141 \sin \omega t \text{ В}$, $L_1 = 160 \text{ мГн}$, $L_2 = 180 \text{ мГн}$, $C_1 = 10 \text{ мкФ}$, $C_2 = 20 \text{ мкФ}$, $R_3 = 70 \text{ Ом}$, $f = 80 \text{ Гц}$.

Розв'язок.

Задамо напрямки контурних струмів у контурах I та II схеми та складемо систему рівнянь для невідомих контурних струмів \dot{I}_{11} та \dot{I}_{22} :

$$\begin{cases} \dot{I}_{11} Z_{11} + \dot{I}_{22} Z_{12} = \dot{E}_{11}; \\ \dot{I}_{11} Z_{21} + \dot{I}_{22} Z_{22} = \dot{E}_{22}. \end{cases}$$

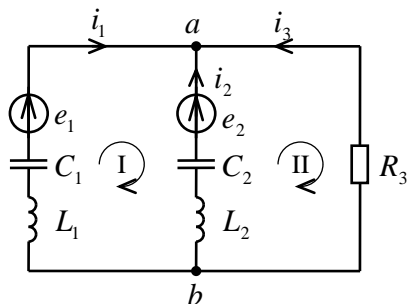


Рис. 2.15

У цих рівняннях комплексні опори:

$$Z_{11} = j\omega L_1 + 1/j\omega C_1 + 1/j\omega C_2 + j\omega L_2;$$

$$Z_{22} = R_3 + j\omega L_2 + 1/j\omega C_2;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -j\omega L_2 - 1/j\omega C_2.$$

Контурні ЕРС:

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2; \quad \dot{E}_{22} = \dot{E}_2.$$

Розраховуємо опори реактивних елементів кола:

$$\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 80 \approx 500 \text{ рад/с};$$

$$\omega L_1 = 500 \cdot 0,16 = 80 \text{ Ом};$$

$$\omega L_2 = 500 \cdot 0,18 = 90 \text{ Ом};$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{500 \cdot 10^{-5}} = 200 \text{ Ом};$$

$$\frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{500 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = 100 \text{ Ом}.$$

Отже:

$$Z_{11} = j(80 - 200 - 100 + 90) = -j130 \text{ Ом};$$

$$Z_{22} = 70 + j(90 - 100) = (70 - j10) \text{ Ом};$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -j(90 - 100) = j10 \text{ Ом.}$$

Комплексні ЕРС:

$$\dot{E}_1 = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} = 100 e^{j60^\circ} = (50 + j86,6) \text{ В;}$$

$$\dot{E}_2 = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В;}$$

$$\dot{E}_{11} = (-50 + j86,6) \text{ В;} \quad \dot{E}_{22} = 100 \text{ В.}$$

Система рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(-j130) + \dot{I}_{22}(j10) = -50 + j86,6; \\ \dot{I}_{11}(j10) + \dot{I}_{22}(70 - j10) = 100. \end{cases}$$

Розв'язок отриманої системи рівнянь відносно контурних струмів \dot{I}_{11} та \dot{I}_{22} дає:

$$\dot{I}_{11} = -0,56 - j0,36 = 0,67 e^{j213^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{22} = 1,34 + j0,27 = 1,37 e^{j11,4^\circ} \text{ А.}$$

Реальні струми у вітках:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 0,67 e^{j213^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{11} = 1,9 + j0,63 = 2 e^{j18,3^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_{22} = -1,37 e^{j11,4^\circ} = 1,37 e^{j191,4^\circ} \text{ А.}$$

Приклад 2.4.

Визначити струми в схемі, зображеній на рис. 2.15, методом двох вузлів.

Розв'язок.

Розрахуємо напругу \dot{U}_{ab} :

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\sum_{k=1}^n \dot{E}_k Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_k} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Для даної схеми:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{1}{-j120} = j0,00833 \text{ См};$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{-j10} = j0,1 \text{ См};$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R_3} = 0,0143 \text{ См};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \frac{100e^{j60^\circ} \cdot 0,00833e^{j90^\circ} + 100 \cdot 0,1e^{j90^\circ}}{0,0143 + j0,1083} = \\ &= \frac{10,4e^{j94^\circ}}{0,109e^{j82,5^\circ}} = 95,4e^{j11,5^\circ} \text{ В} \end{aligned}$$

Розраховуємо струми у вітках за законом Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}) Y_1 = \\ &= (100e^{j60^\circ} - 95,4e^{j11,5^\circ}) \cdot 0,00833e^{j90^\circ} = \\ &= -0,56 - j0,36 = 0,67e^{j213^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= (\dot{E}_2 - \dot{U}_{ab}) Y_2 = (100 - 95,4e^{j11,5^\circ}) \cdot 0,1e^{j90^\circ} = \\ &= 1,9 + j0,63 = 2e^{j18,3^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= -\dot{U}_{ab} Y_3 = -95,4e^{j11,5^\circ} \cdot 0,0143 = \\ &= -1,34 - j0,27 = 1,37e^{j191,5^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Значення струмів, розрахованих для схеми рис. 2.15 двома методами, повністю співпадають.

Приклад 2.5.

Визначити струм i_1 у цій же схемі методом еквівалентного генератора.

Розв'язок.

Відключаємо приймач $Z_1 = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$ та визначаємо напругу холостого ходу на затискачах розімкненої вітки (рис. 2.16, а).

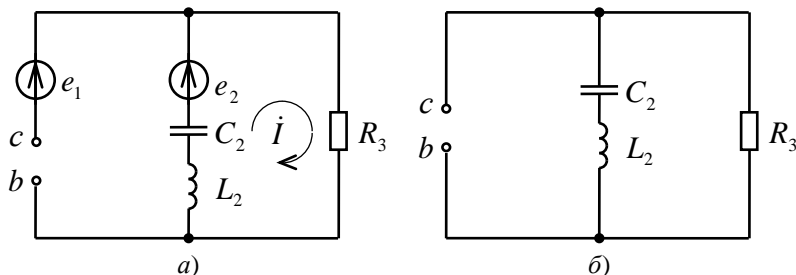


Рис. 2.16

Розрахуємо за законом Ома струм \dot{I} у тій частині схеми, що залишилася:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_2}{R_3 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{100}{70 - j10} = 1,41e^{j8,1^\circ} \text{ A.}$$

Отже:

$$\dot{U}_{bc,xx} = -\dot{I}R_3 + \dot{E}_1 = -1,41e^{j8,1^\circ} \cdot 70 + 100e^{j60^\circ} = 87e^{j123,5^\circ} \text{ B.}$$

Визначимо вхідний опір схеми відносно затискачів розімкненої вітки (рис. 2.16, б):

$$Z_{\text{ex}} = \frac{\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) R_3}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_3} = \frac{10e^{-j90^\circ} \cdot 70}{70 - j10} = 9,87e^{-j81,9^\circ} \text{ Ом.}$$

Шуканий струм \dot{I}_1 дорівнює:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{bc_{xx}}}{Z_{\text{ex}} + Z_1} = \frac{87e^{j123,5^\circ}}{9,87e^{-j81,9^\circ} - j120} = 0,67e^{j213,5^\circ} \text{ А.}$$

Отримане значення струму \dot{I}_1 співпадає з результатами розрахунку двома попередніми методами.

2.7. Потужність в колах синусоїдного струму

Про миттєву потужність на ділянках кола, що складаються з R , L чи C , вже згадувалося у § 2.2. Розглянемо більш загальний випадок. Нехай напруга на вході пасивного двополюсника та вхідний струм описуються законами:

$$u = U_m \sin \omega t ;$$

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Тоді миттєва потужність:

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)) = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Миттєва потужність має постійну складову $UI \cos \varphi$ та змінну складову, частота якої у два рази більша за частоту напруги та струму (рис. 2.17). Потужність, яка надходить до двополюсника, додатна ($p > 0$), коли напруга та струм мають однакові знаки (тобто, направлені однаково). Потужність від'ємна, коли напруга та струм направлені зустрічно одне відносно одного. У цьому випадку потужність повертається до джерела.

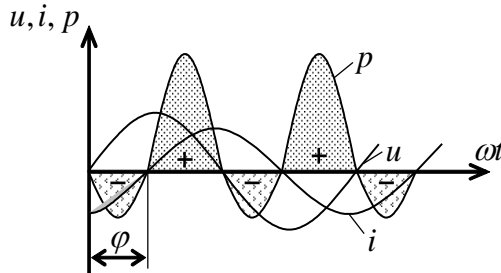


Рис. 2.17

Середнє значення миттєвої потужності за період є **активною потужністю** P , тобто:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T (UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)) dt = UI \cos \varphi. \quad (2.24)$$

Нагадаємо, що для реальних споживачів енергії $|\varphi| \leq \pi/2$. Тому активна потужність не залежить від знаку кута φ .

Активна потужність не може бути від'ємною, інакше двополюсник не споживав би енергію, а генерував її. Максимальне значення потужності, як випливає з (2.24), $P = UI$, що відповідає $\varphi = 0$, тобто чисто активному характеру двополюсника. З іншого боку, $P = 0$, коли $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, тобто якщо двополюсник має чисто індуктивний чи ємнісний характер опору. Активна потужність вимірюється в ватах (Вт).

Електричні машини та апарати характеризують **повною потужністю** S :

$$S = UI. \quad (2.25)$$

Очевидно, що повна потужність є максимально можливим значенням потужності при заданих значеннях струмів та напруг. Вимірюється повна потужність у вольт-амперах (ВА). Як свідчить формула (2.25), повна потужність не залежить від кута φ , тобто не залежить від характеру навантаження.

Повна потужність характеризує експлуатаційні можливості багатьох електротехнічних пристроїв, для яких вона приводиться, як номінальна: $S_{ном} = U_{ном} I_{ном}$. Оскільки для

споживачів, як правило $\cos \varphi \neq 1$, то навіть при номінальних значення напруги генератора та струму у колі енергетичні можливості джерела використовуються не повністю, оскільки $P < S_{ном}$.

Для оцінки енергетичних процесів у колі при неповному використанні можливостей джерела користуються поняттям так званої **реактивної потужності** Q :

$$Q = UI \sin \varphi . \quad (2.26)$$

Реактивна потужність додатна, якщо $\varphi > 0$, тобто $\psi_u > \psi_i$, що відповідає активно-індуктивному характеру опору двополюсника. У випадку активно-ємнісного опору $\psi_u < \psi_i$, тобто $\varphi < 0$, а значить, і реактивна потужність від'ємна. Вимірюється реактивна потужність у вольт-амперах реактивних (Var).

Відношення активної потужності P до повної потужності S називають в електроенергетиці **коефіцієнтом потужності**:

$$\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi .$$

Для більш повного використання потужностей електричних машин та апаратів коефіцієнт потужності повинен прямувати до одиниці, тобто у навантаженні повинен бути якнайменший зсув фаз між напругою та струмом.

Як випливає з формул (2.24) – (2.26), активна, реактивна та повна потужності зв'язані між собою співвідношеннями:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} ; P = S \cos \varphi ; Q = S \sin \varphi . \quad (2.27)$$

Ці співвідношення знаходять графічну ілюстрацію трикутником потужностей (рис. 2.18).

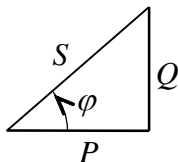


Рис. 2.18

У колах синусоїдного струму використовують також поняття комплексної потужності. Нехай комплексні значення напруги та струму на вході двополюсника відповідно \dot{U} та \dot{I} . Розглянемо добуток комплексної напруги на спряжений комплекс струму \dot{I}^* :

$$\begin{aligned}\dot{U} \dot{I}^* &= U e^{j\psi_u} \cdot I e^{-j\psi_i} = U e^{j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{j\varphi} = \\ &= UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.\end{aligned}$$

Добуток $\dot{U} \dot{I}^*$ позначається \tilde{S} і називається **комплексною потужністю**. Отже:

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= P + jQ \text{ і відповідно} \\ P &= \operatorname{Re} \tilde{S}, \quad Q = \operatorname{Im} \tilde{S}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Крім того, враховуючи основні співвідношення § 2.5, можна записати:

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \dot{U} \dot{I}^* = Z \dot{I} \dot{I}^* = Z I^2; \quad S = z I^2 = y U^2; \\ P &= UI \cos \varphi = z I^2 \cos \varphi = R I^2 = g U^2; \\ Q &= UI \sin \varphi = z I^2 \sin \varphi = X I^2 = b U^2.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Як і в колах постійного струму, у колах синусоїдного струму повинен виконуватися баланс потужностей: миттєвих, активних, реактивних та комплексних. **У відповідності з законом збереження енергії сума активних потужностей джерел енергії дорівнює сумі активних потужностей споживачів, а сума реактивних потужностей джерел енергії дорівнює сумі реактивних потужностей споживачів.**

Приклад 2.6.

Для електричного кола, схема якого зображена на рис. 2.19, розрахувати комплексну потужність, яка віддається джерелом. Перевірити виконання балансу потужностей.

Параметри кола: $\dot{U} = 150e^{-j28^\circ} \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 50 \text{ Ом}$,
 $L_1 = 80 \text{ мГн}$, $L_3 = 32 \text{ мГн}$, $C_2 = 106 \text{ мкФ}$, частота $f = 50 \text{ Гц}$.

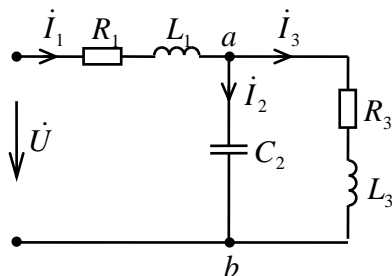


Рис. 2.19

Розв'язок:

Розрахуємо вхідний струм \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z},$$

де Z – вхідний опір кола.

$$Z = Z_1 + Z_{ab} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3},$$

і, відповідно:

$$Z_1 = R_1 + jX_{L_1}; \quad Z_2 = -jX_{C_2}; \quad Z_3 = R_3 + jX_{L_3}.$$

Реактивні складові опорів віток при частоті $\omega = 2\pi f = 314 \text{ рад/с}$:

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 314 \cdot 0,08 = 25 \text{ Ом};$$

$$X_{L_3} = \omega L_3 = 314 \cdot 0,032 = 10 \text{ Ом};$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{10^6}{314 \cdot 106} = 30 \text{ Ом}.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} Z &= 20 + j25 + \frac{(50 + j10)(-j30)}{50 - j20} = \\ &= 20 + j25 + 28,4e^{-j56,9^\circ} = 35,53e^{j1,9^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплекс діючого значення вхідного струму:

$$\dot{i} = \frac{150e^{-j28^\circ}}{35,53e^{j1,9^\circ}} = 4,22e^{-j29,9^\circ} \text{ А.}$$

Комплексна потужність на вході схеми:

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 150e^{-j28^\circ} \cdot 4,22e^{j29,9^\circ} = 633e^{j1,9^\circ} \text{ В}\cdot\text{А.}$$

Активна потужність:

$$P = \operatorname{Re} \tilde{S} = \operatorname{Re}(633e^{j1,9^\circ}) = 633 \cos 1,9^\circ = 632,7 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність:

$$Q = \operatorname{Im} \tilde{S} = \operatorname{Im}(633e^{j1,9^\circ}) = 633 \sin 1,9^\circ = 21 \text{ Вар.}$$

Для перевірки балансу потужностей розрахуємо струми другої та третьої віток:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_2} = \frac{\dot{I}_1 Z_{ab}}{Z_2} = \frac{4,22e^{-j29,9^\circ} \cdot 28,4e^{-j56,9^\circ}}{30e^{-j90^\circ}} = 3,99e^{+j3,2^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_3} = \frac{4,22e^{-j29,9^\circ} \cdot 28,4e^{-j56,9^\circ}}{51e^{j11,3^\circ}} = 2,35e^{-j98,1^\circ} \text{ А.}$$

Активна потужність, що споживається навантаженням:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 4,22^2 \cdot 20 = 356,2 \text{ Вт;}$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = 2,35^2 \cdot 50 = 276,1 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність на навантаженні:

$$Q_1 = I_1^2 X_{L_1} = 4,22^2 \cdot 25 = 445,2 \text{ Вар;}$$

$$Q_2 = -I_2^2 X_{L_2} = -3,99^2 \cdot 30 = -478,6$$

Вар;

$$Q_3 = I_3^2 X_{L_3} = 2,35^2 \cdot 10 = 55,2 \text{ Вар.}$$

Тоді:

$$P_\Sigma = P_1 + P_3 = 632,3 \text{ Вт, тобто } P_\Sigma = P;$$

$$Q_\Sigma = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 21,8 \text{ Вар, тобто } Q_\Sigma = Q;$$

$$S_\Sigma = \sqrt{P_\Sigma^2 + Q_\Sigma^2} = 632,7 \text{ ВА; } \varphi_\Sigma = \arctg \frac{Q_\Sigma}{P_\Sigma} = 1,9^\circ;$$

$$\tilde{S} = 632,7 e^{-j1,9^\circ} \text{ ВА.}$$

Впевнімося на прикладі, що для повних потужностей баланс не виконується, тобто:

$$S \neq S_1 + S_2 + S_3.$$

Справді, при рівності сум комплексних величин суми їх модулів у загальному випадку не дорівнюють одна одній. Для нашого прикладу:

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 570,1 \text{ ВА;}$$

$$S_2 = Q_2 = 478,6 \text{ ВА;}$$

$$S_3 = \sqrt{P_3^2 + Q_3^2} = 281,6 \text{ ВА.}$$

Дійсно, для повних потужностей баланс не виконується:

$$632,7 \text{ ВА} \neq (570,1 + 478,6 + 281,6) \text{ ВА.}$$

Приклад 2.7.

В електричному колі (рис. 2.20): $R = 10 \text{ Ом}$, $X_C = 30 \text{ Ом}$, $E = 100 \text{ В}$. При якому опорі навантаження у ньому виділиться максимальна потужність і чому вона буде дорівнювати?

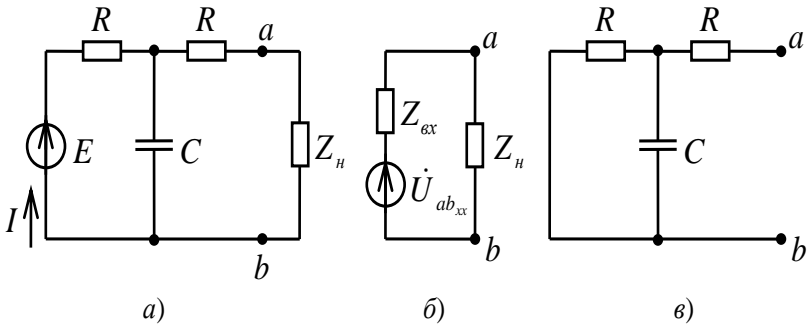


Рис. 2.20

Замінімо частину схеми, що знаходиться ліворуч від полюсів ab , еквівалентним генератором ЕРС (рис. 2.20, б).

Визначимо параметри $\dot{U}_{ab_{xx}}$ та Z_{ex} еквівалентного генератора:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab_{xx}} &= \dot{I}(-jX_C) = \frac{\dot{E}}{R - jX_C}(-jX_C) = \\ &= \frac{100}{10 - j30}(-j30) = 90 - j30 = 95e^{-j18,4^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Z_{ex} , згідно з рис. 2.20, в:

$$Z_{ex} = R + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = 10 + \frac{-j30 \cdot 10}{10 - j30} = (19 - j3) \text{ Ом.}$$

Максимальна потужність у навантаженні буде виділятися при умові, перш за все, коли коло буде мати чисто активний опір ($\varphi = 0$). Отже, реактивна складова Z_n повинна компенсувати реактивну складову Z_{ex} . Крім того, згідно з режимом узгодженого навантаження (§ 1.14), необхідно виконати умову $R_{ex} = R_n$.

Таким чином, максимальна потужність у навантаженні буде виділятися при умові, якщо:

$$Z_n = (19 + j3) \text{ Ом.}$$

Ця потужність:

$$P_{H_{\max}} = \frac{U_{ab_{xx}}^2}{4R_H} = \frac{95^2}{4 \cdot 19} = 118 \text{ Вт.}$$

2.8. Резонанс в електричних колах

В електричних колах, що мають в своєму складі і індуктивні, і ємнісні навантаження, при певних умовах виникають резонансні явища.

Ознакою резонансного режиму двополюсника є відсутність зсуву фаз між напругою на вході двополюсника та вхідним струмом, тобто, при резонансі вхідний опір чи вхідна провідність двополюсника стають чисто активними, а їх реактивні складові дорівнюють нулеві.

У колах з послідовним з'єднанням індуктивного та ємнісного опорів може виникати **резонанс напруг**, при паралельному з'єднанні таких елементів може спостерігатися **резонанс струмів**.

Розглянемо, за яких умов може виникнути резонанс напруг та які наслідки цього явища.

Нехай резистор, індуктивність та ємність з'єднані послідовно (рис. 2.21, а) та підключаються до напруги $u = U_m \sin \omega t$.

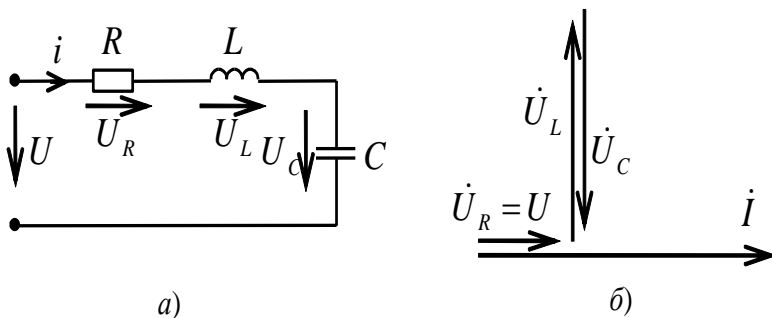


Рис. 2.21.

Струм у колі:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{R + j(X_L - X_C)}.$$

Співпадати за фазою напруга \dot{U} та струм \dot{I} будуть при умові, що $X_L - X_C = 0$. Тобто, **умовою** виникнення резонансу напруг є рівність індуктивного та ємнісного опорів:

$$X_L = X_C, \text{ або } \omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (2.30)$$

Частота, на якій спостерігається резонанс у такій схемі, називається резонансною частотою ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ або } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (2.31)$$

На резонансній частоті маємо:

$$X_L = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина $\rho = \sqrt{L/C}$ називається **характеристичним опором** LC - кола чи контура.

Проаналізуємо **наслідки** резонансного режиму роботи послідовного RLC -контура.

Оскільки на резонансній частоті опір контура $Z = R$, тобто має мінімальне значення, то струм при резонансі максимальний: $\dot{I} = \dot{U}/R$. Вся вхідна напруга виявляється прикладеною до активного опору, а сума $\vec{U}_L + \vec{U}_C = 0$ (рис. 2.21, б).

Ще одним наслідком резонансного режиму роботи контура є виділення на опорі R максимальної потужності. Справді, оскільки $P = UI \cos \varphi$, а при резонансі напруг струм I максимальний, причому $\cos \varphi = 1$, то і активна потужність, яка споживається колом при резонансі, набуває максимального значення.

Проходячи через рівні за величиною при резонансі опори X_L та X_C , струм обумовлює і рівні за величиною напруги U_L та U_C . Значення цих напруг може бути суттєво більшим, ніж напруга U на вході схеми. Відношення U_L чи U_C до вхідної напруги називаються **добротністю** Q послідовного RLC контура.

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\rho I}{RI} = \frac{\rho}{R}. \quad (2.32)$$

Добротність Q показує, таким чином, величину перенапруги на L та C при резонансній частоті. Можливість виникнення таких перенапруг необхідно враховувати, щоб уникнути пошкодження ізоляції.

Однак, у послідовному RLC - колі напруги U_L та U_C приймають максимальне значення не при резонансній частоті, а відповідно дещо вище та нижче ω_0 . Проілюструємо цей факт за допомогою так званих **частотних** характеристик: $X_L(\omega)$, $X_C(\omega)$, $I(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$.

Залежності опорів $X_L(\omega) = \omega L$, $X_C(\omega) = 1/\omega C$ та $X = X_L - X_C$ від частоти зображені на рис. 2.22, *а*. На рис. 2.22, *б* приведені характеристики $I(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$, визначені залежностями:

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}};$$

$$U_L(\omega) = I(\omega) \cdot \omega L, \quad U_C(\omega) = I(\omega) \cdot \frac{1}{\omega C}.$$

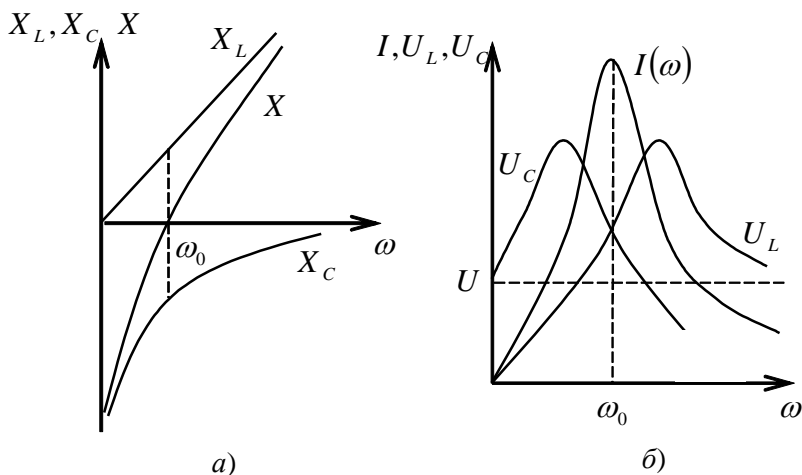


Рис. 2.22

При $\omega = 0$ напруга на вході кола не змінюється в часі, струм $I = 0$, відповідно і $U_L = 0$, і вся вхідна напруга виявляється на конденсаторі $U_C = U$. При зміні частоти від 0 до ω_0 реактивний опір $X = X_L - X_C$ має ємнісний характер та змінюється від $-\infty$ до 0. Внаслідок цього струм збільшується від 0 до максимального значення. В інтервалі частот від ω_0 до $+\infty$ реактивний опір має індуктивний характер та змінюється від 0 до $+\infty$. Струм починає зменшуватися від максимального значення до нуля.

Напруга на індуктивності U_L дорівнює нулю при $\omega = 0$, з ростом ω вона може збільшуватися тільки до тих пір, доки струм не почне зменшуватися швидше, ніж зростає ω . Після цього U_L спадає, прямуючи до U на нескінченно великій частоті. Напруга на ємності U_C , що дорівнює прикладеній до входу кола напрузі U при $\omega = 0$, збільшується, доки струм зростає швидше, ніж ω , потім U_C зменшується, прямуючи до нуля. Криві $U_L(\omega)$ та

$U_C(\omega)$ перетинаються при $\omega = \omega_0$, причому ордината точки перетину дорівнює QU .

Резонанс струмів може виникати при паралельному з'єднанні L та C (рис. 2.23, а). Ознака резонансу ($\varphi = 0$) з'являється, коли комплексна провідність кола стає чисто активною величиною.

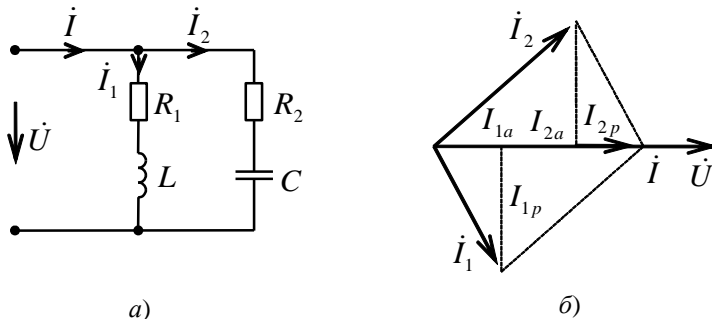


Рис. 2.23

Комплексна провідність кола:

$$Y = Y_1 + Y_2$$

де

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = g_1 - jb_1, \\ Y_2 &= \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2 + 1/(j\omega C)} = \\ &= \frac{R_2}{R_2^2 + (1/(\omega C))^2} + j \frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + (1/(\omega C))^2} = g_2 + jb_2. \end{aligned}$$

Таким чином:

$$Y_1 = (g_1 + g_2) + j(b_2 - b_1).$$

При резонансі $Y_1 = g_1 + g_2$, оскільки $b_2 - b_1 = 0$.

Тоді умову резонансу можна записати у вигляді:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + (1/(\omega C))^2}. \quad (2.33)$$

Розв'язавши рівняння (2.33) відносно частоти, маємо для резонансної частоти:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (2.34)$$

На відміну від резонансу напруг, коли резонансна частота залежить тільки від параметрів L та C (див. формулу 2.31), досягти резонансу струмів на певній частоті можна, змінюючи чотири величини: L , C , R_1 , R_2 . При цьому, як свідчить формула (2.34), резонанс струмів може спостерігатися при виконанні певних додаткових умов, а саме:

- а) якщо одночасно $\rho > R_1$ та $\rho > R_2$;
- б) якщо одночасно $\rho < R_1$ та $\rho < R_2$;
- в) якщо $R_1 = R_2 = 0$ (тоді (2.34) співпадає з (2.31));
- г) якщо $R_1 = R_2 = \rho$ (резонанс може виникати на будь-якій частоті).

При інших умовах частота ω за (2.34) приймає уявне значення.

Векторна діаграма кола при резонансі зображена на рис. 2.23, б. Реактивні складові струмів I_{1p} та I_{2p} при резонансі однакові, компенсують одна одну, і струм на вході кола співпадає за фазою з вхідною напругою. Оскільки провідність кола при резонансі мінімальна, то мінімальним буде і вхідний струм. Для ідеальних віток (з $R_1 = 0$ та $R_2 = 0$) вхідний опір кола нескінченний, тоді $\dot{I} = 0$.

Наприкінці проаналізуємо енергетичні процеси електричних кіл при резонансі. Для послідовного та ідеального паралельного резонансних кіл струм I_L та напруга U_C мають зсув фаз $\pm \pi/2$, тобто, при $i_L = I_{Lm} \sin \omega t$ напруга $u_C = \pm U_{Cm} \cos \omega t$. Енергія магнітного й електричного кола відповідно:

$$W_m = \frac{Li_L^2}{2} = LI_L^2 \sin^2 \omega t ;$$

$$W_e = \frac{Cu_C^2}{2} = CU_C^2 \cos^2 \omega t .$$

Враховуючи, що при резонансі:

$$CU_C^2 = C \left(\frac{I_L}{\omega_0 C} \right)^2 = C(I_L \omega_0 L)^2 = C \left(I_L \frac{L}{\sqrt{LC}} \right)^2 = LI_L^2 ,$$

сумарна енергія цих полів:

$$W_m + W_e = LI_L^2 = CU_C^2 = const .$$

Отже, при резонансі сумарна енергія магнітного й електричного полів є сталою величиною. За коливальним законом індуктивність та ємність обмінюються енергією, якою вони запаслися під час приєднання кола до джерела, тобто під час перехідного процесу. Енергія від джерела живлення в усталеному режимі надходить тільки до резистора, перетворюючись, зокрема, на теплову енергію.

Приклад 2.8

Визначити параметри котушки (R_L, L) , ємність C конденсатора та опір резистора R , включених в коло, зображене на рис. 2.24, *a*, якщо при резонансі прилади показали: $U = 200$ В, $U_1 = 204$ В, $U_2 = 180$ В, $I = 4$ А. Частота змінного струму $f = 50$ Гц. Прилади – електромагнітної системи.

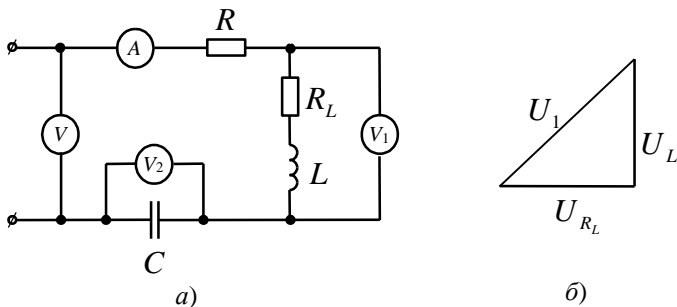


Рис. 2.24

Розв'язок.

Прилади показують діючі значення струму та напруг.

Визначимо за показами приладів опір конденсатора X_C :

$$X_C = \frac{U_2}{I} = \frac{180}{4} = 45 \text{ Ом.}$$

Ємність конденсатора визначаємо з умови: $X_C = 1/\omega C$. Отже:

$$C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{X_C \cdot 2\pi f} = \frac{1}{45 \cdot 314} = 70,8 \text{ мкФ.}$$

При резонансі напруг $X_L = X_C = 45 \text{ Ом}$. Звідси:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{45}{314} = 143 \text{ мГн.}$$

Напруга $U_L = U_C = U_2$ (при резонансі). За показами вольтметра V_1 , використовуючи трикутник напруг (рис. 2.24, б), знайдемо напругу на активному опорі котушки:

$$U_{R_L} = \sqrt{U_1^2 - U_2^2} = \sqrt{204^2 - 180^2} = 96 \text{ В.}$$

Звідси:

$$R_L = \frac{U_{R_L}}{I} = \frac{96}{4} = 24 \text{ Ом.}$$

При резонансі напруг опір контуру чисто активний, тобто:

$$R_K = R + R_L = \frac{U}{I} = \frac{200}{4} = 50 \text{ Ом.}$$

Отже, $R = R_K - R_L = 26 \text{ Ом.}$

Приклад 2.9

До котушки індуктивності, параметри якої $R = 11,2 \text{ Ом}$, $L = 4 \text{ мГн}$, підключений паралельно конденсатор ємністю $C = 2,5 \text{ мкФ}$ (рис. 2.25, а). При якій частоті наступить резонанс струмів? Для знайденої частоти визначити повний опір кола. Побудувати векторну діаграму при резонансі, якщо $U = 10 \text{ В}$.

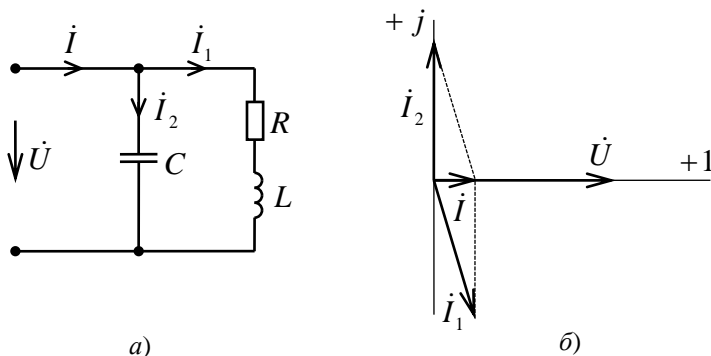


Рис. 2.25

Розв'язок.

Розрахуємо частоту резонансу струмів у колі за формулою:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}},$$

де

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ рад/с;}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-6}}} = 40 \text{ Ом.}$$

Отже:

$$\omega = 10^4 \sqrt{\frac{40^2 - 11,2^2}{40^2}} = 9600 \text{ рад/с.}$$

Провідність кола при резонансі чисто активна:

$$Y = g_1 + g_2 = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + 0 = \frac{11,2}{11,2^2 + (9,6 \cdot 4)^2} = 0,007 \text{ См.}$$

Повний опір кола при резонансі:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0,007} = 143 \text{ Ом.}$$

Розрахуємо струми в колі на резонансній частоті:

$$\dot{I} = \dot{U}Y = 10 \cdot 0,007 = 0,07 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{U}Y_1 = \dot{U}(g_1 - jb_1),$$

де

$$b_1 = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{9600 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{11,2^2 + (9,6 \cdot 4)^2} = 0,024 \text{ См.}$$

Отже:

$$\dot{I}_1 = 10(0,007 - j0,024) = 0,25e^{-j73,7^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}Y_2 = \dot{U}(jb_2) = 10(j0,024) = 0,24e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

Векторна діаграма струмів зображена на рис. 2.25, б.

2.9. Кола із взаємною індуктивністю

При аналізі кіл синусоїдного струму з котушками індуктивності ми до цих пір враховували лише явище самоіндукції, тобто наведення ЕРС в індуктивності при зміні потокозчеплення, обумовленого струмом у цій котушці.

Якщо дві котушки індуктивності розміщені поряд (рис. 2.26) чи намотані на спільне осердя, то магнітний потік однієї котушки буде частково чи повністю перетинати витки другої котушки. Такі котушки індуктивності зі спільним (взаємним)

магнітним полем називаються зв'язаними (індуктивно зв'язаними).

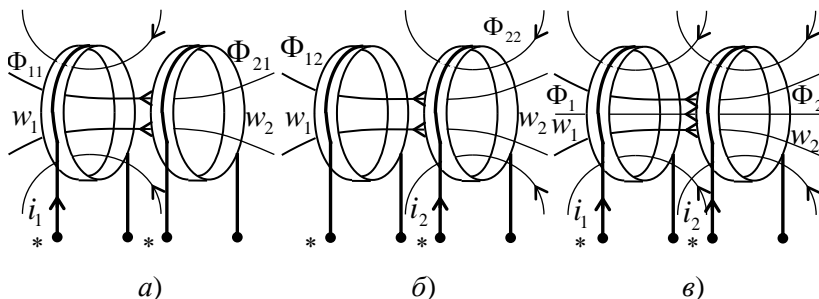


Рис. 2.26

На рис. 2.26 *a*, *б* схематично показані магнітні потоки двох котушок, створені струмом i_1 при $i_2 = 0$ та струмом i_2 при $i_1 = 0$.

Магнітний потік, створений струмом i_1 (рис. 2.26, *a*) розпадається на дві частини. Перша з них, Φ_{11} , перетинає витки власної котушки, друга, Φ_{21} , досягає витків сусідньої котушки. Потокозчеплення, обумовлене струмом i_1 , можна записати:

$$\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11}; \Psi_{21} = w_2 \Phi_{21}, \quad (2.35)$$

де w_1 та w_2 – кількість витків першої та другої котушок.

Для лінійних котушок магнітні потоки, а значить, і потокозчеплення, пропорційні струмові, що їх викликає:

$$\Psi_{11} = L_1 i_1; \Psi_{21} = M_{21} i_1, \quad (2.36)$$

де L_1 – індуктивність першої котушки;

M_{21} – *взаємодуктивність першої та другої котушок*.

Для схеми рис. 2.26, *б* аналогічні міркування приводять до співвідношення:

$$\Psi_{22} = w_2 \Phi_{22}; \Psi_{12} = w_1 \Phi_{12} \quad (2.37)$$

та

$$\Psi_{22} = L_2 i_2; \Psi_{12} = M_{12} i_2. \quad (2.38)$$

Коефіцієнти пропорційності M_{21} та M_{12} рівні між собою для лінійних кіл, тобто $M_{21} = M_{12} = M$. **Вимірюється взаємна індуктивність M , як і індуктивність L , у генрі.**

Величину $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$ називають **коефіцієнтом зв'язку** (коефіцієнтом взаємоіндуктивного зв'язку). Цей коефіцієнт може приймати значення в межах від 0 до 1. Справді, з рівнянь (2.35) – (2.38) маємо:

$$M = M_{12} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_2}; \quad M = M_{21} = \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_1};$$

$$L_1 = \frac{w_1 \Phi_{11}}{i_1}; \quad L_2 = \frac{w_2 \Phi_{22}}{i_2}.$$

Отже:

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}.$$

Якщо потік однієї котушки не досягає витків іншої ($\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{21} = 0$), то $k = 0$, якщо весь потік однієї з котушок перетинає витки і другої котушки, то $k = 1$.

Підвищення коефіцієнта зв'язку досягається біфілярним способом намотки котушок. При перпендикулярному розміщенні осей котушок коефіцієнт зв'язку стає нульовим. Переміщуючи одну котушку відносно другої, можна плавно змінювати коефіцієнт зв'язку k в широких межах, а при послідовному з'єднанні цих котушок плавно змінювати їх результуючу індуктивність. Такий пристрій називається варіометром.

Якщо струми протікають по обох котушках (рис. 2.26, в), то потокозчеплення само- та взаємоіндукції у котушках накладаються. При цьому відповідні потоки додаються, якщо вони направлені однаково, чи віднімаються, коли направлені зустрічно. Додавання чи віднімання потоків залежить як від напрямку намотки котушок, так і від напрямку струмів у них. Якщо потоки само- та

взаємоіндукції додаються при протіканні струмів до певних полюсів намотки котушок, то ці полюси називають **однойменними**. Якщо при цьому потоки віднімаються, то відповідні полюси називаються **різнойменними**. однойменні полюси котушок позначають на схемах крапками чи зірочками.

Якщо струми котушок, задані своїми додатними напрямками, входять в однойменні полюси котушок, то таке підключення котушок називають **узгодженим**, якщо ці струми входять у різнойменні полюси, то таке їх підключення називають **зустрічним**.

Повні магнітні потоки, зчеплені з кожною з котушок:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}; \quad \Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}.$$

Їм відповідають потокозчеплення:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M i_2;$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M i_1.$$

Цими потокозчепленнями визначаються індуковані ЕРС $e_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt}$ та $e_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt}$, які врівноважуються напругами на індуктивностях L_1 та L_2 :

$$\begin{aligned} u_1 = -e_1 &= \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \\ u_2 = -e_2 &= \frac{d\Psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Знак "плюс" у рівняннях (2.39) відповідає узгодженому підключенню котушок, знак "мінус" – зустрічному.

Отже, за рахунок магнітного зв'язку струм, який протікає через одну індуктивність, викликає появу напруги на полюсах інших індуктивних елементів, розміщених поряд.

Розглянемо послідовне узгоджене з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок (рис. 2.27, а), кожна з котрих, крім індуктивності, має також активний опір. Через котушки протікає однаковий струм $i = i_1 = i_2$.

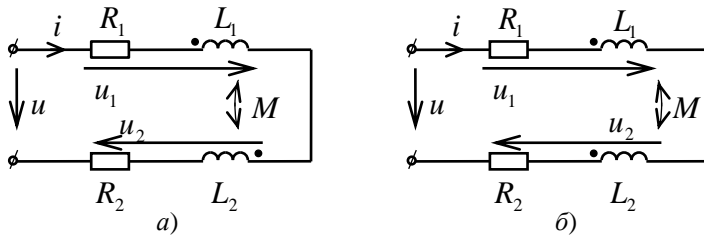


Рис. 2.27

Напряга на вході:

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 + u_2 = iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = \\
 &= i(R_1 + R_2) + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

Із одержаного виразу видно, що дві індуктивно зв'язані котушки, з'єднані послідовно, при узгодженому підключенні еквівалентні котушці, що має активний опір $R_1 + R_2$ та індуктивність $L_1 + L_2 + 2M$. Таким чином, **при узгодженому послідовному підключенні індуктивність зростає**.

Рівняння (2.40) можна записати в комплексному вигляді:

$$\begin{aligned}
 \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + \\
 &+ R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} = \\
 &= \dot{I} [(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] = \dot{I} Z_{\text{узг}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

де $Z_{\text{узг}} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$ – комплексний опір кола при послідовному узгодженому підключенні двох котушок.

На рис. 2.28, а зображена векторна діаграма напруг для розглянутої схеми.

При зустрічному підключенні котушок (рис. 2.27, б) маємо:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = \\ &= i(R_1 + R_2) + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

Отже, наявність *взаємної індукції при послідовному зустрічному підключенні котушок зменшує індуктивність кола*.

Комплексний опір кола для зустрічного підключення:

$$Z_{зуст} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M). \quad (2.42)$$

Величина $L_1 + L_2 - 2M$ завжди додатна. Для доведення використаємо дві нерівності:

$$\begin{aligned} (\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 &= L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} \geq 0 \\ \text{та } \sqrt{L_1 L_2} &> M. \end{aligned}$$

Замінивши у першій нерівності $\sqrt{L_1 L_2}$ меншою величиною M , одержимо:

$$L_1 + L_2 - 2M > 0.$$

Векторна діаграма напруг при зустрічному підключенні котушок показана на рис. 2.28, б.

Співвідношення (2.41) – (2.42) можна використати для визначення взаємної індуктивності M .

Позначивши:

$$X_{узз} = \omega(L_1 + L_2 + 2M);$$

$$X_{зуст} = \omega(L_1 + L_2 - 2M).$$

Одержимо:

$$M = \frac{X_{узз} - X_{зуст}}{4\omega}.$$

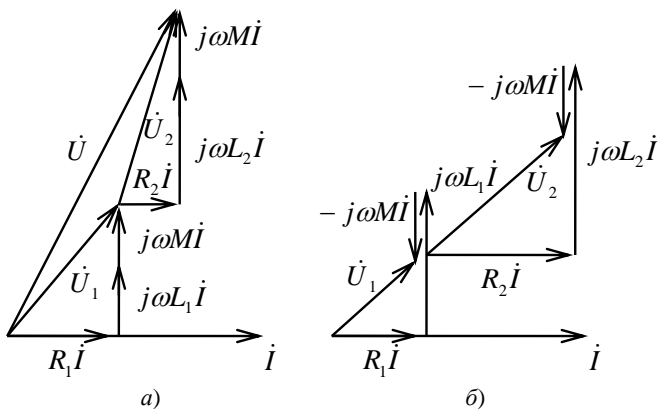


Рис. 2.28

Комплексний опір $j\omega M$ називають часто **опором взаємодукції** та позначають Z_M . Різниця значень опорів $Z_{узг}$ та $Z_{звст}$ використовується в інженерній практиці для розмітки однойменних полюсів індуктивно зв'язаних елементів. Приймавши довільно в одній з котушок один полюс за початок (Π_1), інший – за кінець (K_1) намотки, збирають схему зображену на рис. 2.29. Подавши на вхід схеми певне значення напруги U , занотовують силу струму I . Потім міняють полюси підключення другої котушки та знову подають на вхід кола ту саму напругу U , занотовуючи нове значення струму I . Якщо в першому випадку струм був менший, ніж в другому, значить першого разу опір кола був більший, тобто підключення було узгоджене, в протилежному разі – зустрічне. Відповідні полюси котушок позначають крапками (зірочками).

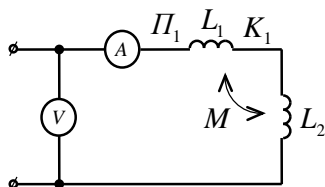


Рис. 2.29

Розглянемо паралельне узгоджене підключення індуктивно зв'язаних котушок (рис. 2.30). На підставі законів Кірхгофа комплексні рівняння кола мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{U} &= Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2; \\ \dot{U} &= Z_2 \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1. \end{aligned}$$

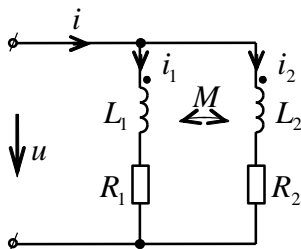


Рис. 2.30

Розв'язавши рівняння відносно струмів, маємо:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}; \quad \dot{I}_2 = \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}; \\ \dot{I} &= \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}. \end{aligned}$$

Вхідний опір:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}. \quad (2.43)$$

Для зустрічного паралельного з'єднання індуктивно зв'язаних котушок:

$$Z_{\text{вх}\square} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_M}. \quad (2.44)$$

Для розрахунку розгалужених кіл, що мають у своєму складі взаємоіндуктивно зв'язані елементи, можна застосовувати закони

Кірхгофа чи метод контурних струмів. Метод вузлових напруг неприйнятний, оскільки безпосередньо у рівняннях методу неможливо враховувати вплив ЕРС взаємоіндукції на струми віток. Метод еквівалентного генератора може використовуватися лише в тих випадках, коли навантаження не має індуктивного зв'язку з тією частиною схеми, яку заміняють еквівалентним генератором.

Складемо рівняння законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 2.31

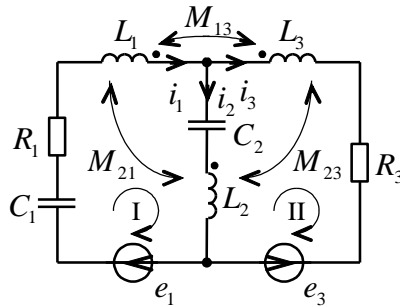


Рис. 2.31

При складанні рівнянь другого закону Кірхгофа для визначення знаку напруги на індуктивно зв'язаних елементах будемо користуватися такими міркуваннями. Якщо напрям струму у вітці співпадає з напрямом обходу контуру, то усі напруги на елементах цієї вітки мають додатний знак. Напруга, обумовлена наявністю взаємоіндуктивності, має крім того, ще і власний знак: "плюс" при узгодженому підключенні котушок, "мінус" – при зустрічному. Отже, записуючи напругу на взаємоіндуктивно зв'язаних котушках, треба враховувати обидва правила.

Отже, маємо за першим законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0.$$

Рівняння другого закону Кірхгофа для першого контуру:

$$\frac{1}{j\omega C_1} \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + (-j\omega M_{12} \dot{I}_2) + (-j\omega M_{13} \dot{I}_3) + j\omega L_2 \dot{I}_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_2 + (-j\omega M_{21} \dot{I}_1) + (+j\omega M_{23} \dot{I}_3) = \dot{E}_1.$$

Знаки перед дужками в останньому рівнянні – "плюс", тому що напрями струмів \dot{I}_1 та \dot{I}_2 співпадають з напрямом обходу лівого контура. Знаки в дужках обумовлені способом підключення котушок: зустрічним для першої та другої, першої та третьої, узгодженим для другої та третьої. Для другого контуру, опускаючи дужки, можна записати:

$$j\omega L_3 \dot{I}_3 - j\omega M_{31} \dot{I}_1 + j\omega M_{32} \dot{I}_2 + R_3 \dot{I}_3 - j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{21} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_3 - \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_2 = -\dot{E}_3.$$

Рівняння за методом контурних струмів складемо для схеми, зображеної на рис. 2.32.

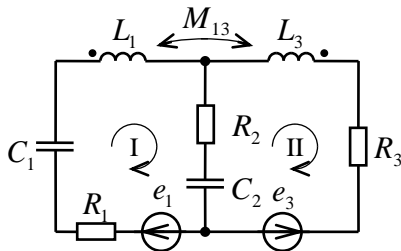


Рис. 2.32

У загальному вигляді:

$$\dot{I}_{11} Z_{11} + \dot{I}_{22} Z_{12} = \dot{E}_{11};$$

$$\dot{I}_{11} Z_{21} + \dot{I}_{22} Z_{22} = \dot{E}_{22},$$

де $Z_{11} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2};$

$$Z_{22} = j\omega L_3 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_2;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -R_2 - \frac{1}{j\omega C_2} - j\omega M_{13}.$$

Знак "мінус" перед опором взаємної індуктивності обумовлений тим, що контурні струми \dot{I}_{11} та \dot{I}_{22} входять в різнойменні полюси котушок L_1 та L_3 .

Приклад 2.10.

Для визначення взаємної індуктивності двох котушок їх з'єднали послідовно (рис. 2.33), включивши в коло ватметр, вольтметр та амперметр. Покази вимірвальних приладів: $P_1 = 12 \text{ Вт}$, $U_1 = 100 \text{ В}$, $I_1 = 0,33 \text{ А}$. Потім полюси 3 та 4 другої котушки поміняли місцями, підключивши схему до тієї самої напруги. Прилади показали: $P_2 = 58 \text{ Вт}$, $I_2 = 0,73 \text{ А}$. Чому дорівнює взаємна індуктивність M , якщо частота змінного струму у колі $f = 50 \text{ Гц}$? У якому випадку підключення котушок було узгоджене?

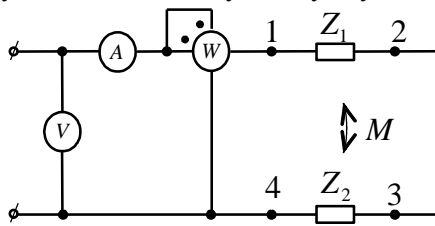


Рис. 2.33

Розв'язок:

Визначаємо комплексний опір послідовно з'єднаних котушок для кожної із схем. У першому випадку:

$$z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{100}{0,33} = 300 \text{ Ом};$$

$$\varphi_1 = \arccos \frac{P_1}{U_1 I_1} = \arccos \frac{12}{33} = 68,6^\circ.$$

Отже, $Z_1 = 300 e^{j68,6^\circ} = (109 + j279,3) \text{ Ом}$.

Для другої схеми:

$$z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{100}{0,73} = 137 \text{ Ом};$$

$$\varphi_2 = \arccos \frac{P_2}{U_2 I_2} = \arccos \frac{58}{73} = 37,3^\circ.$$

$$\text{Тоді } Z_2 = 137 e^{j37,3^\circ} = (109 + j83) \text{ Ом.}$$

Оскільки $X_1 > X_2$, то у першому випадку, згідно з (2.41) – (2.42), підключення котушок було узгоджене. При цьому:

$$X_1 = X_{\text{взе}} = \omega(L_1 + L_2 + 2M);$$

$$X_2 = X_{\text{вст}} = \omega(L_1 + L_2 - 2M).$$

Тоді $X_1 - X_2 = 4\omega M$, і шукана взаємна індуктивність:

$$M = \frac{X_1 - X_2}{4\omega} = \frac{279,3 - 83}{4 \cdot 314} = 156 \text{ мГн.}$$

Приклад 2.11.

Визначити вхідний опір кола, схема якого зображена на рис. 2.34, на частоті 50 Гц , якщо: $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,2 \text{ Гн}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $L_2 = 0,4 \text{ Гн}$, $C = 30 \text{ мкФ}$, а коефіцієнт зв'язку взаємоіндуктивно зв'язаних котушок $k = 0,5$.

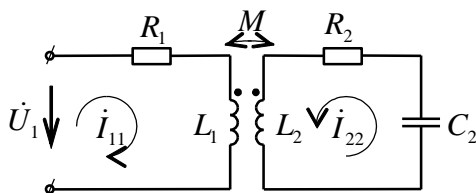


Рис. 2.34

Розв'язок:

Запишемо рівняння за методом контурних струмів:

$$\dot{I}_{11} Z_{11} + \dot{I}_{22} Z_M = \dot{U}_1;$$

$$\dot{I}_{11} Z_M + \dot{I}_{22} Z_{22} = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно \dot{I}_{11} .

З другого рівняння:

$$\dot{I}_{22} = -\frac{Z_M}{Z_{22}} \dot{I}_{11}.$$

Тоді:

$$\dot{I}_{11} \left(Z_{11} - \frac{Z_M^2}{Z_{22}} \right) = \dot{U}_1$$

і вхідний опір

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{11}} = Z_{11} - \frac{Z_M^2}{Z_{22}}.$$

Виконаємо підрахунки. Оскільки $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$, то:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0,5 \sqrt{0,2 \cdot 0,4} = 0,14 \text{ Гн};$$

$$Z_M = j\omega M = j314 \cdot 0,14 = j44 \text{ Ом};$$

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 = 20 + j314 \cdot 0,2 = (20 + j62,8) \text{ Ом};$$

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = 30 + j314 \cdot 0,4 + \frac{10^6}{j314 \cdot 30} =$$

$$= 30 + j125,6 - j106 = 30 + j19,6 = 35,8e^{j33,1^\circ} \text{ Ом}.$$

Нарешті:

$$Z_{\text{вх}} = 20 + j62,8 - \frac{(j44)^2}{35,8e^{j33,1^\circ}} =$$

$$= 20 + j62,8 + 45,3 - j29,3 = 73,3e^{j27,1^\circ} \text{ Ом}.$$

З метою спрощення схем для розрахунку кіл зі взаємною індуктивністю застосовують еквівалентні схеми заміщення (розв'язування індуктивних зв'язків).

Розглянемо схему ділянки кола, зображену на рис. 2.35, а.

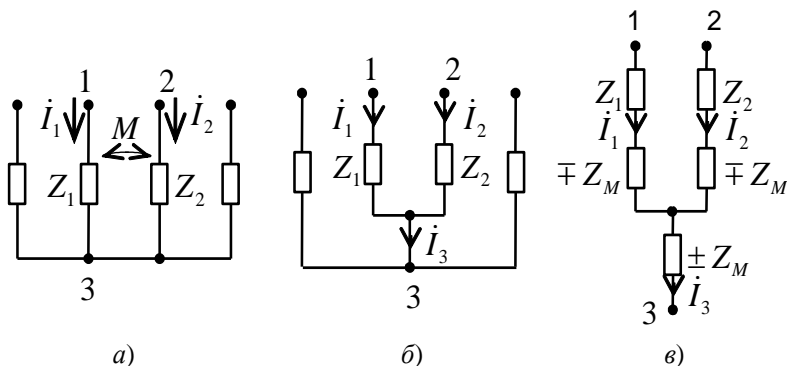


Рис. 2.35

Елементи кола Z_1 та Z_2 , зв'язані між собою взаємною індуктивністю M , підключені одним полюсом до спільного вузла 3. Врахуємо два можливі варіанти підключення цих елементів:

- а) у вузлі 3 зв'язані однойменні полюси котушок;
- б) у вузлі 3 зв'язані різнойменні полюси.

Для схеми рис. 2.35, а напруги \dot{U}_{13} та \dot{U}_{23} запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{13} &= \dot{I}_1 Z_1 \pm \dot{I}_2 Z_M; \\ \dot{U}_{23} &= \dot{I}_2 Z_2 \pm \dot{I}_1 Z_M. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Верхній знак у рівняннях відповідає узгодженому підключенню котушок, нижній – зустрічному.

Дещо видозмінимо схему, з'єднавши між собою (окремо від інших елементів кола) полюси котушок та введемо додатково струм \dot{I}_3 (рис. 2.35, б). Тоді:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \quad (2.46)$$

Використавши рівняння (2.46), перепишемо (2.45) у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{13} &= \dot{I}_1 Z_1 \pm (\dot{I}_3 - \dot{I}_1) Z_M; \\ \dot{U}_{23} &= \dot{I}_2 Z_2 \pm (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) Z_M, \end{aligned}$$

або:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{13} &= \dot{I}_1(Z_1 \mp Z_M) \pm \dot{I}_3 Z_M; \\ \dot{U}_{23} &= \dot{I}_2(Z_2 \mp Z_M) \pm \dot{I}_3 Z_M. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Рівняння (2.47) відповідають схемі, зображеній на рис. 2.35, в. Ця схема еквівалентна схемі рис. 2.35, а, але, на відміну від неї, не має в своєму складі взаємоіндуктивно зв'язаних котушок.

Нагадаємо, що верхні знаки у рівняннях (2.47) відповідають узгодженому, нижні – зустрічному включенню котушок.

Приклад 2.12.

Розв'язати приклад 2.11, використавши еквівалентне розв'язування котушок.

Розв'язок:

Вибравши узгоджене підключення котушок L_1 та L_2 , маємо еквівалентну схему (рис. 2.36).

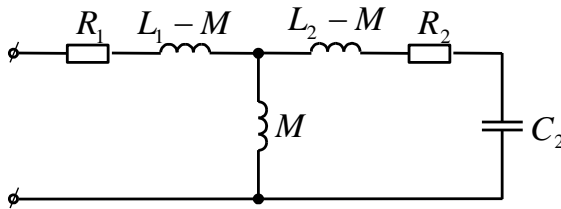


Рис. 2.36

Тоді вхідний опір схеми:

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + \frac{Z_M Z_2}{Z_M + Z_2},$$

де

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j\omega(L_1 - M) = \\ &= 20 + j314 \cdot 0,06 = (20 + j18,8) \text{ Ом}; \\ Z_M &= j\omega M = j44 \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= R_2 + j\omega(L_2 - M) + \frac{1}{j\omega C} = \\ &= 30 + j314 \cdot 0,26 - j106 = \\ &= 30 - j24,4 = 38,7e^{-j39^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Вхідний опір кола:

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= 20 + j18,8 + \frac{44e^{j90^\circ} \cdot 38,7e^{-j39^\circ}}{j44 + 30 - j24,4} = \\ &= 20 + j18,8 + \frac{1703e^{j51^\circ}}{35,8e^{j33,1^\circ}} = \\ &= 20 + j18,8 + 45,3 + j14,7 = 73,4e^{j27,1^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

В результаті підрахунку числове значення вхідного опору вийшло таким самим, як і в прикладі 2.11

2.10. Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.10.1. В схемі електричного кола (рис. 2.37) $R_1 = 10,5 \text{ Ом}$, $R_2 = 3,5 \text{ Ом}$, $L = 382 \text{ мкГн}$, $C = 0,533 \text{ мкФ}$.

Яка напруга U на вході схеми, коли амперметр показав струм $I = 2,4 \text{ А}$? Частота змінного струму $f = 5 \text{ кГц}$.

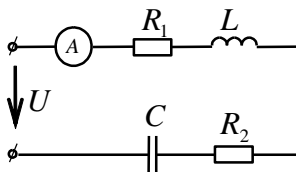


Рис. 2.37

Відповідь: $U = 120 \text{ В}$.

Завдання 2.10.2. Активний опір $R = 30 \text{ Ом}$, індуктивний $X_L = 40 \text{ Ом}$ та ємнісний $X_C = 25 \text{ Ом}$ з'єднані паралельно. Визначити комплексні діючі значення струмів віток та загального

струму, якщо напруга на вході схеми $\dot{U} = 120e^{j30^\circ}$ В. Побудувати векторну діаграму.

Відповідь: $\dot{I}_R = 4e^{j30^\circ}$ А, $\dot{I}_L = 3e^{-j60^\circ}$ А, $\dot{I}_C = 4,8e^{j120^\circ}$ А,
 $\dot{I} = 4,4e^{j54,2^\circ}$ А.

Завдання 2.10.3. Визначити діючі значення всіх струмів у схемі (рис. 2.38). якщо: $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 500$ Ом, $X_L = 500$ Ом, $X_C = 1000$ Ом, $U_{ab} = 120$ В.

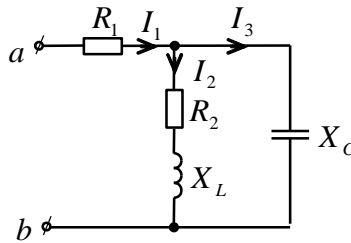


Рис. 2.38

Відповідь: $I_1 = 0,1$ А, $I_2 = 0,14$ А, $I_3 = 0,1$ А.

Завдання 2.10.4. Розрахувати всі струми в схемі рис. 2.39 методом контурних струмів.

Параметри кола: $\dot{E}_2 = 100$ В, $\dot{E}_3 = 100e^{-j30^\circ}$ В, $Z_1 = (50 + j30)$ Ом, $Z_2 = 100$ Ом, $Z_3 = (60 - j80)$ Ом.

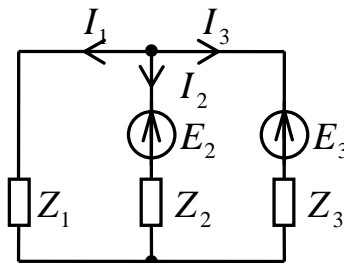


Рис. 2.39

Відповідь: $\dot{I}_1 = 1,09e^{-j18^\circ} \text{ A}$, $\dot{I}_2 = 0,4e^{j159^\circ} \text{ A}$, $\dot{I}_3 = 0,69e^{j165^\circ} \text{ A}$.

Завдання 2.10.5. Розв'язати завдання 2.10.4 методом двох вузлів.

Завдання 2.10.6. Розрахувати струм \dot{I}_1 у попередній задачі методом еквівалентного генератора.

Завдання 2.10.7. Нерозгалужене коло, що складається з індуктивності $L = 200 \text{ мГн}$ та ємності $C = 8 \text{ мкФ}$, живиться від генератора з напругою $U = 110 \text{ В}$ та частотою $f = 200 \text{ Гц}$. Визначити комплекси діючого значення струму, напруг на індуктивності та ємності, а також комплексну потужність кола.

Відповідь: $\dot{I} = 0,73e^{-j90^\circ} \text{ A}$, $\dot{U}_L = 183 \text{ В}$, $\dot{U}_C = -73 \text{ В}$, $\tilde{S} = 80,3e^{-j90^\circ} \text{ ВА}$.

Завдання 2.10.8. В електричному колі, що складається з паралельно з'єднаних активного опору, індуктивності та ємності, струми відповідно дорівнюють 12, 15 та 4 А. Обрахувати загальний струм, коефіцієнт потужності для всього кола, а також активну, реактивну та повну потужності кола, якщо напруга на затискачах схеми $U = 220 \text{ В}$.

Відповідь: $I = 16,3 \text{ А}$, $S = 3586 \text{ ВА}$, $P = 2654 \text{ Вт}$,
 $Q = 2421 \text{ Вар}$, $\cos \varphi = 0,74$.

Завдання 2.10.9. Визначити покази ватметра в схемі рис. 2.40, якщо: $Z_1 = 3 \text{ кОм}$, $Z_2 = j4 \text{ кОм}$, $Z_3 = -j10 \text{ кОм}$, $Z_4 = (2 + j10) \text{ кОм}$, $Z_5 = 5 \text{ кОм}$. У схемі діє джерело синусоїдного струму з діючим значенням $J = 10 \text{ мА}$.

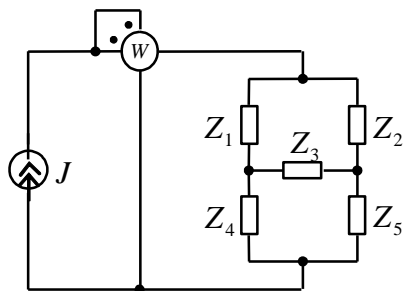


Рис. 2.40

Відповідь: 183 мВт.

Завдання 2.10.10. У схемі, зображеній на рис. 2.41 – резонанс при кутовій частоті $\omega = 5000 \text{ рад/с}$. Струм в схемі – $0,1 \text{ А}$, споживана потужність $0,1 \text{ Вт}$, напруга на конденсаторі – 200 В .

Визначити параметри кола R , L , C та напругу на вході схеми.

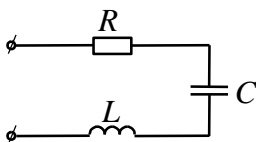


Рис. 2.41

Відповідь: $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,4 \text{ Гн}$, $C = 0,1 \text{ мкФ}$, $U = 1 \text{ В}$.

Завдання 2.10.11 Дві індуктивно зв'язані котушки та конденсатор з'єднані послідовно. Обчислити струм у колі та напругу на полюсах кожної з котушок, які мають активний опір та індуктивність, якщо параметри кола (рис. 2.42): $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $X_{L_1} = 20 \text{ Ом}$, $X_M = 10 \text{ Ом}$, $X_{L_2} = 10 \text{ Ом}$, $X_C = 20 \text{ Ом}$, а напруга на вході $U = 90 \text{ В}$.

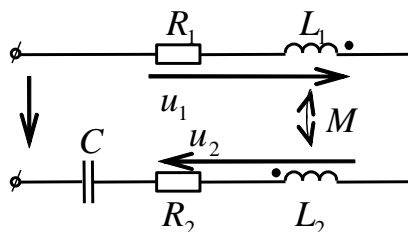


Рис. 2.42

Відповідь: $I = 2,69 \text{ A}$, $U_1 = 85 \text{ B}$, $U_2 = 55,4 \text{ B}$.

Завдання 2.10.12. Підібрати ємність C так, щоб у схемі кола рис. 2.43 на частоті $\omega = 5 \cdot 10^5 \text{ рад/с}$ спостерігався резонанс напруг. Параметри кола: $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,1 \text{ мГн}$, $L_2 = 0,2 \text{ мГн}$, $M = 0,1 \text{ мГн}$.

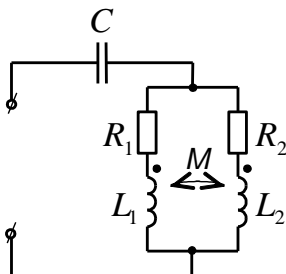


Рис. 2.43

Відповідь: $C = 0,03 \text{ мкФ}$.

Завдання 2.10.13. Розрахувати частоту резонансу струмів у схемі, зображеній на рис. 2.44, якщо $L_1 = 9 \text{ мГн}$, $L_2 = 4 \text{ мГн}$, $M = 2 \text{ мГн}$, $C = 0,2 \text{ мкФ}$.

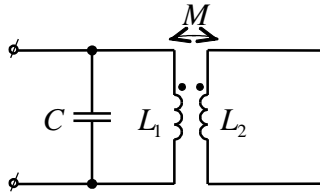


Рис. 2.44

Відповідь: $\omega = 2,5 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$.

2.11. Запитання для поточного контролю

1. Що таке амплітуда, діюче значення та фаза синусоїдного струму?
2. Як зв'язані між собою період, циклічна та кутова частоти синусоїдного струму?
3. Приведіть співвідношення, які зв'язують між собою миттєві значення струму та напруги для резистора, котушки індуктивності та конденсатора.
4. Чому дорівнює зсув початкових фаз між напругою та струмом для резистора, індуктивності, ємності?
5. Приведіть формули для розрахунку реактивного опору індуктивності та ємності.
6. Приведіть приклад складної схеми кола синусоїдного струму з резисторами, індуктивностями та ємностями і запишіть для неї закони Кірхгофа у диференційній формі.
7. Запишіть комплекси діючих значень для величин $i = 2,5 \sin(\omega t - 18^\circ) \text{ A}$; $u = 220 \sin(314t + 110^\circ) \text{ B}$; $e = 115 \cos \omega t \text{ B}$.
8. Запишіть закон Ома у комплексній формі та поясніть, які величини до нього входять.
9. Комплексний опір кола $Z = 175e^{j63^\circ} \text{ Ом}$. Чому дорівнюють активний та реактивний опори кола?
10. Побудуйте векторні діаграми струмів та напруг для послідовного та паралельного R, L, C – кіл.
11. Запишіть у загальному вигляді закони Кірхгофа у комплексній формі.

12. Приведіть приклад схеми кола синусоїдного струму з двома контурами та запишіть для неї рівняння МКС у комплексному вигляді.
13. Запишіть у комплексній формі рівняння для розрахунку напруги між двома вузлами схеми та поясніть, як воно складається.
14. Що таке активна, реактивна та повна потужності та як вони зв'язані між собою?
15. Назвіть ознаку, причину та наслідки резонансу напруг у колі.
16. При якій умові у схемі може виникнути резонанс струмів?
17. У якому випадку може виникати явище взаємоіндукції та до яких наслідків воно приводить?
18. Що означає узгоджене та зустрічне підключення котушок зі взаємною індуктивністю?
19. Що означає опір взаємоіндукції та як його можна визначити?

Розділ 3. Трифазні кола

3.1. Трифазна система ЕРС

Трифазні кола є найбільш розповсюдженим різновидом багатофазних кіл. Завдяки високій економічності та технічній досконалості трифазні кола знаходять переважне застосування в електроенергетиці вже більше ніж сторіччя. Практично всі ланки трифазних кіл (генератор, трансформатор, трифазний двигун) були розроблені російським інженером і вченим М.О. Доліво-Добровольським.

Трифазними називають кола, у яких діють три синусоїдні ЕРС однакової амплітуди і частоти, зсунуті за початковими фазами на кут 120° одна відносно одної. Створюються ці ЕРС трифазними генераторами. На рис. 3.1 схематично зображена будова такого генератора.

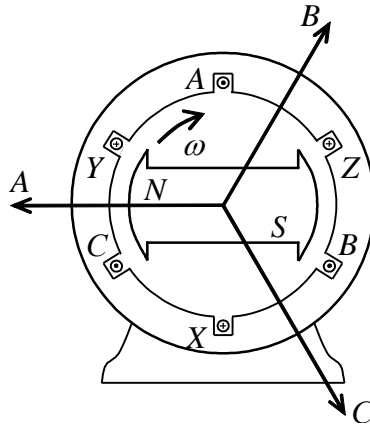


Рис. 3.1

Генератор має нерухому частину – статор, та рухому – ротор. У пазах статора розміщені три однакові обмотки. Прийнято початки цих обмоток позначати великими літерами латинського алфавіту A , B та C , кінці обмоток відповідно позначаються літерами X , Y , Z . Пази статора для кожної обмотки розміщені на кутовій відстані 120° один від одного. На роторі, як правило,

розміщені електромагніти з полюсами N та S . При обертанні ротора з кутовою частотою ω з такою ж самою частотою змінюється і магнітний потік, який зчіплюється з обмотками статора, і у обмотках наводиться ЕРС. Через додатні максимальні значення ці ЕРС проходять через $1/3$ обороту ротора послідовно у обмотках $A - B - C$. Тому ЕРС цих обмоток зсунуті за фазою на 120° одна відносно одної (рис. 3.2). Така послідовність ЕРС трифазної системи називається **прямою**.

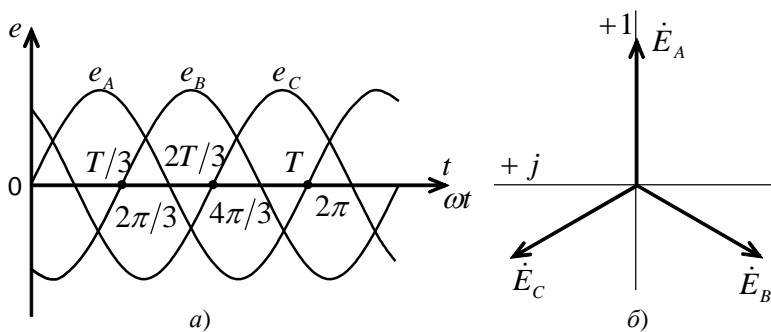


Рис. 3.2

Миттєві значення ЕРС симетричної трифазної системи записують у вигляді:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ); \\ e_C &= E_m \sin(\omega t + 120^\circ). \end{aligned} \quad (3.1)$$

У комплексному вигляді трифазна система ЕРС:

$$\begin{aligned} \dot{E}_A &= E_m / \sqrt{2} = E; \\ \dot{E}_B &= (E_m / \sqrt{2}) e^{-j120^\circ} = E e^{-j120^\circ} = \dot{E}_A e^{-j120^\circ}; \\ \dot{E}_C &= (E_m / \sqrt{2}) e^{j120^\circ} = E e^{j120^\circ} = \dot{E}_A e^{j120^\circ}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Комплекси діючих значень ЕРС \dot{E}_A , \dot{E}_B , \dot{E}_C зобразимо векторами на комплексній площині. Прийнято для аналізу процесів

у трифазних колах на комплексній площині додатний напрям осі дійсних чисел вказувати вертикально вгору. Тоді вектори \dot{E}_A , \dot{E}_B , \dot{E}_C створюють на площині симетричну трипроменеву зірку (рис. 3.2, б). ЕРС трифазної симетричної системи мають одну особливість: їх сума у будь-який момент часу дорівнює нулю. Дійсно:

$$\begin{aligned} \dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C &= E(1 + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}) = \\ &= E(1 - 0,5 - j0,87 - 0,5 + j0,87) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2. З'єднання зіркою та трикутником у трифазних колах

Обмотки генераторів, трансформаторів та навантаження у трифазних колах з'єднують або зіркою, або трикутником.

При з'єднанні зіркою (рис. 3.3, а) кінці обмоток генератора та віток навантаження, з'єднані у точки 0 та 0' відповідно, називають нейтральними (нульовими) точками, а провід між ними – нульовим проводом. Решту проводів, які з'єднують обмотки генератора з навантаженням, називають лінійними.

При з'єднанні ЕРС трикутником (рис. 3.3, б) послідовно з'єднують кінець першої ЕРС з початком другої і т.д. Проводи, що з'єднують генератор з навантаженням, також називають лінійними.

Сукупність однієї з ЕРС та послідовно з'єданого з нею навантаження називають фазою.

Отже, при з'єднанні трифазного кола зіркою маємо три фази: А, В та С, а при з'єднанні трикутником – фази АВ, ВС та СА. Струми, які протікають у фазах навантаження чи ЕРС, називають ***фазними***. Для схеми рис. 3.3, а маємо три фазні струми: \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C , для схеми рис. 3.3, б фазні струми \dot{I}_{AB} , \dot{I}_{BC} , \dot{I}_{CA} . Струми в проводах, які з'єднують генератор з навантаженням, називають ***лінійними***. Незалежно від схеми з'єднання, трифазне коло має три лінійні струми: \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C . Загальноприйняті напрями лінійних та фазних струмів, а також струму нульового проводу \dot{I}_0 вказані на рис. 3.3, а, б.

Напруги на затискачах фазних ЕРС чи навантаження називають **фазними** U_ϕ , напруги між лінійними проводами – **лінійними** напругами U_λ .

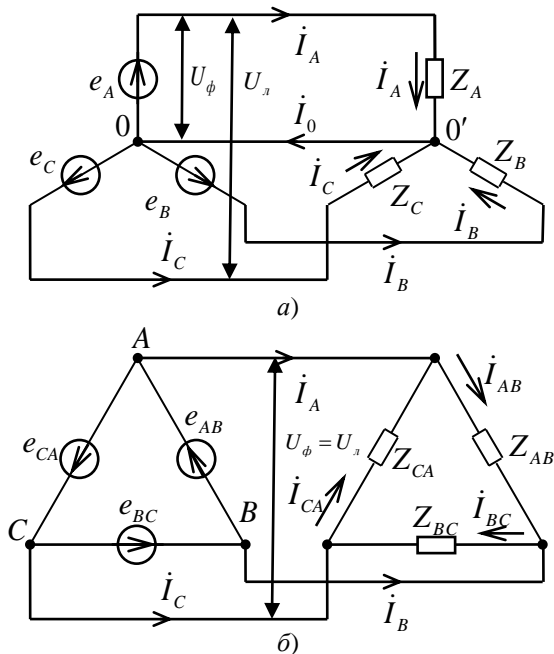


Рис. 3.3

При з'єднанні зіркою, абсолютно очевидно, що лінійний струм кожного лінійного проводу є в той же час і фазним струмом, тобто $I_\lambda = I_\phi$. При з'єднанні трикутником те ж саме можна сказати про лінійні та фазні напруги: $U_\lambda = U_\phi$. Співвідношення для лінійних та фазних напруг при з'єднанні зіркою, лінійних та фазних струмів при з'єднанні трикутником одержимо дещо пізніше.

Приведені схеми трифазних кіл свідчать про економічні переваги використання трифазних систем ЕРС перед трьома незв'язаними однофазними: при з'єднанні зіркою по схемі рис. 3.3, а економиться дріт для двох зворотних проводів, при

з'єднанні трикутником – економія на трьох проводах. У масштабах держави, коли електроенергія передається на сотні, тисячі кілометрів, заощаджуються тисячі і сотні тисяч тон металу.

3.3. Розрахунок трифазних кіл при з'єднанні зіркою

Розрахунок трифазних кіл, як і будь-яких складних кіл синусоїдного струму, виконується у комплексній формі. Розглянемо трифазне коло зі з'єднаними зіркою обмотками генератора та навантаженням, з опором у нульовому проводі (рис. 3.4, а).

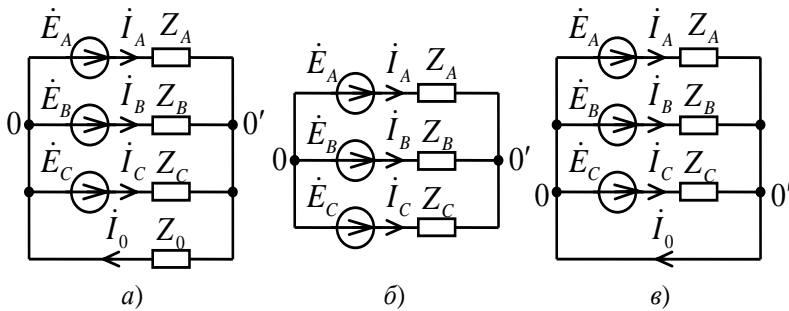


Рис. 3.4

Оскільки схема має два вузли, то доцільно для її розрахунку застосувати метод двох вузлів. Визначаємо напругу $\dot{U}_{0'0}$ між нульовими точками навантаження та генератора (напругу нейтралі):

$$\dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_0}, \quad (3.4)$$

де Y_A, Y_B, Y_C, Y_0 – провідності фаз та нульового проводу.

Струми у фазах, за законом Ома:

$$\dot{i}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_{0'0}) Y_A;$$

$$\dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_{0'0})Y_B; \quad (3.5)$$

$$\dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_{0'0})Y_C.$$

Струм у нульовому проводі:

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_{0'0}Y_0. \quad (3.6)$$

У випадку **рівномірного** навантаження фаз $Y_A = Y_B = Y_C = Y$. Тоді напруга нейтралі, враховуючи (3.3), дорівнює нулю:

$$\dot{U}_{0'0} = \frac{Y(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{3Y} = 0.$$

Фазні струми у випадку рівномірного навантаження однакові за величиною та зсунуті за початковими фазами на 120° один відносно одного. У нульовому проводі струму немає.

Якщо нейтральні точки 0 та $0'$ не з'єднані між собою (рис. 3.4, б), розрахунок такого кола також виконується методом двох вузлів:

$$\dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Фазні струми визначаються за формулами (3.5), причому $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. При рівномірному навантаженні, як і у попередній схемі, напруга нейтралі дорівнює 0 .

Якщо при з'єднанні зіркою з нульовим проводом опір нульового проводу $Z_0 = 0$ (рис. 3.4, в), то струми кожної з фаз визначаються за законом Ома при будь-якому (рівномірному чи нерівномірному) навантаженні:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C}.$$

Струм нульового проводу $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$.

Побудуємо векторні діаграми напруг та струмів для розглянутих схем. Для схеми, зображеної на рис. 3.4, в, векторна діаграма будується дуже просто. Зобразивши фазні напруги на

навантаженні ($\dot{U}_\phi = \dot{E}_\phi$) симетричною трипроменевою зіркою, вектори фазних струмів будуюмо, враховуючи кути зсуву фаз кожного струму по відношенню до відповідної напруги.

Векторна діаграма на рис. 3.5, а побудована для схеми, яка має $Z_A = R_A$, $Z_B = R_B - jX_B$, $Z_C = R_C + jX_C$. Струм \dot{I}_0 – векторна сума струмів фаз.

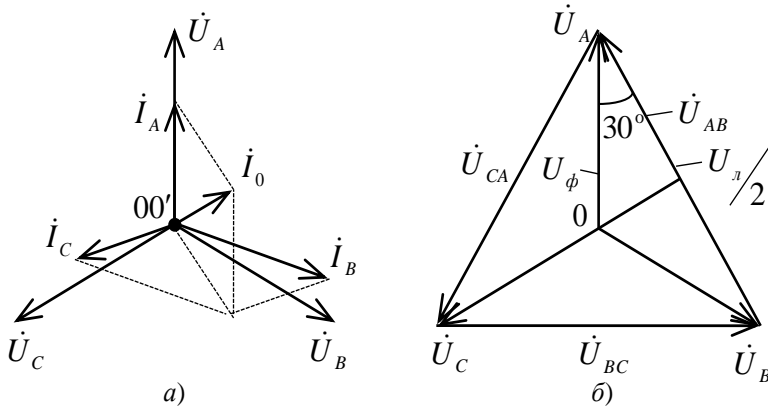


Рис. 3.5

Співвідношення між лінійними та фазними напругами для схеми рис. 3.4, в одержимо, побудувавши векторну діаграму лінійних та фазних напруг (рис. 3.5, б). Лінійні напруги:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Розглянувши рівнобедрений трикутник з бічними сторонами U_ϕ та основою U_l , одержимо:

$$\frac{U_l}{2} = U_\phi \cdot \cos 30^\circ = \frac{U_\phi \cdot \sqrt{3}}{2},$$

тобто

$$U_l = \sqrt{3}U_\phi. \quad (3.7)$$

Це саме співвідношення між величинами лінійних та фазних напруг справедливо також для схем рис. 3.4, а, б у випадку рівномірного навантаження.

Векторна діаграма, зображена на рис. 3.5, б, дозволяє визначити і фази лінійних напруг. Так, вектор \dot{U}_{AB} випереджає \dot{U}_A на кут 30° , тобто:

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{U}_A e^{j30^\circ}.$$

Тоді:

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ}.$$

Векторна діаграма для трифазного кола, з'єднаного зіркою без нульового проводу, показана на рис. 3.6, а. Побудувавши систему векторів фазних ЕРС $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$, відкладемо від точки 0 напругу нейтралі $\dot{U}_{0'0}$. Потім будемо вектори напруг на споживачах: $\dot{U}_{A0'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{0'0}$, $\dot{U}_{B0'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{0'0}$, $\dot{U}_{C0'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{0'0}$. Вектори струмів у фазах проводимо, враховуючи зсув фаз між фазними напругами та струмами. Діаграма, зображена на рис. 3.6 а, побудована для активного характеру навантаження фаз А та В і активно-індуктивного навантаження фази С.

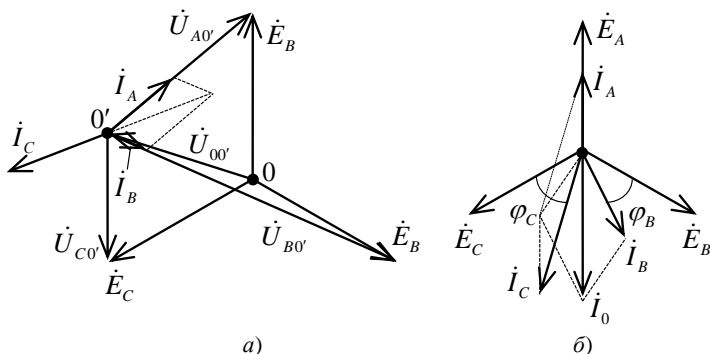


Рис. 3.6

Для живлення однофазних споживачів (побутові прилади, лампи освітлення, однофазні двигуни та ін.) застосовують чотирипровідні трифазні кола з нульовим проводом. У такій схемі напруга на навантаженні залишається незмінною та не залежить від кількості та потужності споживачів. Якщо ж нульовий провід у схемі рис. 3.4, *в* обривається, то виникає при нерівномірному навантаженні фаз напруга нейтралі $\dot{U}_{00'}$, що приводить до несиметрії фазних напруг (див. рис. 3.6, *а*). Якщо у чотирипровідній трифазній системі обривається один з лінійних проводів, то зникає струм тільки в обриваній фазі навантаження, робота ж інших двох фаз залишається незмінною.

Приклад 3.1.

До симетричної чотирипровідної системи ЕРС (рис. 3.4, *в*) з діючим значення фазної напруги $U = 127 \text{ В}$ підключається несиметричне навантаження з параметрами: $Z_A = 200 \text{ Ом}$, $Z_B = (120 + j70) \text{ Ом}$, $Z_C = (80 - j60) \text{ Ом}$. Розрахувати комплексні значення струмів у трифазному кола, прийнявши початкову фазу ЕРС e_A рівною нулю. Побудувати векторну діаграму напруг та струмів.

Розв'язок.

Запишемо комплексні значення фазних ЕРС:

$$\dot{E}_A = 127 \text{ В}; \quad \dot{E}_B = 127 e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \dot{E}_C = 127 e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Струми фаз розраховуємо за законом Ома:

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A} = \frac{127}{200} = 0,635 \text{ А};$$

$$\dot{i}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B} = \frac{127 e^{-j120^\circ}}{120 + j70} = \frac{127 e^{-j120^\circ}}{139 e^{j30^\circ}} = 0,91 e^{-j150^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{i}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C} = \frac{127 e^{j120^\circ}}{80 - j60} = \frac{127 e^{j120^\circ}}{100 e^{-j36,9^\circ}} = 1,27 e^{j156,9^\circ} \text{ А}.$$

Струм нульового проводу визначимо за першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0,635 + 0,91e^{-j150^\circ} + 1,27e^{j156,9^\circ} = \\ &= 0,635 - 0,79 - j0,45 - 1,17 + j0,5 = \\ &= -1,325 + j0,05 = 1,33e^{j178^\circ} \text{ A.} \end{aligned}$$

Векторна діаграма показана на рис. 3.6, б.

Приклад 3.2.

До трифазної симетричної системи ЕРС (рис. 3.7, а) приєднано нерівномірне навантаження: $Z_A = 100 \text{ Ом}$, $Z_B = 50e^{-j30^\circ} \text{ Ом}$, $Z_C = 20e^{j60^\circ} \text{ Ом}$. Розрахувати струми та напруги навантаження фаз, якщо $\dot{E}_A = 100 \text{ В}$. Побудувати векторну діаграму.

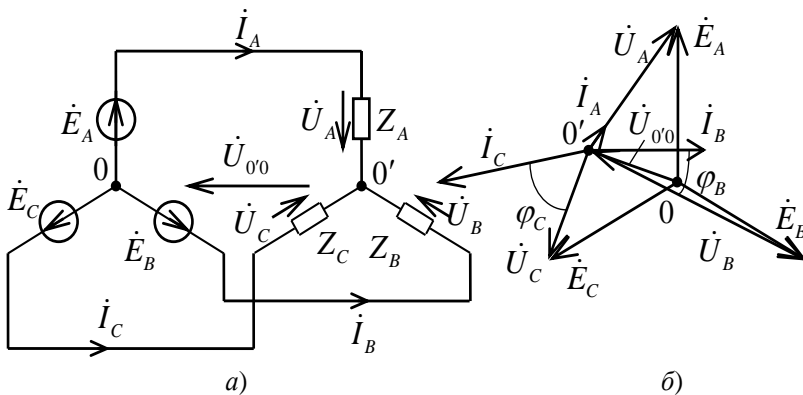


Рис. 3.7

Розв'язок.

Застосуємо для розрахунків метод двох вузлів, визначивши перш за все напругу нейтралі:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{0'0} &= \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \\ &= \frac{100 \cdot 0,01 + 100e^{-j120^\circ} \cdot 0,02e^{j30^\circ} + 100e^{j120^\circ} \cdot 0,05e^{-j60^\circ}}{0,01 + 0,02e^{j30^\circ} + 0,05e^{-j60^\circ}} = \\ &= \frac{3,5 + j2,35}{0,052 - j0,033} = \frac{4,2e^{j33,8^\circ}}{0,0616e^{-j32,2^\circ}} = 68,6e^{j66^\circ} \text{ B.}\end{aligned}$$

Напряга на навантаженні кожної фази:

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \dot{E}_A - \dot{U}_{0'0} = 100 - 68,2e^{j66^\circ} = 95,5e^{-j40,7^\circ} \text{ B}; \\ \dot{U}_B &= \dot{E}_B - \dot{U}_{0'0} = 100e^{-j120^\circ} - 68,2e^{j66^\circ} = 170e^{j242^\circ} \text{ B}; \\ \dot{U}_C &= \dot{E}_C - \dot{U}_{0'0} = 100e^{j120^\circ} - 68,2e^{j66^\circ} = 81,5e^{j162^\circ} \text{ B}.\end{aligned}$$

Струми фаз розраховуємо за законом Ома:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{U}_A Y_A = 95,5e^{-j40,7^\circ} \cdot 0,01 = 0,955e^{-j40,7^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_B &= \dot{U}_B Y_B = 170e^{j242^\circ} \cdot 0,02e^{j30^\circ} = 3,4e^{j272^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_C &= \dot{U}_C Y_C = 81,5e^{j162^\circ} \cdot 0,05e^{-j60^\circ} = 4,075e^{j102^\circ} \text{ A}.\end{aligned}$$

Перевіримо правильність розрахунків:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C &= 0,955e^{-j40,7^\circ} + 3,4e^{j272^\circ} + 4,075e^{j102^\circ} = \\ &= 0,73 - j0,62 + 0,12 - j3,39 - 0,85 + j3,98 \approx 0.\end{aligned}$$

Векторна діаграма побудована на рис. 3.7, б. Зобразивши трифазну систему ЕРС, проводимо послідовно побудову векторів напруг $\dot{U}_{0'0}$, \dot{U}_A , \dot{U}_B , \dot{U}_C . Вектори струмів фаз повинні бути розміщені під відповідними кутами до фазних напруг на навантаженні: струм \dot{I}_A співпадає за фазою з напругою \dot{U}_A , струм \dot{I}_B випереджає напругу \dot{U}_B на кут 30° , струм \dot{I}_C відстає від напруги \dot{U}_C на кут 60° . Векторна сума струмів дорівнює нулю.

Приклад 3.3.

До трифазної трипровідної симетричної системи ЕРС, з'єднаної зіркою, підключено активне рівномірне навантаження, теж з'єднане зіркою. У навантаженні протікає струм $I = 1A$. Навантаження фази А раптом закоротили. Як поміняються струми фаз після короткого замикання?

Розв'язок.

Відповіді на запитання можна дуже просто, використавши векторну діаграму кола (рис. 3.8).

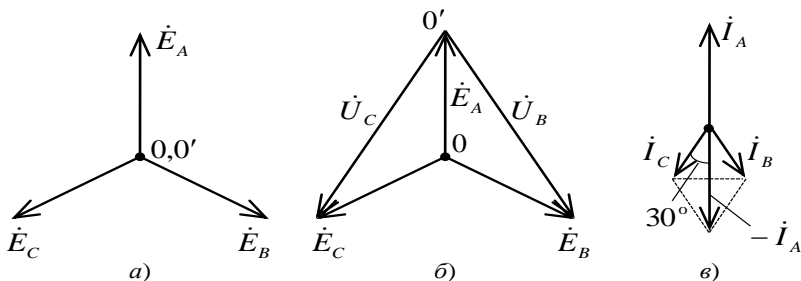


Рис. 3.8

До короткого замикання фази А напруга нейтралі $\dot{U}_{O'O}$ дорівнює нулю, точки 0 та O' на векторній діаграмі співпадають (рис. 3.8, а). Після короткого замикання фази А напруга на її навантаженні зникла, точка O' на векторній діаграмі перемістилася на кінець вектора \dot{E}_A . Напруги на навантаженні фаз В та С зросли у $\sqrt{3}$ разів (рис. 3.8, б). Значить, і струми цих фаз зростуть у $\sqrt{3}$ разів, тобто $I_B = I_C = 1,73A$. Струм короткозамкнутої фази А за першим законом Кірхгофа:

$$\dot{i}_A = -(\dot{i}_B + \dot{i}_C).$$

Величину цього струму можна теж визначити за допомогою векторної діаграми (рис. 3.8, в) та нескладних тригонометричних міркувань:

$$0,5I_A = I_C \cos 30^\circ, \text{ звідки } I_A = 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 3A.$$

3.4. Розрахунок трифазних кіл при з'єднанні трикутником

При з'єднанні трикутником симетричної трифазної ЕРС та трифазного навантаження (рис. 3.9, а) розрахунок починають з визначення фазних струмів. ЕРС кожної з фаз прикладена безпосередньо до полюсів фазного навантаження, тому, за законом Ома:

$$\dot{i}_{AB} = \frac{\dot{E}_{AB}}{Z_{AB}}; \dot{i}_{BC} = \frac{\dot{E}_{BC}}{Z_{BC}}; \dot{i}_{CA} = \frac{\dot{E}_{CA}}{Z_{CA}}. \quad (3.8)$$

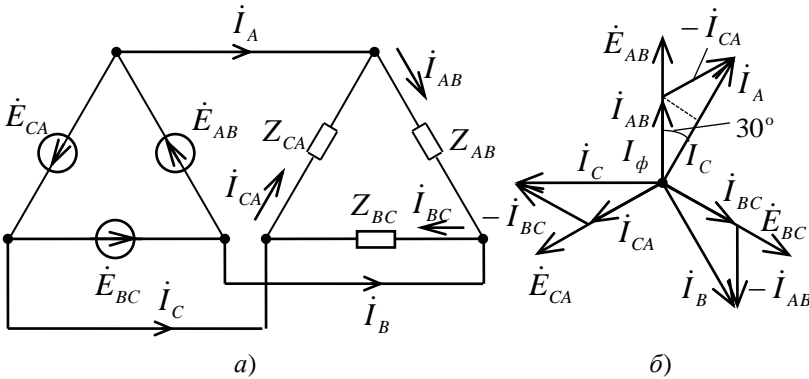


Рис. 3.9

Струми у лініях визначають за першим законом Кірхгофа для відповідних вузлів:

$$\dot{i}_A = \dot{i}_{AB} - \dot{i}_{CA}; \dot{i}_B = \dot{i}_{BC} - \dot{i}_{AB}; \dot{i}_C = \dot{i}_{CA} - \dot{i}_{BC}. \quad (3.9)$$

Трикутник ЕРС створює контур, але струму у цьому контурі при відключеному навантаженні бути не може, оскільки, згідно з (3.3), сума трьох ЕРС симетричної трифазної системи у будь-який час дорівнює нулю.

Для режиму симетричного навантаження співвідношення між лінійними та фазними струмами можна одержати за допомогою векторної діаграми. На рис. 3.9, б така діаграма

показана для активного характеру навантаження. Розглянувши трикутник, створений струмами \dot{I}_{AB} , $-\dot{I}_{CA}$ та \dot{I}_A , одержуємо:

$$0,5I_{\phi} = I_{\phi} \cos 30^{\circ}, \quad I_{\phi} = \sqrt{3}I_{\phi}. \quad (3.10)$$

З'єднання трифазних ЕРС трикутником забезпечує незалежність напруги на фазному навантаженні від зміни навантаження двох інших фаз (крім аварійного режиму короткого замикання).

На практиці, як правило, у трифазних колах застосовують і змішане з'єднання ЕРС та навантаження: трикутник ЕРС – зірка навантаження або навпаки. Для розрахунку таких кіл застосовують еквівалентні схеми заміни трикутника навантаження на зірку чи навпаки, трикутника ЕРС на зірку або навпаки.

Приклад 3.4.

У схемі трифазного кола навантаження з'єднане трикутником (рис. 3.10, а). Розрахувати лінійні та фазні струми у колі, якщо лінійна напруга у колі $U_{\phi} = 220 \text{ В}$, а параметри навантаження: $Z_{AB} = 55 \text{ Ом}$, $Z_{BC} = j50 \text{ Ом}$, $Z_{CA} = -j50 \text{ Ом}$. Побудувати векторну діаграму.

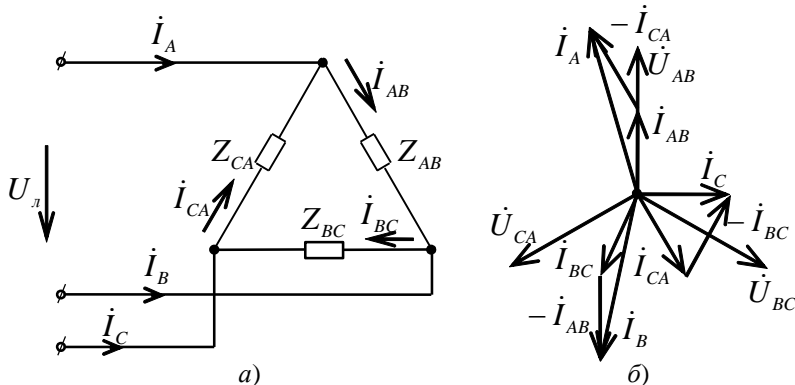


Рис. 3.10

Розв'язок.

Прийемо початкову фазу напруги U_{AB} нульовою. Тоді:
 $\dot{U}_{AB} = 220 \text{ В}$, $\dot{U}_{BC} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}$, $\dot{U}_{CA} = 220e^{j120^\circ} \text{ В}$. Фазні струми:

$$\dot{i}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{220}{55} = 4 \text{ А};$$

$$\dot{i}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{50e^{j90^\circ}} = 4,4e^{-j210^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{i}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{220e^{j120^\circ}}{50e^{-j90^\circ}} = 4,4e^{j210^\circ} \text{ А}.$$

Лінійні струми:

$$\begin{aligned} \dot{i}_A &= \dot{i}_{AB} - \dot{i}_{CA} = 4 - 4,4e^{j210^\circ} = \\ &= 4 + 3,8 + j2,2 = 7,8 + j2,2 = 8,1e^{j15,8^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_B &= \dot{i}_{BC} - \dot{i}_{AB} = 4,4e^{-j210^\circ} - 4 = \\ &= -3,8 + j2,2 - 4 = -7,8 + j2,2 = 8,1e^{j164,2^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_C &= \dot{i}_{CA} - \dot{i}_{BC} = 4,4e^{j210^\circ} - 4,4e^{-j210^\circ} = \\ &= -3,8 - j2,2 + 3,8 - j2,2 = 4,4e^{-j90^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Векторна діаграма за результатами підрахунків побудована на рис. 3.10, б.

Приклад 3.5.

До трифазної симетричної системи ЕРС з лінійною напругою $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ приєднується дві групи навантажень (рис. 3.11). Опори фаз навантаження: $Z_A = Z_B = Z_C = (24 - j7) \text{ Ом}$, $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = (20 + j15) \text{ Ом}$. Обчислити всі струми.

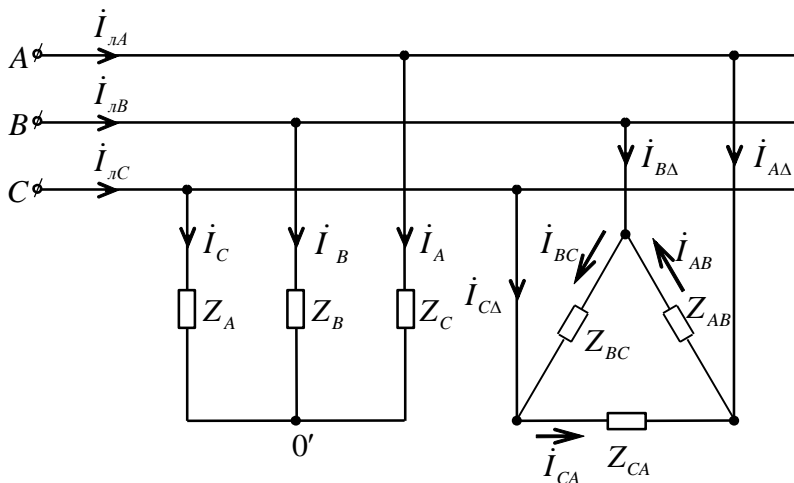


Рис. 3.11

Розв'язок.

Приємо початкову фазу напруги U_{AB} рівною нулю. Комплексні діючі значення лінійних напруг:

$$\dot{U}_{AB} = 220 \text{ В}, \dot{U}_{BC} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}, \dot{U}_{CA} = 220e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Комплексні значення фазних напруг (див. рис. 3.5, б):

$$\dot{U}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 127e^{-j30^\circ}; \quad B\dot{U}_B = 127e^{-j150^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_C = 127e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

Оскільки навантаження зірки симетричне, то:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A} = \frac{127e^{-j30^\circ}}{24 - j7} = \frac{127e^{-j30^\circ}}{25e^{-j16^\circ}} = 5,08e^{-j14^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = 5,08e^{-j134^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 5,08e^{j106^\circ} \text{ А}.$$

Струми навантаження, з'єднаного трикутником:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{220}{20 + j15} = \frac{220}{25e^{j37,9^\circ}} = 8,8e^{-j37,9^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB}e^{-j120^\circ} = 8,8e^{-j157,9^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB}e^{j120^\circ} = 8,8e^{j83,1^\circ} \text{ A}.$$

Струм $\dot{I}_{A\Delta}$ за першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{A\Delta} &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{BC} = 8,8e^{-j37,9^\circ} - 8,8e^{-j157,9^\circ} = \\ &= 7,04 - j5,28 + 8,1 + j3,4 = 15,14 - j1,88 = 15,2e^{-j7,9^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Струми:

$$\dot{I}_{BA} = \dot{I}_{A\Delta}e^{-j120^\circ} = 15,2e^{-j127,9^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{I}_{A\Delta}e^{j120^\circ} = 15,2e^{j112,1^\circ} \text{ A}$$

Струми у лініях:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{LA} &= \dot{I}_A + \dot{I}_{A\Delta} = 5,08e^{-j14^\circ} + 15,2e^{-j7,9^\circ} = \\ &= 4,9 - j1,2 + 15,1 - j2,1 = 20 - j3,3 = 20,27e^{-j9,4^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{LB} = \dot{I}_{LA}e^{-j120^\circ} = 20,27e^{-j129,4^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{LC} = \dot{I}_{LA}e^{j120^\circ} = 20,27e^{j110,6^\circ} \text{ A}.$$

3.5. Потужність у трифазних колах

Активна потужність трифазного кола визначається сумою потужностей всіх трьох його фаз.

$$P = P_A + P_B + P_C + P_0 \text{ або } P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA}. \quad (3.11)$$

У кожній фазі активна потужність визначається за звичною формулою:

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi.$$

Якщо трифазне коло симетричне, то сумарна потужність навантаження:

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} . \quad (3.12)$$

Реактивна потужність усього кола при нерівномірному навантаженні дорівнює алгебричній сумі реактивних потужностей окремих фаз:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_0 \text{ або: } Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} . \quad (3.13)$$

Для симетричного кола:

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi_{\phi} . \quad (3.14)$$

Повна потужність трифазного кола при нерівномірному навантаженні:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} , \quad (3.15)$$

де P – активна потужність всього кола;

Q – реактивна потужність всього кола.

При рівномірному навантаженні фаз:

$$S = 3U_{\phi} I_{\phi} . \quad (3.16)$$

Для вимірювання активної потужності, у залежності від способу з'єднання, використовують три, або два чи один ватметр.

У чотирипровідному трифазному колі при несиметричному навантаженні для вимірювання активної потужності кола потрібно включити три ватметри (рис. 3.12, а).

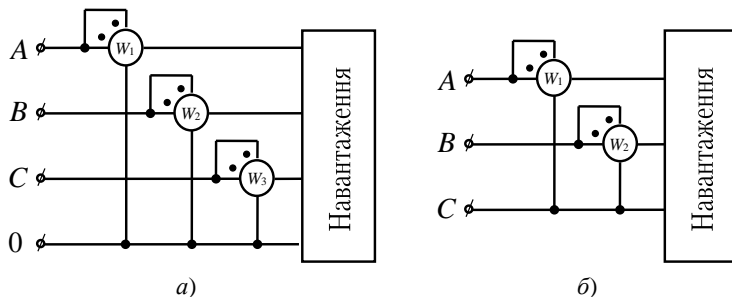


Рис. 3.12

Сума показів трьох ватметрів дорівнює активні потужності, яка споживається навантаженням трьох фаз та нульового проводу. Позначивши струми та напруги ватметрів відповідними векторами, маємо:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= U_{A0} I_A \cos \angle \vec{U}_{A0} \vec{I}_A = \vec{U}_{A0} \vec{I}_A ; \\
 P_2 &= \vec{U}_{B0} \vec{I}_B ; P_3 = \vec{U}_{C0} \vec{I}_C ; \\
 P_1 + P_2 + P_3 &= \vec{U}_{A0} \vec{I}_A + \vec{U}_{B0} \vec{I}_B + \vec{U}_{C0} \vec{I}_C = \\
 &= (\vec{U}_{A0'} + \vec{U}_{0'0}) \vec{I}_A + (\vec{U}_{B0'} + \vec{U}_{0'0}) \vec{I}_B + (\vec{U}_{C0'} + \vec{U}_{0'0}) \vec{I}_C = \\
 &= \vec{U}_{A0'} \vec{I}_A + \vec{U}_{B0'} \vec{I}_B + \vec{U}_{C0'} \vec{I}_C + \vec{U}_{0'0} (\vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C) = \\
 &= U_{A0'} I_A \cos \varphi_A + U_{B0'} I_B \cos \varphi_B + \\
 &+ U_{C0'} I_C \cos \varphi_C + U_{0'0} I_0 \cos \varphi_0 = \\
 &= P_A + P_B + P_C + P_0 .
 \end{aligned}$$

При симетричному режимі роботи досить одного ватметра, покази якого, у відповідності з (3.12), треба перемножити на три.

Для трипровідного кола, незалежно від схеми з'єднання споживачів, для вимірювання активної потужності трифазного кола досить два ватметри включити по схемі, зображені на рис. 3.12, б. Справді:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \vec{U}_{AC} \vec{I}_A ; P_2 = \vec{U}_{BC} \vec{I}_B ; \\
 P_1 + P_2 &= (\vec{U}_{A0'} - \vec{U}_{C0'}) \vec{I}_A + (\vec{U}_{B0'} - \vec{U}_{C0'}) \vec{I}_B = \\
 &= \vec{U}_{A0'} \vec{I}_A + \vec{U}_{B0'} \vec{I}_B - \vec{U}_{C0'} (\vec{I}_A + \vec{I}_B) = \\
 &= U_{A0'} I_A \cos \varphi_A + U_{B0'} I_B \cos \varphi_B + \\
 &+ U_{C0'} I_C \cos \varphi_C = P_A + P_B + P_C .
 \end{aligned}$$

3.6. Обертове магнітне поле

Система трифазних струмів широко використовується для створення обертового магнітного поля, яке покладено в основу принципу дії найбільш розповсюджених двигунів змінного струму.

Розглянемо магнітне поле однієї котушки, через яку протікає синусоїдний струм $i = I_m \sin \omega t$. Зобразимо цю котушку умовно одним витком (рис. 3.13, а). Напрямок струму позначимо хрестиком (від спостерігача) та крапкою (до спостерігача). Напрямок струму та додатний напрям вектора магнітної індукції зв'язані між собою правилом правого гвинта.

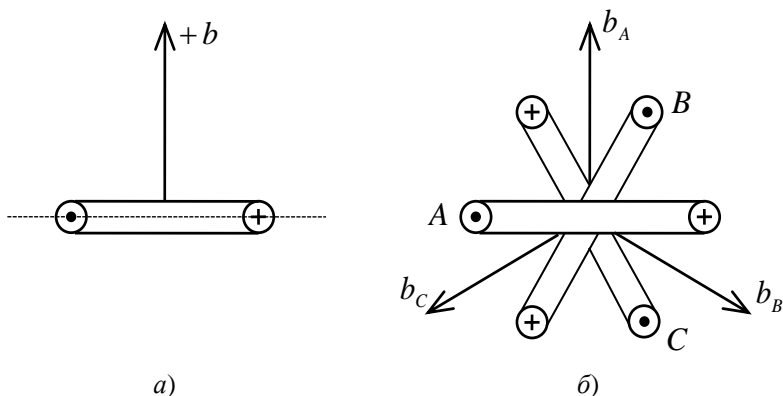


Рис. 3.13

Миттєве значення магнітної індукції b при лінійній залежності індукції від струму запишемо як $b = B_m \sin \omega t$. Протягом першої половини періоду струму індукція, змінюючись за синусоїдним законом, ковзає вгору вздовж перпендикуляру до площини котушки, протягом другої половини періоду вектор індукції, змінивши напрям на протилежний, ковзає вертикально вниз. Таке магнітне поле називається **пульсуючим**.

Розмістимо три однакові котушки так, щоб їх осі були розміщені в просторі під кутом 120° одна до одної (рис. 3.13, б) та приєднаємо ці котушки до симетричної трифазної ЕРС. Тоді струми котушок:

$$i_A = I_m \sin \omega t ;$$

$$i_B = I_m \sin(\omega t - 120^\circ) ;$$

$$i_c = I_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Позначимо додатні напрями векторів магнітної індукції поля кожної з котушок. Миттєве значення магнітної індукції поля, створеного кожною з котушок:

$$b_A = B_m \sin \omega t ;$$

$$b_B = B_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$b_C = B_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Результуючий вектор магнітної індукції трифазної системи одержимо, як суму векторів \vec{b}_A , \vec{b}_B , \vec{b}_C . Розглянемо цю суму для моментів: $\omega t = 0$, $\omega t = \pi/2$, $\omega t = \pi$, $\omega t = 3\pi/2$ (рис. 3.14, а - г).

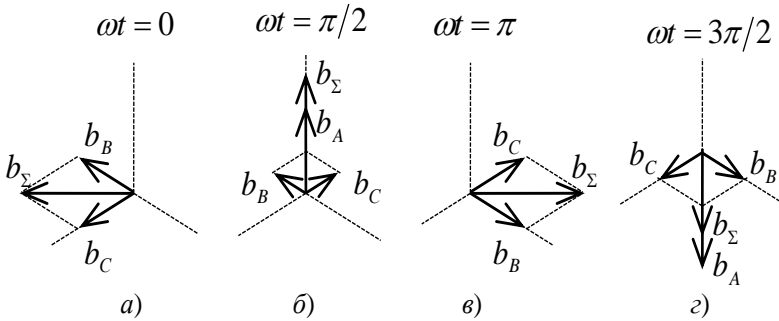


Рис. 3.14

Для моменту $\omega t = 0$:

$$b_A = 0 ;$$

$$b_B = B_m \sin(-120^\circ) = -B_m \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$b_C = B_m \sin 120^\circ = B_m \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Сумарний вектор b_Σ , як видно з рис. 3.14, а:

$$b_\Sigma = 1,5B_m .$$

При $\omega t = \pi/2$ (рис. 3.14, б):

$$b_A = B_m ;$$

$$b_B = B_m \sin(-30^\circ) = -0,5B_m$$

$$b_C = B_m \sin 210^\circ = -0,5B_m .$$

Звідси $b_\Sigma = 1,5B_m$.

На рис. 3.14, в, з показані величина та положення вектора сумарної магнітної індукції для моментів $\omega t = \pi$ та $\omega t = 3\pi/2$. Проведений аналіз показує, що **магнітна індукція системи трифазних струмів, залишаючись по величині незмінною ($1,5 B_m$), обертається з кутовою частотою ω за годинниковою стрілкою. За один період змінного струму магнітне поле робить один оберт.** Обертове магнітне поле використовується для побудови трифазних двигунів. Асинхронний трифазний двигун, наприклад, має статор, обмотки якого створюють обертове магнітне поле, та ротор з обмоткою. Поле статора наводить струми в обмотці ротора. Механічна взаємодія цих струмів з обертовим магнітним полем обертає ротор у тому ж самому напрямі, у якому обертається поле. При цьому швидкість обертання ротора дещо менша від швидкості обертання магнітного поля, інакше струми у роторі не наводились би і обертальний момент не виникав би. Разом з ротором обертається і вал двигуна.

3.7. Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.7.1. До трипровідного трифазного кола з лінійною напругою $U_n = 380 \text{ В}$ підключили рівномірне навантаження, з'єднане зіркою. Коефіцієнт потужності навантаження $\cos \varphi = 0,5$, струм у навантаженні фази $I_\phi = 22 \text{ А}$. Визначити повний, активний та реактивний опори навантаження фази, а також повну, активну та реактивну потужність кола.

Відповідь: $Z = 10 \text{ Ом}$, $R_n = 5 \text{ Ом}$, $X_n = 8,7 \text{ Ом}$, $S = 14,52 \text{ кВА}$,
 $P = 7,26 \text{ кВт}$, $Q = 12,57 \text{ кВар}$.

Завдання 3.7.2. Трифазне чотирипровідне коло з лінійною напругою $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ навантажене лампами розжарювання, кожна з яких має опір 250 Ом . У фазу A включено паралельно 5 ламп, у фазу B паралельно включено 3 лампи, у фазу C – одна лампа. Визначити фазні струми при обриві нейтрального проводу.

Відповідь: $I_A = 3,1 \text{ А}$, $I_B = 2,8 \text{ А}$, $I_C = 1,2 \text{ А}$.

Завдання 3.7.3. До трифазного кола з лінійною напругою $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ приєднали рівномірне навантаження з опором $R = 100 \text{ Ом}$ (рис. 3.15). Визначити напругу на фазах навантаження та струми у фазах до та після перегорання запобіжника у фазі A . Побудувати векторні діаграми струмів та напруг.

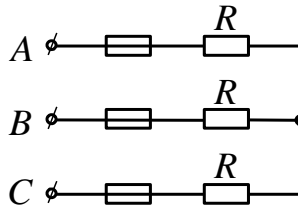


Рис. 3.15

Відповідь: $U_{\phi} = 127 \text{ В}$, $I_A = I_B = I_C = 1,27 \text{ А}$, $U_B = U_C = 110 \text{ В}$,
 $U_A = 190,5 \text{ В}$, $I_A = 0 \text{ А}$, $I_B = I_C = 1,1 \text{ А}$.

Завдання 3.7.4. Навантаження трифазного кола (рис. 3.16) рівномірне та має активно-індуктивний характер. Фазна напруга $U_{\phi} = 380 \text{ В}$ при частоті $f = 50 \text{ Гц}$. Активна потужність, яку споживає навантаження трифазного кола $P = 1,44 \text{ кВт}$, коефіцієнт потужності навантаження $\cos \varphi = 0,85$. Розрахувати активний

опір та індуктивність навантаження, діючи значення лінійних та фазних струмів.

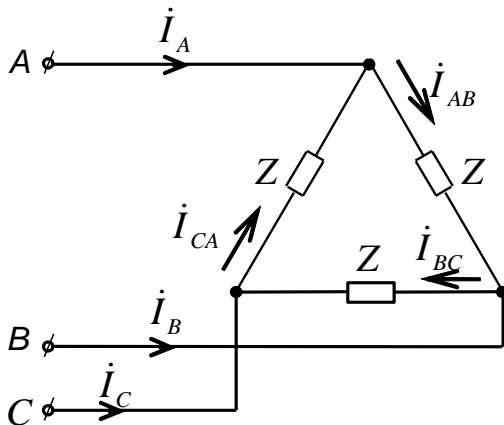


Рис. 3.16

Відповідь: $R_n = 216 \text{ Ом}$, $L = 430 \text{ мГн}$, $I_n = 2,58 \text{ А}$, $I_\phi = 1,49 \text{ А}$.

Завдання 3.7.5. Навантаження трифазного кола (рис. 3.16) активне і рівномірне, фазний струм $I = 1 \text{ А}$. Як зміняться усі струми у колі, якщо виникне обрив лінійного проводу A ?

Відповідь: $I_A = 0 \text{ А}$, $I_B = I_C = 1,5 \text{ А}$, $I_{AB} = I_{CA} = 0,5 \text{ А}$, $I_{BC} = 1 \text{ А}$.

3.8. Запитання для поточного контролю

1. Дайте визначення трифазної системи ЕРС.
2. Приведіть співвідношення для лінійних та фазних напруг і струмів при з'єднанні зіркою і трикутником у трифазному колі.
3. Як розраховують струми у трипровідному трифазному колі, з'єднаному зіркою?
4. Як розраховують струм у чотиривідному трифазному колі?
5. Як розраховують трифазні кола при з'єднанні трикутником?

-
6. Як розраховується активна, реактивна та повна потужності у трифазному колі?
 7. Приведіть схеми для вимірювання потужності у чотири- та трипровідному трифазних колах.

Розділ 4. Кола періодичного несинусоїдного струму

4.1. Розкладання періодичних несинусоїдних функцій у тригонометричний ряд Фур'є

Для багатьох електротехнічних пристроїв робочим режимом роботи є такий режим, при якому форми кривих струмів та напруг суттєво відрізняються від синусоїдних. Періодичні сигнали у вигляді імпульсів різної форми знаходять широке застосування у різноманітних пристроях автоматики та управління. Нарешті, у нелінійних колах навіть при синусоїдній формі вхідних сигналів виникають сигнали – відгуки несинусоїдної форми.

З курсу математики відомо, що періодичні несинусоїдні функції, які задовольняють умовам Дирихле¹, можна розкласти у тригонометричний ряд Фур'є, тобто представити несинусоїдну функцію сумою гармонічних складових.

Нехай періодична функція $f(t)$ (рис. 4.1) має період T , тобто:

$$f(t) = f(t + T).$$

Позначимо $\omega = 2\pi/T$ і будемо називати ω основною кутовою частотою. Гармонічні складові ряду з такою частотою створюють **основну гармоніку**. Складові з більш високими кутовими частотами називаються **вищими гармоніками**.

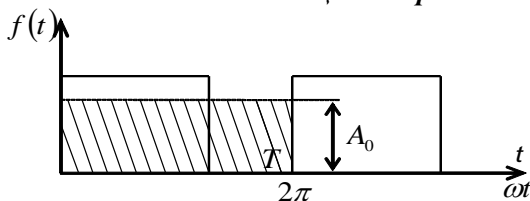


Рис. 4.1

¹ Згідно з умовами Дирихле, така функція має кінцеве число відносних максимумів та мінімумів, а також точок розриву першого роду на деякому кінцевому інтервалі.

Гармонічний ряд Фур'є у тригонометричній формі записується у вигляді:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t. \quad (4.1)$$

Тут A_0 – постійна складова або *нульова гармоніка*. Вона дорівнює середньому значенню функції $f(t)$ за її період.

Геометрично середнє значення функції за період визначається висотою прямокутника з основою T , площа якого обмежена віссю абсцис та графіком функції $f(t)$ за період (рис. 4.1). Постійну складову напруги чи струму вимірюють приладами магнітоелектричної системи. Якщо площі додатних та від'ємних значень функції $f(t)$ за період однакові (як, наприклад, для гармонічних сигналів), то середнє значення за період такої функції дорівнює нулю.

Інші складові ряду (4.1) визначають набір гармонічних складових, частоти яких кратні основній частоті ω :

B_{km} – амплітуда синусної складової k -ї гармоніки;

C_{km} – амплітуда косинусної складової k -ї гармоніки.

Об'єднавши синусну та косинусну складову кожної гармоніки у одну еквівалентну синусоїду, ряд Фур'є можна переписати і у іншій формі:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k). \quad (4.2)$$

Коефіцієнти A_0 , B_{km} , C_{km} , A_{km} , ψ_k рядів (4.1) та (4.2) визначаються за співвідношеннями:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) d(\omega t);$$

$$B_{km} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t); \quad (4.3)$$

$$C_{km} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t);$$

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad \psi_k = \arctg \frac{C_{km}}{B_{km}}.$$

Приклади розкладання у ряд Фур'є деяких простих функцій, найбільш вживаних у електротехніці, наведені у додатку 2.

Сукупність гармонічних складових несинусоїдної періодичної функції називають її дискретним частотним спектром. Спектр характеризує залежність від частоти $k\omega$ амплітуд (**спектр амплітуд**) та фаз (**спектр фаз**) періодичної несинусоїдної функції.

Приклад 4.1.

Розкласти, використовуючи таблицю додатку 2, у ряд Фур'є функцію $f(\omega t)$, графік якої показаний на рис. 4.2, а, якщо амплітуда даної функції $A_m = 15$.

Розв'язок.

У додатку 2 приводиться ряд Фур'є для функції, графік якої показано на рис. 4.2, б:

$$f(\omega t) = \frac{8a_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right).$$

Порівнюючи два графіки, помічаємо, що дана функція одержана зміщенням табличної функції по обох осях на певні величини.

Зміщення по осі ординат на величину $a_m = 0,5A_m$ приводить до появи у ряді Фур'є постійної складової (нульової гармоніки) величиною $0,5A_m$. Зміщення по осі абсцис вправо на величину $\pi/2$ приводить до появи величини цього зміщення у вигляді початкової фази $k\pi/2$ для кожної гармоніки ряду.

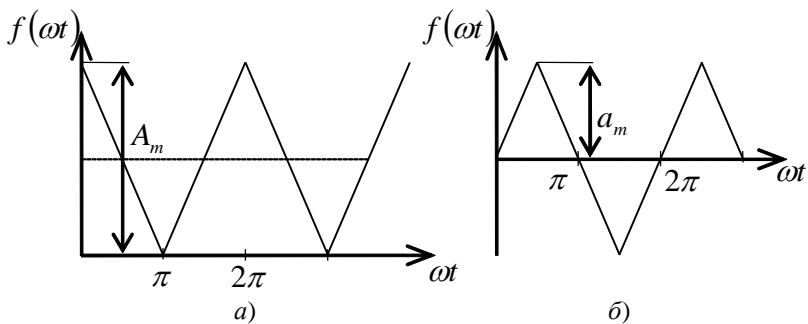


Рис. 4.2

Отже, ряд Фур'є для заданої функції має вигляд:

$$\begin{aligned}
 f(\omega t) &= \frac{A_m}{2} + \frac{4A_m}{\pi^2} \left(\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{9} \sin 3\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{25} \sin 5\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \dots \right) = \\
 &= 7,5 + 6,1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - 0,67 \sin\left(3\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + 0,24 \sin\left(5\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots
 \end{aligned}$$

Приклад 4.2.

Побудувати амплітудний та фазовий спектри функції $f(\omega t) = 4 + 10 \sin(\omega_1 t + 40^\circ) + 6 \sin(3\omega_1 t - 60^\circ)$.

Розв'язок.

Будуємо амплітудний спектр заданої функції у вигляді ряду відрізків ліній, довжина яких пропорційна величині амплітуд гармонік. Розміщення цих відрізків на частотній осі визначається частотами спектральних складових (рис. 4.3, а).

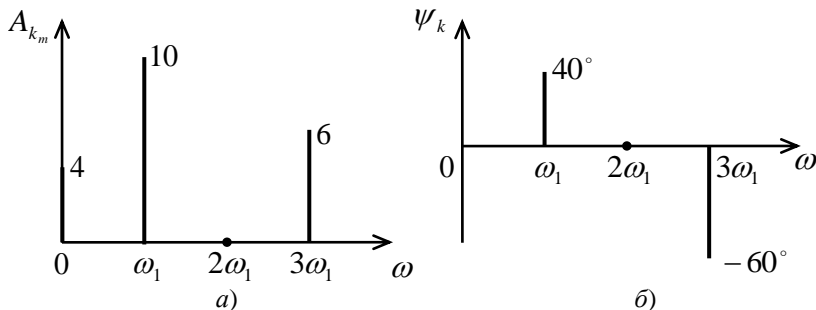


Рис. 4.3

За аналогічними міркуваннями будемо і фазовий спектр заданої функції (рис. 4.3, б)

4.2. Розрахунок кіл періодичного несинусоїдного струму

Оскільки періодичні несинусоїдні функції ЕРС, струмів та напруг завжди можна розкласти на гармонічні складові, то для розрахунку таких кіл потрібно застосовувати **принцип накладання**. Адже формально розкладання періодичного несинусоїдного сигналу $e(t)$ (рис. 4.4, а) на гармонічні складові можна зобразити ділянкою електричного кола, показаною на рис. 4.4, б, де замість одного джерела маємо декілька. Теоретично ряд Фур'є має нескінченно велику кількість членів, однак форма багатьох електричних сигналів така, що ряд швидко сходиться, і для розрахунків можна обмежитися порівняно невеликою кількістю гармонік.

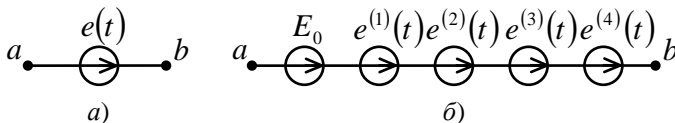


Рис. 4.4

Розраховують електричне коло для кожної гармоніки окремо, склавши потім результати підрахунків. При цьому необхідно

враховувати, що *опори реактивних елементів залежать від частоти: індуктивний опір для k -ї гармоніки $X_L^{(k)} = k\omega L$, опір ємності $X_C^{(k)} = 1/k\omega C$.*

Кожна гармоніка на комплексній площині зображується вектором, що має свою певну кутову частоту, тому не можна складати в одне результати комплексних розрахунків для різних гармонік.

Результати підрахунків теж записують у вигляді ряду гармонічних складових.

Приклад 4.3.

Розрахувати вхідний струм схеми рис. 4.5, на вхід якої діє ЕРС $e(t) = [20 + 35 \sin \omega t + 15 \sin(3\omega t + 40^\circ)]$ В, а параметри кола: $R = 40$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 73,7$ мкФ. Період основної гармоніки $T = 0,02$ с.

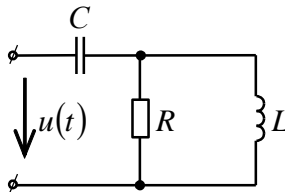


Рис. 4.5

Розв'язок.

Розраховуємо складові вхідного струму від дії кожної з гармонік ЕРС $e(t)$ окремо. Вхідний опір кола для кожної з k -тих гармонік:

$$Z^{(k)} = -jX_C^{(k)} + \frac{R \cdot jX_L^{(k)}}{R + jX_L^{(k)}}.$$

Оскільки на вході кола включений конденсатор, який має нескінченно великий опір для постійного струму, то нульової гармоніки струму у колі не буде.

Розраховуємо першу гармоніку:

$$\omega = 2\pi/T = 314 \text{ рад/с}; \quad \dot{E}_m^{(1)} = 35 \text{ В};$$

$$X_L^{(1)} = \omega L = 314 \cdot 0,1 = 31,4 \text{ Ом};$$

$$X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C} = 43,2 \text{ Ом};$$

$$Z^{(1)} = -j43,2 + \frac{40 \cdot j31,4}{40 + j31,4} = 28,1e^{-j57,3^\circ} \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_m^{(1)} = \frac{\dot{E}_m^{(1)}}{Z^{(1)}} = \frac{35}{28,1} e^{j57,3^\circ} = 1,2e^{j57,3^\circ} \text{ А};$$

$$i^{(1)} = 1,2 \sin(\omega t + 57,3^\circ) \text{ А}.$$

Розраховуємо третю гармоніку:

$$\dot{E}_m^{(3)} = 15e^{j40^\circ} \text{ В};$$

$$X_L^{(3)} = 3\omega L = 94,2 \text{ Ом};$$

$$X_C^{(3)} = \frac{1}{3\omega C} = 14,4 \text{ Ом};$$

$$Z^{(3)} = -j14,4 + \frac{40 \cdot j94,2}{40 + j94,2} =$$

$$= -j14,4 + 33,9 + j14,4 = 33,9 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір кола на третій гармоніці активний за характером, отже, у колі на частоті третьої гармоніки виникає резонанс напруг:

$$\dot{I}_m^{(3)} = \frac{\dot{E}_m^{(3)}}{Z^{(3)}} = \frac{15e^{j40^\circ}}{33,9} = 0,44e^{j40^\circ} \text{ А}.$$

Миттєве значення $i^{(3)} = 0,44 \sin(3\omega t + 40^\circ) \text{ А}$.

Отже, струм на вході схеми:

$$i(t) = [1,2 \sin(\omega t + 57,3^\circ) + 0,44 \sin(3\omega t + 40^\circ)] \text{ А}.$$

Приклад 4.4.

До полюсів $a-b$ схеми, показаної на рис. 4.6, прикладена напруга $u_1(t) = [20 \sin \omega t + 15 \sin(3\omega t - 18^\circ) + 9,8 \sin 5\omega t] \text{ В}$. Частота основної гармоніки $f = 100 \text{ Гц}$. Параметри схеми: $R_1 = 100 \text{ Ом}$,

$R_2 = 200 \text{ Ом}$, $L = 80 \text{ мГн}$, $C = 13,3 \text{ мкФ}$. Визначити напругу $u_2(t)$ на полюсах $c-d$.

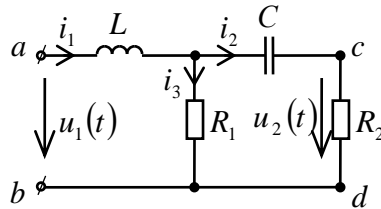


Рис. 4.6

Розв'язок.

Виведемо у загальному вигляді залежність між двома напругами, застосувавши символічне зображення синусоїдних функцій. Позначивши струми у колі, для будь-якої гармонічної складової вхідної напруги можна записати:

$$\dot{U}_1 = jX_L \cdot \dot{I}_1 + (-jX_C) \dot{I}_2 + \dot{U}_2.$$

Виконаємо деякі математичні перетворення, очевидні для даної схеми:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{R_2}; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_2}{R_2} + \frac{(-jX_C) \dot{I}_2 + \dot{U}_2}{R_1} = \dot{U}_2 \frac{R_1 + R_2 - jX_C}{R_1 R_2}.$$

Після підстановки одержаних співвідношень у формулу для \dot{U}_1 , маємо:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \left[\frac{(R_1 + R_2) \cdot jX_L + X_L X_C}{R_1 R_2} + \frac{-jX_C}{R_2} + 1 \right] = \\ &= \dot{U}_2 \left[1 + \frac{X_L X_C}{R_1 R_2} + j \left(\frac{X_L (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} - \frac{X_C}{R_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Тобто для кожної з k -тих гармонік можна записати:

$$\dot{U}_2^{(k)} = \frac{\dot{U}_1^{(k)}}{1 + \frac{X_L^{(k)} X_C^{(k)}}{R_1 R_2} + j \left(\frac{X_L^{(k)} (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} - \frac{X_C^{(k)}}{R_2} \right)},$$

або

$$\dot{U}_{2m}^{(k)} = \frac{\dot{U}_{1m}^{(k)}}{D^{(k)}},$$

де $D^{(k)}$ – коефіцієнт, який залежить від частоти.

Розрахуємо $\dot{U}_{2m}^{(k)}$ для кожної з гармонік. Для першої гармоніки кутова частота $\omega = 2\pi f = 628 \text{ рад/с}$:

$$\dot{U}_{1m}^{(1)} = 20 \text{ В}, \quad X_L^{(1)} = \omega L = 628 \cdot 0,08 = 50 \text{ Ом};$$

$$X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{628 \cdot 13,3} = 120 \text{ Ом}.$$

Тоді коефіцієнт $D^{(1)}$:

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= 1 + \frac{50 \cdot 120}{200 \cdot 100} + j \left(\frac{50 \cdot 300}{200 \cdot 100} - \frac{120}{200} \right) = \\ &= 1,3 + j0,15 = 1,31e^{j6,6^\circ}. \end{aligned}$$

Напруга на полюсах $c - d$:

$$\dot{U}_{2m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_{1m}^{(1)}}{D^{(1)}} = 15,27e^{-j6,6^\circ} \text{ В}.$$

Для третьої гармонічної складової:

$$\dot{U}_{1m}^{(3)} = 15e^{-j18^\circ} \text{ В};$$

$$X_L^{(3)} = 3\omega L = 150 \text{ Ом}; \quad X_C^{(3)} = \frac{1}{3\omega C} = 40 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} D^{(3)} &= 1 + \frac{150 \cdot 40}{200 \cdot 100} + j \left(\frac{150 \cdot 300}{200 \cdot 100} - \frac{40}{200} \right) = \\ &= 1,3 + j2,05 = 2,43e^{j57,6^\circ}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{2m}^{(3)} = \frac{15e^{-j18^\circ}}{2,43e^{j57,6^\circ}} = 6,17e^{-j75,6^\circ} \text{ В}.$$

Для п'ятої гармоніки вхідної напруги:

$$\dot{U}_{1m}^{(5)} = 9,8 \text{ В}; X_L^{(5)} = 5\omega L = 250 \text{ Ом}; X_C^{(5)} = \frac{1}{5\omega C} = 24 \text{ Ом};$$

$$D^{(5)} = 1 + \frac{250 \cdot 24}{200 \cdot 100} + j \left(\frac{250 \cdot 300}{200 \cdot 100} - \frac{24}{200} \right) =$$

$$= 1,3 + j3,63 = 3,86e^{j70,3^\circ};$$

$$\dot{U}_{2m}^{(5)} = \frac{9,8}{3,86e^{j70,3^\circ}} = 2,54e^{-j70,3^\circ} \text{ В}.$$

Запишемо миттєве значення напруги на полюсах $c-d$:

$$u_2(t) = u_2^{(1)}(t) + u_2^{(3)}(t) + u_2^{(5)}(t) = \\ = [15,27 \sin(\omega t - 6,6^\circ) + 6,17 \sin(3\omega t - 75,6^\circ) + 2,54 \sin(5\omega t - 70,3^\circ)] \text{ В}.$$

4.3. Діючі та середні значення несинусоїдних ЕРС, напруг та струмів

Діюче значення періодичної функції (або середньоквадратичне значення за період) визначається за формулою:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}.$$

Для кіл періодичного несинусоїдного струму у загальному випадку для функції $f(t)$ можна записати ряд:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Тоді для визначення діючого значення F маємо:

$$\begin{aligned}
 F^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \right]^2 dt = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt + \\
 &+ \frac{1}{T} \sum_{\substack{i=0 \\ k=0 \\ i \neq k}}^{\infty} \int_0^T A_{im} A_{km} \sin(i\omega t + \psi_i) \sin(k\omega t + \psi_k).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Кожен з інтегралів першої суми визначає діюче значення k - тої гармоніки, кожен з інтегралів другої суми дорівнює нулю.

Отже, **діюче значення періодичної несинусоїдної функції:**

$$F = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2} = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots}, \tag{4.5}$$

де A_k – діюче значення відповідних гармонічних складових.

Для кіл періодичного несинусоїдного струму діюче значення ЕРС, напруг чи струмів є однією з найважливіших кількісних характеристик. **Вимірюються діючі значення приладами електромагнітної, електродинамічної, електростатичної та теплової систем.**

Середнє значення функції по модулю визначається за формулою:

$$F_{сеп} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt. \tag{4.6}$$

Якщо функція $f(t)$ має однакові додатні та від'ємні півхвилі, то середнє значення функції визначається за додатний півперіод:

$$F_{сеп} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt.$$

Вимірюється середнє значення періодичної несинусоїдної величини приладами магнітоелектричної системи з випрямлячем.

При аналізі роботи електротехнічних та електронних схем у режимі несинусоїдних періодичних сигналів використовуються поняття про коефіцієнти форми k_ϕ , амплітуди k_a , спотворень k_c , гармонік k_ε .

Коефіцієнт форми визначається відношенням діючого значення функції F до середнього значення по модулю $F_{\text{сеп}}$:

$$k_\phi = F / F_{\text{сеп}}. \quad (4.7)$$

Коефіцієнт амплітуди k_a визначається, як відношення максимального значення функції F_m до її діючого значення:

$$k_a = F_m / F. \quad (4.8)$$

Коефіцієнт спотворень дорівнює відношенню діючого значення основної гармоніки до діючого значення всієї функції:

$$k_c = A_1 / F. \quad (4.9)$$

Коефіцієнт гармонік визначається, як відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення основної гармоніки:

$$k_\varepsilon = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}}{A_1}. \quad (4.10)$$

Приклад 4.5.

Визначити діюче значення несинусоїдної напруги $u_1(t)$ прикладу 4.4, розрахувати для цієї напруги коефіцієнт спотворень та коефіцієнт гармонік.

Розв'язок.

Діюче значення напруги $u_1(t)$, згідно з (4.5), розрахуємо, як:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{9,8}{\sqrt{2}}\right)^2} = 19 \text{ В.}$$

Коефіцієнт спотворень:

$$k_c = \frac{U_1}{U} = \frac{20/\sqrt{2}}{19} = 0,75.$$

Коефіцієнт гармонік:

$$k_2 = \frac{\sqrt{U_3^2 + U_5^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{(15/\sqrt{2})^2 + (9,8/\sqrt{2})^2}}{20/\sqrt{2}} = 0,9.$$

4.4. Потужність у колах періодичного несинусоїдного струму

У колах періодичного несинусоїдного струму мають справу з активною, реактивною та повною потужністю, як і у колах синусоїдного струму. Крім того, для кіл несинусоїдного струму вводиться поняття про так звану потужність спотворення.

Активна потужність P для кіл змінного струму визначається, як середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt.$$

Якщо:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{u_k});$$

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{i_k}),$$

то для несинусоїдного струму формула для активної потужності записується у вигляді:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) \right] dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} \int_0^T U_{jm} I_{km} \sin(j\omega t + \psi_{u_j}) \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos(\psi_{u_k} - \psi_{i_k}) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k. \end{aligned}$$

Таким чином, *активна потужність у колах несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей усіх гармонік. Реактивна потужність у колах несинусоїдного струму розраховується, як сума реактивних потужностей усіх гармонік:*

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k .$$

Повна потужність S визначається, як добуток діючого значення несинусоїдної напруги на діюче значення несинусоїдного струму; сума квадратів активної та реактивної потужностей у колі несинусоїдного струму не дорівнює квадрату повної потужності:

$$S^2 > P^2 + Q^2 .$$

Це обумовлено тим, що деякі гармонічні складові струму можуть бути у схемі відсутніми при наявності цих гармонік у вхідній напрузі. Тоді відсутній і внесок цих гармонік у активну та реактивну потужності, хоча у діючих значеннях для підрахунку S ці складові є. Для оцінки невідповідності у формах кривих напруги та струму вводять потужність спотворень T :

$$P^2 + Q^2 = S^2 - T^2 .$$

Відношення активної потужності P до повної S позначається літерою χ і називається коефіцієнтом потужності:

$$\chi = \frac{P}{S} .$$

Приклад 4.6.

Розрахувати активну, реактивну та повну потужності кола, приведеного в умові прикладу 4.3.

Розв'язок.

Миттєві значення ЕРС та струму у задачі:

$$e(t) = [20 + 35 \sin \omega t + 15 \sin(3\omega t + 40^\circ)] B;$$

$$i(t) = [1,2 \sin(\omega t + 57,3^\circ) + 0,44 \sin(3\omega t + 40^\circ)] A.$$

Активна потужність кола:

$$P = P_1 + P_3.$$

$P_0 = 0$, оскільки, хоча на вході діє нульова гармоніка ЕРС, постійної складової струм не має. Отже:

$$\begin{aligned} P &= E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_3 I_3 \cos \varphi_3 = \\ &= \frac{35}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1,2}{\sqrt{2}} \cos(0 - 57,3^\circ) + \frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,44}{\sqrt{2}} \cos 0^\circ = 11,3 + 3,3 = 14,6 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Реактивна потужність $Q = Q_1 + Q_3 = Q_1$. (Нагадаємо, що за умовою задачі у схемі відбувається резонанс напруг на третій гармоніці, тобто характер кола на частоті третьої гармоніки чисто активний):

$$Q_1 = E_1 I_1 \sin \varphi_1 = \frac{35}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1,2}{\sqrt{2}} \sin(-57,3^\circ) = -17,7 \text{ Вар}.$$

Повна потужність кола:

$$\begin{aligned} S &= EI = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_3^2} \cdot \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \\ &= \sqrt{20^2 + \left(\frac{35}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1,2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,44}{\sqrt{2}}\right)^2} = 30,3 \text{ ВА}. \end{aligned}$$

Потужність спотворень:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 19,6 \text{ ВА}.$$

4.5. Завдання для самостійної роботи

Завдання 4.5.1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну несинусоїдну напругу $u(t)$, графік якої зображено на рис. 4.7, використавши таблицю, приведену у додатку 2.

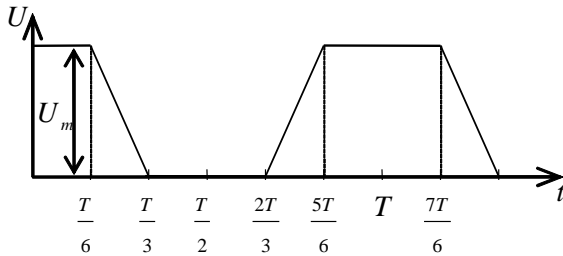


Рис. 4.7

Завдання 4.5.2. На вхід схеми, зображеної на рис. 4.8, діє напруга $u(t) = [60 + 80 \sin(\omega t - 48^\circ) + 30 \sin 2\omega t]$ В. Параметри схеми: $R = 100$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 30$ мкФ. Період основної гармоніки $T = 0,02$ с. Розрахувати струм на вході схеми та визначити його діюче значення.

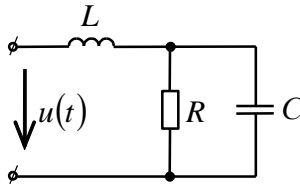


Рис. 4.8

Відповідь:

$$i(t) = [0,6 + 1,42 \sin(\omega t - 29^\circ) + 0,97 \sin(2\omega t - 44^\circ)] \text{ A}, I = 1,36 \text{ A}.$$

Завдання 4.5.3. Коло, схема якого показана на рис. 4.9, включається до періодичної несинусоїдної напруги $u(t) = [120 + 130 \sin(\omega t + 119^\circ) + 47 \sin(2\omega t - 45^\circ)]$ В. Період основної гармоніки $T = 0,02$ с. Параметри кола: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $L = 0,1$ Гн. Розрахувати миттєве значення вхідного струму та активну, повну та реактивну потужності кола, якщо відомо, що у схемі настає резонансний режим на другій гармоніці.

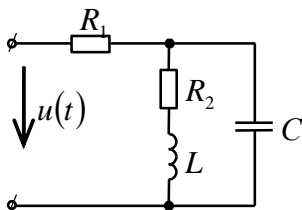


Рис. 4.9

Відповідь:

$$i(t) = [1 + 0,95 \sin(\omega t + 105^\circ) + 0,15 \sin(2\omega t - 45^\circ)] \text{ A}, \quad P = 184 \text{ Вт}, \\ S = 187,6 \text{ ВА}, \quad Q = 15 \text{ Вар}.$$

Завдання 4.5.4. Розрахувати діюче значення, коефіцієнти спотворень та гармонік для напруги $u(t)$ задачі 4.5.2.

Відповідь: $U = 85,3 \text{ В}$, $k_c = 0,66$, $k_2 = 0,37$.

Завдання 4.5.5. Розрахувати коефіцієнт спотворень струмів первинного i_1 та вторинного i_2 кіл (рис. 4.10) з параметрами: $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 60 \text{ Ом}$, $\omega L_1 = 30 \text{ Ом}$, $\omega L_2 = 60 \text{ Ом}$, $\omega M = 20 \text{ Ом}$. Напруга $u(t) = (100 + 70,7 \sin \omega t) \text{ В}$.

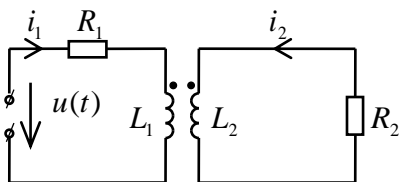


Рис. 4.10

Відповідь: $k_{c_1} = 0,366$, $k_{c_2} = 1$.

4.6. Запитання для поточного контролю

1. Що таке нульова, основна та вищі гармоніки у спектрі періодичної несинусоїдної функції?

-
2. Як розраховуються кола періодичного несинусоїдного струму?
 3. Як розраховується діюче значення періодичного несинусоїдного струму?
 4. Як розраховуються активна, реактивна та повна потужності у колі несинусоїдного струму?
 5. Якими приладами вимірюються діючі значення періодичних несинусоїдних сигналів?

Частина друга

Перехідні процеси у лінійних електричних колах

Розділ 5. Розрахунок перехідних процесів класичним методом

5.1. Виникнення перехідних процесів. Закони комутації та початкові умови

Перехідними називаються процеси, які відбуваються у електричних колах при переході від одного, усталеного режиму роботи, до іншого, теж усталеного.

В усталеному режимі роботи кола напруги та струми на його ділянках можуть бути або незмінними у часі (кола постійного струму), або ж змінюватися за періодичними законами (кола змінного струму). Відсутність струмів та напруг у колі теж є усталеним режимом роботи. Розподіл струмів та напруг на елементах електричного кола змінюється у тому випадку, коли відбуваються вмикання чи розмикання пасивних або активних віток, коротке замикання окремих ланок, перемикання різного роду і т. ін. Всі ці операції будемо надалі називати **комутаціями**. Здійснюються комутації ключами-двополюсниками, опір яких у ідеальному випадку дорівнює нулю, якщо ключ замкнутий (рис. 5.1, а), та нескінченно великий, коли ключ розімкнутий (рис. 5.1, б). Електричні схеми з ключами прийнято зображувати до моменту комутації. Будемо вважати, що комутації відбуваються практично миттєво, тобто їх тривалість дорівнює нулю.

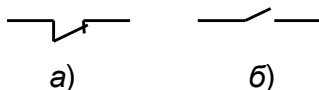


Рис. 5.1

Фізично перехідні процеси можна трактувати як процеси переходу від енергетичного стану до комутаційного режиму кола до енергетичного стану кола після комутації.

Аналізуючи усталений режим роботи електричних кіл, ми відмічали, що такий режим характеризується коливанням енергії. У колах з реактивними елементами електрична енергія, яка підводиться до кола, може не тільки розсіюватися у резистивних елементах, але і запасатися у магнітному колі котушки ($w_m = Li_L^2/2$) чи електричному колі конденсатора ($w_e = Cu_C^2/2$). При цьому протягом певного проміжку часу ця енергія накопичується у реактивних елементах, а потім повертається назад у коло. Якщо у таких колах з реактивними елементами відбуваються комутації, то енергія, що накопичується у реактивних елементах, не може змінитися миттєво, стрибком, інакше потужність (швидкість зміни енергії у часі), досягла б нескінчених значень, що фізично неможливо, оскільки реальні джерела живлення не можуть забезпечити нескінченно велику потужність. **Якщо, наприклад, розімкнути вітку з індуктивністю, то обов'язково виникне у місці розмикання іскра, через опір якої розсіюється енергія, накопичена у магнітному полі котушки. Аналогічним чином, якщо замкнути полюси конденсатора, зарядженого попередньо до певної напруги, то накопичена у ньому електрична енергія розсіюється у з'єднувальних проводах та між контактами.** Отож, перехід від одного усталеного режиму роботи кола до іншого, теж усталеного, відбувається не миттєво, а протягом певного часу і за неперіодичними законами. У колах з тільки резистивними елементами перехід від одного усталеного режиму до іншого відбувається миттєво.

Перехідні процеси у одних випадках є небажаними і навіть небезпечними (наприклад, при коротких замиканнях у енергетичних системах). У інших випадках (наприклад, у системах автоматичного регулювання) перехідні процеси являють собою нормальний режим роботи. Через виникнення перехідних процесів спотворюється форма сигналів, що має важливе значення для

синтезу пристроїв, призначених для обробки сигналів у цифрових системах.

Розподіл струмів, потенціалів чи напруг у електричному колі у будь-який момент часу описують диференційними рівняннями. Ці рівняння часто називаються рівняннями стану.

У загальному випадку розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах зводиться до розв'язку систем неоднорідних диференційних рівнянь. У залежності від способу розв'язку рівнянь розрізняють класичний, операторний, спектральний методи розрахунку перехідних процесів, метод інтегралу Дюамеля та ін. **Цей розділ присвячений розгляду особливостей класичного методу аналізу перехідних процесів, коли перехідні струми чи напруги розраховуються безпосередньо у часовій області.**

Будемо вважати, що початок відліку тривалості перехідного процесу $t = 0$ починається з моменту комутації. Момент часу безпосередньо перед комутацією прийнято позначати, як 0_- , а зразу ж після комутації – 0_+ .

Приведені вище міркування щодо того, що запас енергії магнітного ($w_m = Li_L^2/2 = (\Psi_L^2)/2L$) чи електричного ($w_e = Ci_C^2/2 = (q^2)/2C$) полів може змінюватися тільки плавно, без стрибків, покладені в основу **двох законів комутації**.

Перший закон комутації стосується індуктивного елемента і формулюється так: **потокозчеплення та струм у індуктивності у момент комутації дорівнюють потокозчепленню та струмові безпосередньо до комутації і надалі починають змінюватись саме з цих значень**. Аналітично перший закон комутації записується так:

$$\begin{aligned}\Psi_L(0_-) &= \Psi_L(0_+); \\ i_L(0_-) &= i_L(0_+).\end{aligned}\tag{5.1}$$

У другому законі комутації мова йде про заряд та напругу на конденсаторі: **заряд та напруга на конденсаторі у момент комутації дорівнюють зарядові та напрузі безпосередньо до**

комутації і надалі починають змінюватися саме з цих значень.
Отже:

$$\begin{aligned}q_C(0_-) &= q_C(0_+); \\ u_C(0_-) &= u_C(0_+).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Значення струму в індуктивності та напруги на ємності у момент комутації називають незалежними початковими умовами.

Початкові умови визначають запаси енергії у електричному та магнітному полях пристроїв кола на момент комутації. Якщо у момент комутації напруга на всіх ємностях кола та струми у всіх індуктивностях кола дорівнюють нулю, то відповідні початкові умови називають **нульовими**.

Якщо до комутації $i_L(0_-) = 0$ (нульові початкові умови), то і в момент комутації струм через індуктивність протікати не буде, тобто котушка у цьому випадку рівнозначна розриву кола. При нульових початкових умовах для конденсатора ($u_C(0_-) = 0$) ємність рівнозначна короткому замиканню.

5.2. Загальна характеристика класичного методу розрахунку перехідних процесів

Розглянемо сутність класичного методу розрахунку перехідних процесів на прикладі схеми, зображеної на рис. 5.2.

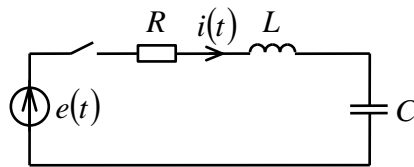


Рис. 5.2

Нехай коло R , L , C підключається до змінної у часі за якимось законом ЕРС $e(t)$.

Диференційне рівняння, яке описує роботу схеми у будь-який час – це рівняння другого закону Кірхгофа:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t). \quad (5.3)$$

Визначити перехідний струм $i(t)$ – означає розв'язати це інтегро-диференційне рівняння.

Продиференціювавши (5.3), отримаємо:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt}. \quad (5.4)$$

Маємо неоднорідне диференційне рівняння другого порядку, загальний інтеграл якого шукається у вигляді часткового розв'язку неоднорідного рівняння i' та загального розв'язку однорідного диференційного рівняння i'' :

$$i(t) = i' + i''.$$

У електротехніці частковий розв'язок неоднорідного рівняння i' називають **вимушеною складовою** $i' = i_{\text{вим}}(t)$. **Виникає вимушена складова під дією зовнішньої сили (джерела енергії)**. Вона характеризує роботу схеми (при постійній чи періодичній ЕРС $e(t)$) в усталеному режимі після комутації, коли перехідні процеси вже закінчилися. Розрахунки цих складових розглядалися у попередніх розділах посібника, коли ми не мали підозри про існування перехідних процесів.

Загальний розв'язок однорідного диференційного рівняння (тобто рівняння без правої частини) називають у електротехніці **вільною складовою** $i'' = i_{\text{вил}}(t)$. **Вільна складова не залежить від дії джерела енергії у скомутованій схемі, і її виникнення обумовлене накопиченням енергії у реактивних елементах схеми.**

Для однорідного диференційного рівняння:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

маємо відповідне характеристичне рівняння:

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0$$

Позначивши корені цього рівняння, як p_1 та p_2 , вільну складову будемо шукати у вигляді суми показникових функцій:

$$i_{віль}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (5.5)$$

де A_1 та A_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Отже, **перехідний (або повний)** струм $i(t)$ маємо шукати у вигляді:

$$i(t) = i_{вм}(t) + i_{віль}(t). \quad (5.6)$$

Розрахунок перехідних процесів класичним методом виконується у такій послідовності:

- складається рівняння стану електричного кола та відповідне однорідне диференціальне рівняння;
- розраховується вимушена складова шуканої величини;
- складається характеристичне рівняння, визначаються його корені та записується загальний вигляд вільної складової шуканої величини;
- визначаються сталі інтегрування.

Порядок диференціальних рівнянь, які описують перехідний процес у схемі, у загальному випадку визначається кількістю реактивних елементів у скомутованій схемі після її спрощення, тобто заміни послідовно чи паралельно з'єднаних індуктивностей (ємностей) однією, еквівалентною.

Із рівняння (5.6) видно, що струм у колі можна розглядати у вигляді двох складових, які накладаються одна на одну: усталеної, яка ніби-то установлюється зразу, та вільної, яка виникає тільки під час перехідного процесу. Власне, наявність цієї вільної складової і обумовлює при перехідних процесах безперервне наближення до усталеного режиму.

Звичайно, реально існують тільки перехідні струми та напруги, а умовне їх розкладання на дві складові, вимушену та вільну, є тільки зручним математичним прийомом, що полегшує аналіз перехідних процесів.

5.3. Перехідні процеси у колі R, L

Проаналізуємо перехідні процеси у найпростіших електричних колах з одним накопичувачем енергії.

Розрахуємо класичним методом перехідний струм $i(t)$ у схемі рис. 5.3, а, де $e(t) = E$ (постійна ЕРС).

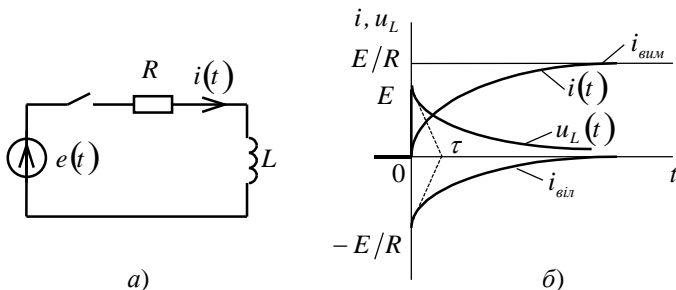


Рис. 5.3

Диференційне рівняння, яке описує стан електричного кола, має вигляд:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E$$

Перехідний струм шукаємо у вигляді суми вимушеної та вільної складових:

$$i(t) = i_{\text{взм}}(t) + i_{\text{віль}}(t). \quad (5.7)$$

Вимушена складова $i_{\text{взм}}(t)$ – це струм у колі в усталеному режимі, коли перехідні процеси уже закінчилися. Оскільки у колах постійного струму $X_L = 0$, то:

$$i_{\text{взм}}(t) = E/R. \quad (5.8)$$

Однорідне диференційне рівняння для скомутованого кола має вигляд:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

Йому відповідає характеристичне рівняння:

$$R + pL = 0,$$

що має один корінь: $p = -R/L$.

Вільну складову струму шукаємо у вигляді:

$$i_{в\dot{л}}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5.9)$$

Сталу інтегрування A будемо визначати з початкових умов, розглядаючи рівняння (5.7) в момент комутації, тобто при $t = 0$. Маємо:

$$i(0) = i_{в\dot{и}м}(0) + i_{в\dot{л}}(0). \quad (5.10)$$

За першим законом комутації струм у колі у момент комутації:

$$i(0) = i(0_-) = 0,$$

оскільки до комутації коло не було підключене до ЕРС.

Вимушена складова, згідно з (5.8), від часу не залежить: $i_{в\dot{и}м}(0) = E/R$. Вільна складова у момент комутації $t = 0$, як випливає з (5.9), дорівнює A : $i_{в\dot{л}}(0) = A$. Виходить, що у момент комутації рівняння (5.10) має вигляд:

$$0 = E/R + A.$$

Звідси стала інтегрування $A = -E/R$.

Отже, перехідний струм у колі R , L змінюється за законом:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5.11)$$

Графічна залежність перехідного струму від часу показана на рис. 5.3, б. Перехідний струм $i(t)$ монотонно зростає від нульового значення у момент комутації, асимптотично наближаючись до усталеного значення E/R при $t \rightarrow \infty$.

Тривалість перехідного процесу прийнято оцінювати за так званою сталою часу кола $\tau = 1/|p|$. Для кола R , L стала

часу визначається як $\tau = L/R$, має розмірність часу і вимірюється у секундах.

Рівняння (5.11) можна записати у вигляді:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (5.12)$$

Стала часу τ , як видно з (5.12), показує, за який час вільна складова перехідного струму зменшується за абсолютною величиною у $e = 2,718$ разів у порівнянні зі своїм початковим значенням. За час $t = \tau$ перехідний струм у колі досягає значення:

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-1}) \cong 0,632 \frac{E}{R}$$

Вважається, що перехідний процес закінчується через відрізок часу $t = (3 \div 5)\tau$ після комутації. Графічно сталу часу можна визначити, провівши піддотичну до експоненційної функції у точці $t = 0$. Чим більший активний опір кола, тим менша стала часу і тим, відповідно, швидше закінчується перехідний процес. Це цілком логічно і з фізичної точки зору, оскільки на резисторі відбувається незворотне перетворення електричної енергії у теплову. Чим більша індуктивність L кола, тим більше енергії вона накопичить в усталеному режимі, і тим, відповідно, більшою буде тривалість перехідного процесу.

Напряга на індуктивності у схемі рис. 5.3, а:

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -L \frac{E}{R} \left(-\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5.13)$$

До комутації (при $t = 0_-$) $u_L(0_-) = 0$, у момент комутації напруга на індуктивності стрибком зростає до значення ЕРС. Потім ця напруга за час $(3 \div 5)\tau$ зменшується практично до нульового значення в усталеному післякомутаційному режимі (рис. 5.3, б).

Отже, у колах постійного струму в результаті комутацій на індуктивних котушках виникає перехідна напруга $L di/dt$. Це явище потрібно враховувати при експлуатації електротехнічних

пристроїв, коли виникає необхідність розмикати індуктивні вітки. При розмиканні такої вітки (рис. 5.4, а) у електричне коло включається великий опір повітряного проміжку ключа, стала часу τ зменшується майже до нуля. Струм у колі швидко падає, що веде до появи великої ЕРС самоіндукції на котушці. При цьому можливі пошкодження ізоляції між витками котушки та контактів. З цієї причини, наприклад, обмотку збудження генераторів постійного струму при необхідності швидко зняти збудження не відключають від джерела живлення, а перемикають на низькоомні розрядні опори (рис. 5.4, б).

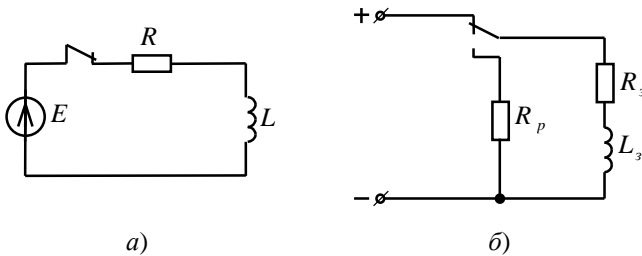


Рис. 5.4

Розглянемо перехідний процес у схемі, зображеній на рис. 5.5, а. У скомутованому колі ділянка R, L виявляється короткозамкненою.

Вимушена складова струму через індуктивність дорівнює нулю. Але у замкнутому контурі R, L струм миттєво зникати не може, оскільки котушка в усталеному режимі до комутації накопичила певну енергію магнітного поля.

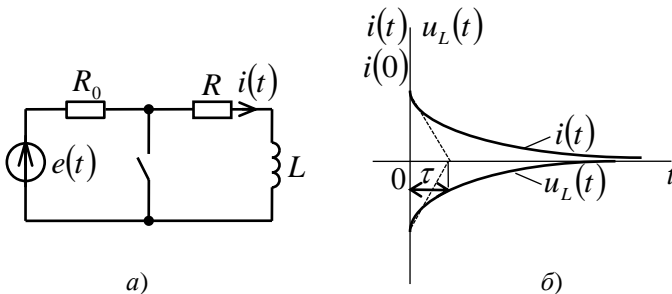


Рис. 5.5

Ця енергія поступово перетворюється у теплову енергію, що виділяється на резисторі R . Перехідний струм:

$$i(t) = i_{\text{вим}}(t) + i_{\text{віль}}(t) = 0 + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Визначаємо сталу інтегрування з початкових умов. У момент $t = 0_-$ (безпосередньо перед комутацією) через індуктивність протікає струм $i(0_-)$, значення якого може бути додатним чи від'ємним. Оскільки $i(0) = i(0_-)$, то:

$$i(0) = A,$$

а перехідний струм:

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t} = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

За проміжок часу $(3 \dots 5)\tau$ перехідний процес практично закінчується.

Напряга на індуктивності:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -Ri(0)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

На рис. 5.5, б зображені криві спаду струму та напруги на індуктивності у припущенні, що $i(0) > 0$.

Приклад 5.1.

Розрахувати перехідний струм та напругу на індуктивності у схемі рис. 5.6, а, якщо: $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $L = 2 \text{ Гн}$. Постійна напруга на вході схеми $U = 120 \text{ В}$.

Побудувати залежність $i(t)$ та $u_L(t)$ в інтервалі значень t від 0 до 5τ .

Розв'язок.

Будемо шукати перехідний струм $i(t)$ у вигляді суми вимушеної та вільної складових: $i(t) = i_{\text{вим}}(t) + i_{\text{віль}}(t)$.

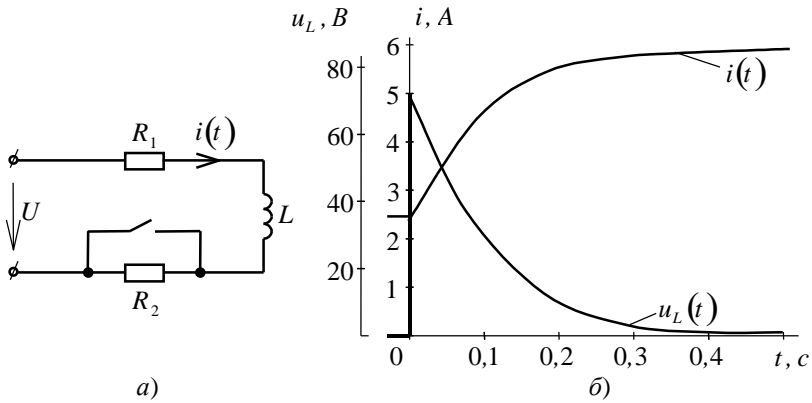


Рис. 5.6

Вимушена складова в усталеному режимі після комутації:

$$i_{\text{вум}}(t) = \frac{U}{R_1} = 6 \text{ A.}$$

Диференціальне рівняння, що описує роботу кола після комутації:

$$R_1 i + L \frac{di}{dt} = U.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$R_1 + pL = 0.$$

Корінь цього рівняння $p = -R_1/L = -10 \text{ c}^{-1}$.

Вільну складову струму шукаємо у вигляді:

$$i_{\text{ввл}}(t) = Ae^{+pt} = Ae^{-10t}.$$

Сталу інтегрування A визначаємо з початкових умов. У момент комутації струм через індуктивність дорівнює тому значенню, яке він мав до комутації:

$$i_L(0) = i_L(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2} = 2,4 \text{ A.}$$

Отже: $2,4 = 6 + A$, звідки $A = -3,6$.

Перехідний струм у колі:

$$i(t) = (6 - 3,6e^{-10t})A.$$

Напруга на індуктивності:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 72e^{-10t} B.$$

Стала часу кола $\tau = L/R_1 = 0,1 c$.

Розрахунки значень $i(t)$ та $u_L(t)$ для п'яти різних моментів часу t приведені у табл. 5.1.

Таблиця 5.1

| t, c | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|-------------|-----|------|------|------|------|------|
| $i(t), A$ | 2,4 | 4,68 | 5,51 | 5,82 | 5,93 | 5,98 |
| $u_L(t), B$ | 72 | 26,5 | 9,7 | 3,6 | 1,3 | 0,5 |

Як свідчать результати підрахунків за час $t = 5\tau$ після комутації перехідний струм досягає 99,7% від усталеного значення.

Залежності $i(t)$ та $u_L(t)$ приведені на рис. 5.6, б.

Приклад 5.2.

Обмотка реле P (рис. 5.7) має індуктивність $L = 6 Гн$ та опір $R = 400 Ом$. Ключ K_1 замикає коло живлення обмотки через кожні 75 мс на час $t_3 = 45 мс$, після чого цей самий ключ розмикається на час $t_p = 30 мс$. Ключ K_2 створює коло для закорочування обмотки через резистор R_1 . Ключі K_1 та K_2 взаємозв'язані між собою так, що при замиканні K_1 розмикається K_2 і навпаки.

Напруга джерела живлення $U = 12 В$, опір $R_1 = 400 Ом$. Визначити час спрацьовування t_c та час відпускання t_e реле, якщо струм притягування $I_n = 12 мА$, а струм відпускання $I_g = 8 мА$.

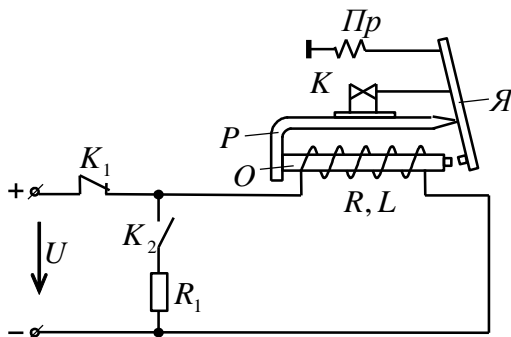


Рис. 5.7

Розв'язок.

Розглянемо спочатку принцип дії цього пристрою і проаналізуємо розвиток перехідних процесів у колі тільки якісно.

Електромагнітне реле призначене для замикання та розмикання контакту K при управлінні роботою різноманітних пристроїв. Реле має котушку індуктивності (R, L), розміщену на феромагнітному осерді O (будемо вважати для нашого прикладу індуктивність лінійною). При протіканні струму через котушку якір реле $Я$ притягується до осердя O , розмикаючи контакт K . Пружина Pr створює протидіючий момент. Електромагнітна сила, достатня для подолання протидіючого моменту пружини, залежить від струму через котушку. Внаслідок перехідних процесів струм через індуктивність плавно наростає після підключення обмотки до живлення і через певний час після комутації досягне значення струму притягування I_n (рис. 5.8). Реле спрацьовує, якір притягується до осердя, контакт K розмикається. Після відключення живлення у контурі, створеному котушкою та резистором R_1 , індуктивний струм спадає і при досягненні ним значення струму відпускання I_0 сили притягування електромагніту недостатньо для подолання протидіючого моменту пружини, якір відпускається, замикаючи

контакт K реле. Отже, наша задача зводиться до розрахунку відрізків часу t_c та t_g (рис. 5.8).

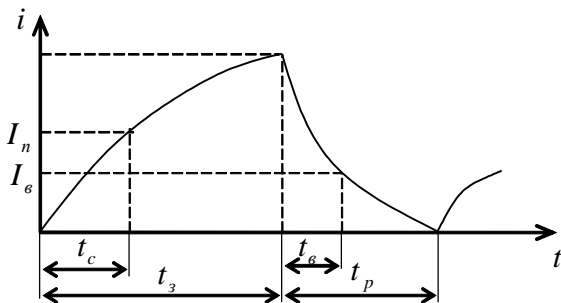


Рис. 5.8

Для розрахунку часу спрацьовування реле необхідно визначити закон, за яким змінюється струм після замикання ключа K_1 (рис. 5.9, а).

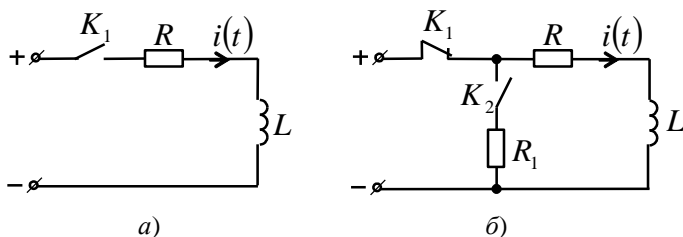


Рис. 5.9

Перехідний струм у колі змінюється за законом:

$$i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{віль}}$$

Вимушена складова струму:

$$i_{\text{вим}} = \frac{U}{R} = \frac{12}{400} = 30 \text{ мА}$$

Вільну складову шукаємо у вигляді:

$$i_{\text{віль}} = A_1 e^{p_1 t}$$

де p_1 – корінь характеристичного рівняння:

$$p_1 L + R = 0.$$

Отже,

$$p_1 = -\frac{R}{L} = -\frac{400}{6} = -66,7 \text{ c}^{-1}.$$

Оскільки початкові умови у колі нульові, тобто $i_L(0) = 0$, то $A_1 = -i_{\text{вим}}(0) = -30 \text{ мА}$.

Отже, повний струм у котушці реле змінюється за законом:

$$i(t) = (30 - 30e^{-66,7t}) \text{ мА}.$$

Визначимо, за який час t_c цей струм досягне значення струму притягування $I_n = 12 \text{ мА}$:

$$12 = 30(1 - e^{-66,7t_c}).$$

Розв'язавши рівняння, отримаємо $t_c = 7,7 \text{ мс}$.

Отже, через $7,7 \text{ мс}$ після включення живлення реле спрацює і розімкне ключ K . Струм через обмотку реле буде зростати за експоненційним законом доти, доки живлення не відключиться.

Ключ K_1 розмикається, замикається ключ K_2 (рис. 5.9, б).

Розрахуємо перехідний струм у цьому колі. Вимушеної складової струму бути не може, оскільки схема не має вимушуючої сили – джерела енергії. Диференційне рівняння кола:

$$i(R_1 + R) + L \frac{di}{dt} = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння:

$$p_2 L + R_1 + R = 0,$$

що має корінь $p_2 = -(R_1 + R)/L = -800/6 = -133,4 \text{ c}^{-1}$.

Вільна складова струму має вигляд:

$$i_{\text{вгл}} = A_2 e^{-133,4t}.$$

Шукаємо сталу інтегрування A_2 з початкових умов. До моменту комутації струм змінюється за законом:

$$i(t) = (30 - 30e^{-66,7t}) \text{ мА},$$

і на момент комутації при $t = t_3 = 45 \text{ мс}$ досягає значення:

$$i(t) = 30 - 30e^{-66,7 \cdot 0,045} = 28,5 \text{ мА}.$$

Маємо: $A_2 = 28,5 \text{ мА}$.

Отже, струм у колі рис. 5.9, б спадає в часі по закону $i(t) = 28,5e^{-133,4t} \text{ мА}$. Коли він досягне значення струму відпускання реле $I_g = 8 \text{ мА}$, якір реле відпускається. Розрахуємо час відпускання t_g з умови:

$$8 = 28,5e^{-133,4t_g}.$$

$$\text{Маємо: } t_g = \frac{\ln 0,28}{-133,4} = 9,5 \text{ мс}.$$

5.4. Перехідні процеси у колі RC

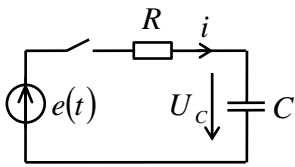
Розглянемо перехідний процес у колі R, C (рис. 5.10, а) при підключенні його до джерела постійної ЕРС: $e(t) = E$. Диференціальне рівняння, яке описує процеси у колі, має вигляд:

$$iR + u_C = E. \quad (5.14)$$

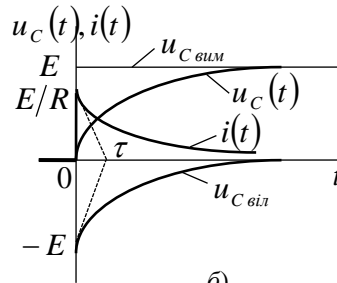
Враховуючи, що $i = C \frac{du_C}{dt}$, рівняння можна записати:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E. \quad (5.15)$$

Отже, розрахунок зводиться до розв'язку цього рівняння.



а)



б)

Рис. 5.10

Перехідну напругу на конденсаторі будемо шукати у вигляді:

$$u_C(t) = u_{C \text{ вим}} + u_{C \text{ віль}}. \quad (5.16)$$

Вимушена складова напруги на конденсаторі в усталеному режимі після комутації:

$$u_{C \text{ вим}} = E, \quad (5.17)$$

оскільки в усталеному режимі після комутації струм у колі не протікає, і вся напруга джерела енергії виявляється прикладеною до конденсатора.

Характеристичне рівняння, як видно з (5.15), має вигляд:

$$pRC + 1 = 0,$$

звідки $p = -\frac{1}{RC}$.

Отже, вільна складова напруги на конденсаторі має бути записана, як:

$$u_{C \text{ віль}} = Ae^{pt} = A^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (5.18)$$

Визначимо сталу інтегрування A , розв'язавши рівняння (5.16) у момент комутації. Оскільки до комутації напруги на обкладках конденсатора не було, то, згідно з другим законом комутації, $u_C(0_-) = u_C(0) = 0$. Отже, маємо:

$$0 = E + A, \text{ тобто } A = -E.$$

Перехідна напруга на конденсаторі, таким чином, описується законом:

$$u_c(t) = E - Ee^{pt}.$$

Введемо сталу часу $\tau = 1/|p|$. Тоді маємо:

$$u_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (5.19)$$

Для RC -кола $\tau = RC$ і вимірюється у секундах. Як і у випадку кола RL , ця величина показує, за який час вільна складова напруги на конденсаторі зменшується за абсолютною величиною у $e = 2,72$ разів. Залежність $u_c(t)$ наведена на рис. 5.10, б.

Розрахуємо перехідний струм у колі:

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = ECpe^{pt} = \frac{E}{R} e^{pt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5.20)$$

Графік залежності перехідного струму від часу приведений на рис. 5.10, б. У момент комутації маємо у схемі стрибок струму на величину E/R . Справді, оскільки при нульових незалежних початкових умовах конденсатор являє собою короткозамкнуту ділянку кола, то весь опір схеми у момент $t = 0$ визначається тільки резистором. Надалі струм асимптотично прямує до нульового значення в усталеному післякомутаційному режимі.

Чим більші параметри R та C , тим більша стала часу кола τ , і тим, відповідно, довше триває перехідний процес у RC -колі.

Завершуючи теоретичний розгляд класичного методу розрахунку перехідних процесів у колах з одним реактивним елементом, звернемо увагу на загальний вигляд характеристичного рівняння, складеного для пошуку вільної складової.

Для кола RL маємо:

$$pL + R = 0.$$

Для кола RC :

$$\frac{1}{pC} + R = 0.$$

Для кола RLC (див. рис. 5.2):

$$pL + \frac{1}{pC} + R = 0.$$

Ці рівняння повторюють загальний вигляд виразів для комплексного опору схеми після комутації при заміні $j\omega \rightarrow p$.

Отже, **найпростіший спосіб складання характеристичного рівняння для будь-якої схеми такий:**

- записують формулу вхідного опору Z кола у комплексній формі;
- у формулі для Z виконують заміну співмножника $j\omega$ на p ;
- отриманий вираз $Z(p)$ прирівнюють до нуля.

Характеристичне рівняння можна отримати, прирівнюючи до нуля вхідний опір $Z(p)$ відносно будь-яких віток кола. Якщо схема має джерело струму, то не слід складати рівняння відносно полюсів джерела струму, оскільки опір вітки з джерелом струму нескінченно великий.

Приклад 5.3.

У електричному колі, зображеному на рис. 5.11, визначити струми та напругу на конденсаторі для моментів часу $t = 0_-$, $t = 0_+$, $t \rightarrow \infty$. Початкові умови – нульові.

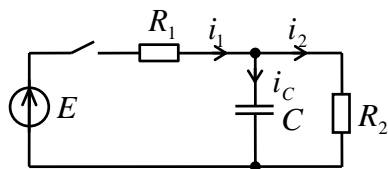


Рис. 5.11

Розв'язок.

Для докомутаційного режиму $t = 0_-$: $i_1(0_-) = i_2(0_-) = i_C(0_-) = 0$, а також $u_C(0_-) = 0$.

У скомутованому колі $t = 0_+$: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, а струми $i_1(0_+) = i_C(0_+) = E/R_1$, $i_2(0_+) = 0$.

В усталеному режимі після комутації при $t \rightarrow \infty$:

$$u_{C\text{вим}} = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2,$$

$$i_{C\text{вим}} = 0, \quad i_{1\text{вим}} = i_{2\text{вим}} = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Приклад 5.4.

Для кола, зображеного на рис. 5.12, розрахувати напругу на конденсаторі через $t = 0,1$ с після комутації. Параметри кола: $U = 120$ В, $R_1 = 10$ кОм, $R_2 = 50$ кОм, $C = 2$ мкФ.

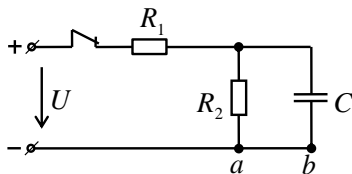


Рис. 5.12

Розв'язок.

Будемо шукати перехідну напругу $u_C(t)$ у вигляді:

$$u_C(t) = u_{C\text{вим}} + u_{C\text{віль}}.$$

Вимушена складова напруги на конденсаторі $u_{C\text{вим}} = 0$, оскільки в усталеному режимі після комутації конденсатор відключений від вхідної напруги.

Вільну складову напруги записуємо у вигляді:

$$u_{C\text{віль}} = Ae^{pt}.$$

Складаємо характеристичне рівняння для кола після комутації, користуючись приведеними вище міркуваннями. Комплексний опір кола після комутації зручно розглядати відносно точок a та b :

$$Z(j\omega) = R_2 + \frac{1}{j\omega C}.$$

Опір R_1 не входить до скомутованого кола, оскільки він належить до розірваної вітки. Замінімо у формулі $Z(j\omega)$ співмножник $j\omega$ на p та прирівняємо $Z(p)$ до нуля. Маємо:

$$R_2 + \frac{1}{pC} = 0,$$

звідси корінь характеристичного рівняння $p = -1/(R_2 C) = -10 \text{ c}^{-1}$.

Отже, $u_{C_{\text{вгл}}} = Ae^{-10t}$.

Визначимо сталу інтегрування з початкових умов. До комутації напруга на конденсаторі визначалась як:

$$u_C(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 = 100 \text{ В}.$$

За другим законом комутації $u_C(0_-) = u_C(0)$. Отже, $A = 100 \text{ В}$.

Перехідна напруга $u_C(t)$ змінюється за законом:

$$u_C(t) = 100e^{-10t} \text{ В}.$$

Через $0,1 \text{ с}$ після комутації маємо:

$$u_C = 100e^{-10 \cdot 0,1} = 36,8 \text{ В}.$$

5.5. Перехідні процеси у послідовному RLC -контурі

Проаналізуємо перехідний процес у RLC -колі (рис. 5.13) при підключенні його до джерела постійної ЕРС. Нехай конденсатор попередньо заряджений до напруги U_0 , а $e(t) = E$.

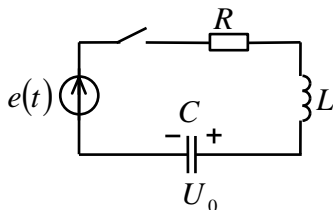


Рис. 5.13

Рівняння стану електричного кола має вигляд:

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + U_0 = E.$$

Розрахуємо перехідний струм $i(t)$:

$$i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{вл}}.$$

Вимушена складова струму $i_{\text{вим}} = 0$ (у коло постійного струму включений конденсатор).

Запишемо характеристичне рівняння для схеми, скориставшись формулою для вхідного опору кола:

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0, \text{ або } p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (5.21)$$

Рівняння має два корені:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (5.22)$$

де $\delta = \frac{R}{2L}$, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансна частота контуру.

Корені характеристичного рівняння (5.22) можуть бути дійсними різними, однаковими (кратними), комплексно-спряженими.

Для наочності міркувань щодо характеру перехідних процесів у теорії лінійних електричних кіл прийнято корені характеристичного рівняння зображувати точками на комплексній площині (рис. 5.14).

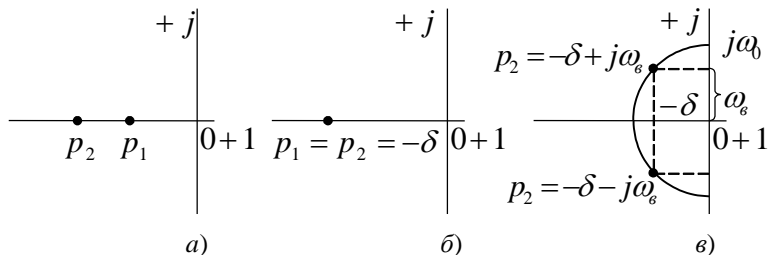


Рис. 5.14

Розглянемо три можливі варіанти розвитку перехідного процесу у нашому колі.

Корені дійсні різні.

Нулі функції $Z(p)$ лежать на дійсній осі в лівій напівплощині (рис. 5.14, а). Характер перехідного процесу у цьому випадку прийнято називати **апериодичним**. З формули (5.22) слідує, що дійсними різними корені характеристичного рівняння будуть при виконанні умови:

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}, \text{ або } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.23)$$

Величину $R = 2\sqrt{L/C}$ часто називають **критичним опором** $R_{кр}$.

У цьому випадку вільна складова струму (загальний розв’язок однорідного диференційного рівняння) може бути записана у вигляді:

$$i_{в\text{ил}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (5.24)$$

де A_1 та A_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Корені p_1 та p_2 повинні бути обов’язково від’ємними, оскільки вільна складова згасає з часом.

Для визначення двох сталих інтегрування A_1 та A_2 потрібно мати два рівняння. Продиференціюємо (5.24):

$$\frac{di_{\text{вiл}}}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (5.25)$$

Розглянемо (5.24) та (5.25) у момент $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{вiл}}(0) &= A_1 + A_2 \\ \frac{di_{\text{вiл}}}{dt} \Big|_{t=0} &= A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{aligned} \right\}. \quad (5.26)$$

Для розрахунку лівих частин рівнянь (5.24) звернемося до початкових умов. Оскільки $i(0_-) = 0$, $i_{\text{вим}} = 0$, то $i_{\text{вiл}}(0) = 0$. Для вільних складових напруг у колі можна записати:

$$Ri_{\text{вiл}}(0) + L \frac{di_{\text{вiл}}}{dt} \Big|_{t=0} + u_{C_{\text{вiл}}}(0) = 0. \quad (5.27)$$

Оскільки, $u_C(t) = u_{C_{\text{вим}}} + u_{C_{\text{вiл}}}$, а при $t = 0$:

$$u_C(0) = u_{C_{\text{вим}}}(0) + u_{C_{\text{вiл}}}(0),$$

то, враховуючи, що $u_C(0) = u_C(0_-) = U_0$, $u_{C_{\text{вим}}} = E$, маємо:

$$u_{C_{\text{вiл}}}(0) = U_0 - E.$$

Підставивши отримані результати у (5.27), отримаємо:

$$\frac{di_{\text{вiл}}}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{E - U_0}{L}.$$

Рівняння (5.26) приймають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2 \\ \frac{E - U_0}{L} &= A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Отже:

$$A_1 = -A_2 = \frac{E - U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Перехідний струм $i(t)$ у розглянутому випадку змінюється за законом:

$$i(t) = \frac{E - U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (5.29)$$

Графік $i(t)$, побудований згідно з (5.29), приведений на рис. 5.15. Струм у колі не змінює свого напрямку, змінюючись за аперіодичним законом.

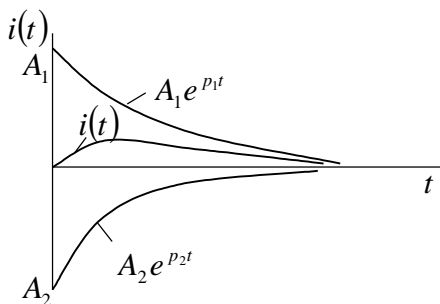


Рис. 5.15

Прийнявши, що індекс 1 відповідає верхньому знаку перед коренем (див. (5.22)), маємо: $|p_1| < |p_2|$, і тому крива $A_1 e^{p_1 t}$ спадає з часом повільніше, ніж $A_2 e^{p_2 t}$.

Корені дійсні однакові (кратні).

Це спостерігається при $\delta = \omega_0$, або $R = 2\sqrt{L/C} = R_{кр}$. Нулі функції $Z(p)$ суміщені у одній точці: $p_1 = p_2 = p = -R/(2L) = -\delta$ (рис. 5.14, б). *Характер перехідного процесу називають критичним.*

Загальний розв'язок однорідного диференційного рівняння у випадку кратних коренів шукають у вигляді:

$$i_{\text{вгл}} = (B_1 + B_2 t) e^{pt} = (B_1 + B_2 t) e^{-\delta t}. \quad (5.30)$$

Визначимо сталі інтегрування B_1 та B_2 , скориставшись застосованим у попередньому випадку підходом та вже визначеними у (5.28) величинами $i_{\text{ввл}}(0)$ та $\left. \frac{di_{\text{ввл}}}{dt} \right|_{t=0}$.

Розв'яжемо відносно сталих інтегрування B_1 та B_2 систему

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{ввл}} &= (B_1 + B_2 t) e^{-\delta t} \\ \frac{di_{\text{ввл}}}{dt} &= (-\delta B_1 + B_2 - \delta t B_2) e^{-\delta t} \end{aligned} \right\}.$$

При $t = 0$ отримаємо:

$$\begin{aligned} 0 &= B_1, \\ \frac{E - U_0}{L} &= B_2. \end{aligned}$$

Вираз для перехідного струму $i(t)$ набуває вигляду:

$$i(t) = \frac{E - U_0}{L} t e^{-\delta t}. \quad (5.31)$$

Крива зміни $i(t)$ по формі не відрізняється від приведеної на рис. 5.15.

Корені комплексно-спряжені.

При виконанні умови $\delta < \omega_0$, або $R < 2\sqrt{L/C}$ нулі функції $Z(p)$ комплексно-спряжені (рис. 5.14, в). Корені характеристичного рівняння записують у вигляді:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_e. \quad (5.32)$$

Перехідний процес у цьому випадку називають коливальним, а величину $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – кутовою частотою власних або вільних коливань контуру.

Вільну складову перехідного струму записують у вигляді коливань зі згасаючою амплітудою:

$$i_{\text{ввл}} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_e t + \psi).$$

Шукаємо сталі інтегрування A та ψ за процедурою та початковими умовами, уже використаними у двох попередніх випадках. Похідна від функції $i_{eIL}(t)$:

$$\frac{di_{eIL}}{dt} = Ae^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega_e t + \psi) + \omega_e \cos(\omega_e t + \psi)].$$

У момент комутації:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A \sin \psi \\ (E - U_0)/L &= -A\delta \sin \psi + A\omega_e \cos \psi \end{aligned} \right\}.$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $\psi = 0$, $A = \frac{E - U_0}{L\omega_e}$.

Перехідний струм у колі змінюється за законом:

$$i(t) = \frac{E - U_0}{L\omega_e} e^{-\delta t} \sin \omega_e t. \quad (5.33)$$

Отриманий вираз свідчить, що при підключенні кола RLC до постійної напруги, якщо $R < 2\sqrt{L/C}$, у колі виникають згасаючі синусоїдні коливання з періодом $T_e = 2\pi/\omega_e$. Це обумовлено періодичним перетворенням енергії магнітного поля в енергію електричного поля і навпаки. Коливання супроводжуються втратами енергії у резисторі.

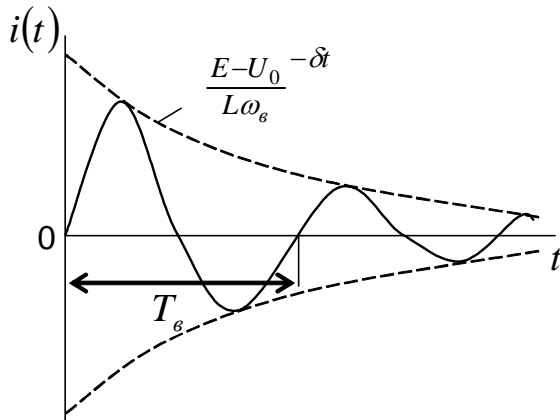


Рис. 5.16

Частота вільних коливань ω_6 завжди менша резонансної частоти ω_0 .

Зі зменшенням величини δ частота вільних коливань збільшується, а при $\delta = 0$ коливання у колі не згасають і $\omega_6 = \omega_0$. Величина $\delta = R/(2L)$ визначає швидкість спадання вільних коливань і має назву *коефіцієнта згасання*.

При $t = 1/\delta$ ордината огинаючої амплітуду коливань кривої у 2,72 рази менша, ніж у початковий момент часу. Тому величина $1/\delta = (2L)/R$ називається *сталюю часу* коливального кола.

У кожному з розглянутих випадків *корені характеристичного рівняння є спільними для вільних складових усіх перехідних величин*. Тому характер перехідного процесу визначає особливості вільних складових і струму, і усіх напруг у колі.

Вільні складові перехідних величин не залежать від форми вхідної дії, визначаються тільки параметрами кола та початковими умовами (енергією, накопиченою у реактивних елементах).

5.6. Розрахунок перехідних процесів у розгалужених колах класичним методом

Перехідний процес у розгалуженому електричному колі описують системою диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок яких шукають у вигляді суми вимушеної та вільної складових.

Необхідну кількість рівнянь першого та другого законів Кірхгофа записують, виходячи з тих самих міркувань, що і при розрахунку усталених режимів у колах постійного чи змінного струмів. За тими ж правилами вибирають і незалежні контури та складають рівняння електричної рівноваги.

Усталений режим роботи кола після комутації обумовлює *вимушені складові* перехідних струмів та напруг. Для розрахунку цього режиму застосовують усі відомі методи розрахунку лінійних електричних кіл. Відмітимо лише, що вимушені складові не залежать від початкових умов, а параметри навантаження у колі впливають тільки на кількісні характеристики вимушених

складових, але не на їх характер. Закон зміни у часі цих складових визначається вхідною вимушуючою дією – джерелом енергії.

Найскладніший етап розрахунку перехідних процесів у розгалуженому колі – визначення *вільних складових*. Як відомо, ці складові є загальним розв’язком системи однорідних диференційних рівнянь кола. Щоб знайти цей розв’язок, необхідно скласти характеристичне рівняння та знайти його корені.

Існує простий спосіб складання характеристичного рівняння, про який вже згадувалося при аналізі кіл першого порядку, з одним реактивним елементом. Для цього записують формулу для вхідного опору кола у комплексній формі $Z(j\omega)$, потім замінюють $j\omega$ на p і прирівнюють отриманий вираз $Z(p)$ до нуля. Характеристичне рівняння можна отримати, прирівнюючи до нуля вхідний опір $Z(p)$ відносно будь-якої вітки кола, вважаючи джерела ЕРС закороченими. Якщо у розгалуженому колі є джерело струму, то характеристичний опір відносно вітки з цим джерелом розглядати не можна. $Z(p)$ розраховують відносно будь-якої іншої вітки кола, вважаючи вітку з джерелом струму розімкненою.

Розглянемо особливості розрахунку перехідних процесів у розгалужених колах класичним методом на прикладі.

Приклад 5.5.

Розрахувати перехідні струми та напруги на реактивних елементах у схемі, наведеній на рис. 5.17. Побудувати графік функції $i_L(t)$. Параметри кола: $E = 60 \text{ В}$, $R_1 = 400 \text{ Ом}$, $R_2 = 800 \text{ Ом}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$, $C = 2,5 \text{ мкФ}$.

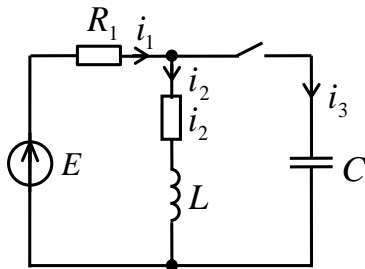


Рис. 5.17

Розв'язок.

Почнемо розрахунок з визначення струму через індуктивність $i_2(t)$.

$$i_2(t) = i_{2\text{вим}} + i_{2\text{вл}}.$$

Після комутації:

$$i_{2\text{вим}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,05 \text{ A}.$$

Характеристичне рівняння складемо, використовуючи формулу для комплексного опору:

$$Z(j\omega) = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Замінімо $j\omega$ на p та прирівняємо $Z(p)$ до нуля:

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + pL) \frac{1}{pC}}{R_2 + pL + \frac{1}{pC}} = 0.$$

$$p^2 R_1 LC + p(CR_1 R_2 + L) + R_1 + R_2 = 0.$$

Підставивши числові значення, знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$p^2 + 0,5 \cdot 10^4 p + 600 \cdot 10^4 = 0,$$

$$p_{1,2} = -2500 \pm 500 ,$$

$$p_1 = -2000 \text{ с}^{-1}, p_2 = -3000 \text{ с}^{-1}.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні різні, тому вільну складову маємо шукати у вигляді:

$$i_{2\text{вн}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} .$$

Друге рівняння для визначення сталих інтегрування:

$$\frac{di_{2\text{вн}}}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} .$$

Для моменту комутації $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} i_{2\text{вн}}(0) &= A_1 + A_2 \\ \frac{di_{2\text{вн}}}{dt} \Big|_{t=0} &= A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{aligned} \right\} .$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь, розрахувавши значення $i_{2\text{вн}}(0)$ та $\frac{di_{2\text{вн}}}{dt} \Big|_{t=0}$.

$$\text{За першим законом комутації } i_2(0_-) = i_2(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,05 \text{ А.}$$

Отже, з рівняння $i_2(0) = i_{2\text{вн}}(0) + i_{2\text{внм}}(0)$ маємо:

$$i_{2\text{вн}}(0) = i_2(0) - i_{2\text{внм}}(0) = 0 .$$

Запишемо рівняння другого закону Кірхгофа для правого контура скомутованої схеми та розглянемо його при $t = 0$.

$$u_c(t) - L \frac{di_2(t)}{dt} - i_2(t) R_2 = 0 .$$

$$u_c(0) - L \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0} - i_2(0) R_2 = 0 .$$

Згідно з другим законом комутації $u_c(0) = u_c(0_-) = 0$. Тоді:

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{2\text{вн}}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{-i_2(0)R_2 + u_C(0)}{L} = -200.$$

Сталі інтегрування визначаємо, таким чином, із системи:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2 \\ -200 &= A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{aligned} \right\}.$$

Маємо: $A_1 = -0,2$; $A_2 = +0,2$.

Перехідний струм $i_2(t)$ в результаті підрахунків отримали у вигляді:

$$i_2(t) = (0,05 - 0,2e^{-2000t} + 0,2e^{-3000t})A.$$

Напруга на котушці індуктивності:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di_2(t)}{dt} = 0,2(0,2 \cdot 2000e^{-2000t} - 0,2 \cdot 3000e^{-3000t}) = \\ &= (80e^{-2000t} - 120e^{-3000t})B. \end{aligned}$$

За другим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= i_2(t)R_2 + u_L(t) = \\ &= 800(0,05 - 0,2e^{-2000t} + 0,2e^{-3000t}) + 80e^{-2000t} - 120e^{-3000t} = \\ &= (40 - 80e^{-2000t} + 40e^{-3000t})B. \end{aligned}$$

Перехідний струм через конденсатор:

$$\begin{aligned} i_3(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = 2,5 \cdot 10^{-6}(160000e^{-2000t} - 120000e^{-3000t}) = \\ &= (0,4e^{-2000t} - 0,3e^{-3000t})A. \end{aligned}$$

Струм у вітці з джерелом енергії визначимо за першим законом Кірхгофа:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = (0,05 - 0,1e^{-3000t} + 0,2e^{-2000t})A.$$

Побудуємо залежність перехідної напруги $u_C(t)$ у інтервалі значень часу, що визначає тривалість перехідного процесу:

$0 \leq t \leq \frac{4}{|p|_{\min}}$, де $|p|_{\min}$ – мінімальний за модулем корінь характеристичного рівняння $|p|_{\min} = 2000$. Розрахунки для побудови графіка $u_c(t)$ зведені у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

| $t, \text{мс}$ | 0 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2 |
|----------------|----|------|------|------|-----|------|
| $80e^{-2000t}$ | 80 | 35,9 | 16,2 | 7,3 | 3,3 | 1,5 |
| $40e^{-3000t}$ | 40 | 12 | 3,6 | 1,1 | 0,3 | 0,1 |
| $u_c(t)$ | 0 | 16,1 | 27,4 | 33,8 | 37 | 38,6 |

Залежність напруги $u_c(t)$ приведена на рис. 5.18.

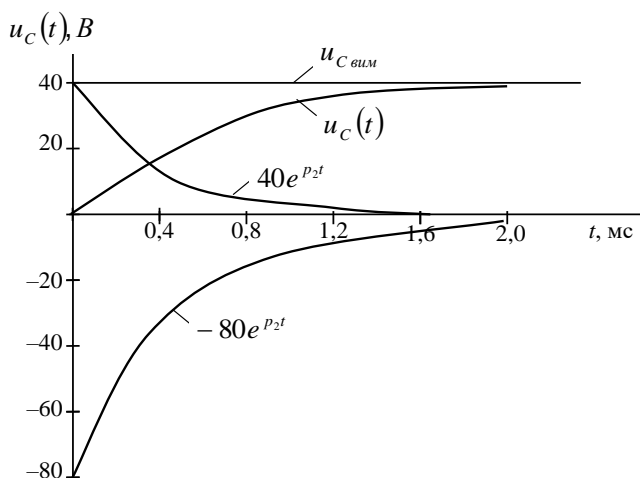


Рис. 5.18

5.7. Завдання для самостійної роботи

Задача 5.7.1. Розрахувати напругу на резисторі R_1 (рис. 5.19) через час τ після комутації, якщо: $U = 50 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$.

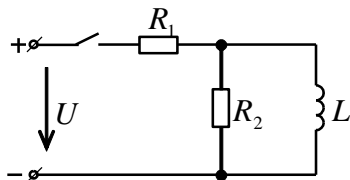


Рис. 5.19

Відповідь: 39 В.

Задача 5.7.2. Плоский конденсатор зі слюдяною ізоляцією ($\varepsilon = 6$, питомий опір $\rho = 10^{13} \text{ Ом}\cdot\text{м}$) і напругою між пластинами 1 кВ саморозряджається. За який час напруга між пластинами конденсатора зменшиться до 50 В?

Відповідь: 26,5 хв.

Задача 5.7.3. Яку напругу необхідно прикласти до обмотки реле ($L = 1 \text{ Гн}$, $R = 40 \text{ Ом}$), щоб за час $t = 20 \text{ мс}$ від моменту підключення кола струм у обмотці досяг значення 500 мА?

Відповідь: 36,3 В.

Задача 5.7.4. За яким законом змінюється напруга на конденсаторі (рис. 5.20) після комутації? Параметри кола: $E = 60 \text{ В}$, $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $C = 50 \text{ мкФ}$.

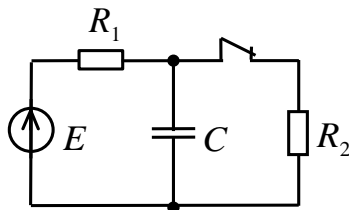


Рис. 5.20

Відповідь: $u_C(t) = (60 - 40e^{-500t}) \text{ В}$.

Задача 5.7.5. Опір котушки 2 Ом, її індуктивність 6 Гн. У момент, коли через котушку протікає струм 20 А, вона закорочується. З якою швидкістю почне спадати струм у котушці?

Відповідь: 6,67 А/с.

Задача 5.7.6. У колі постійного струму (рис. 5.21) з параметрами $E = 120$ В, $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $C = 20$ мкФ відбувається комутація. Розрахувати перехідний струм i у вітці з джерелом енергії.

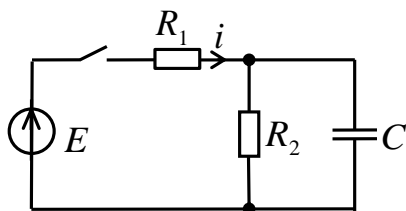


Рис. 5.21

Відповідь: $i(t) = (1,2 + 0,8e^{-2080t})$ А.

Задача 5.7.7. Коло (рис. 5.22) підключається до постійної напруги $U = 30$ В. Визначити перехідну напругу на конденсаторі, якщо:

- а) $C = 16$ мкФ, $R = 100$ Ом, $L = 1$ Гн;
- б) $C = 16$ мкФ, $R = 200$ Ом, $L = 1$ Гн;

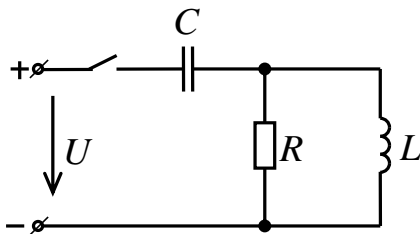


Рис. 5.22

Відповідь: а) $u_C(t) = (30 - 40e^{-500t} + 10e^{-125t})$ В;
б) $u_C(t) = (30 + 38,5e^{-156t} \sin(195t - 51^\circ))$ В.

5.8. Запитання для поточного контролю

17. Які процеси називають перехідними?
18. Які енергетичні явища обумовлюють виникнення перехідних процесів у колах з реактивними елементами?
19. Сформулюйте перший та другий закони комутації.
20. Що називають незалежними початковими умовами?
21. Поясніть особливості поведінки котушки індуктивності та конденсатора при нульових початкових умовах.
22. Що таке вимушена та вільна складова перехідного струму та чим вони енергетично обумовлені?

Розділ 6. Операторний метод розрахунку перехідних процесів

6.1. Перетворення Лапласа та його застосування до розрахунку перехідних процесів

Розрахунок перехідних процесів у лінійному електричному колі зводиться, як уже відомо, до розв'язування систем лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. Головні труднощі класичного методу, розглянутого у попередньому розділі, пов'язані з пошуками сталих інтегрування, що навіть у колах 2-го порядку завжди не просто.

Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами можна інтегрувати також *операторним методом*, який ґрунтується на *перетворенні Лапласа*. Суть методу полягає у тому, що перехідні величини, як функції часу, а також їх похідні та інтеграли замінюються операторними зображеннями. Ці зображення відшукують за прямим перетворенням Лапласа. В результаті такої математичної операції інтегро-диференціальні рівняння для функцій часу – *оригіналів* перетворюються в алгебричні рівняння для *зображень по Лапласу*. Розв'язавши рівняння відносно зображень, шукають відповідні цим зображенням оригінали.

Нехай задається функція часу $f(t)$, яка може бути дійсною чи комплексною. Значення цієї функції для часу $t < 0$, як правило, дорівнює нулю. Цією функцією, наприклад, може бути напруга, до якої включається електричне коло при $t = 0$.

Зображення по Лапласу функції $f(t)$ шукають шляхом застосування прямого перетворення Лапласа:

$$L\{f(t)\} \equiv F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (6.1)$$

де $p = a + jb$ – комплексний оператор.

$F(p)$ – функція тільки комплексного змінного. Вона існує і визначається рівнянням (6.1), якщо існує інтеграл у правій частині. Оригінал $f(t)$ повинен задовольняти умови Діріхле: в межах

інтервалу перетворення мати скінчену кількість розривів першого роду та скінчену кількість екстремумів. Крім того, $f(t)$ повинна бути обмеженою, тобто повинні існувати такі постійні додатні числа M та S_0 , щоб виконувалася нерівність:

$$|f(t)| < Me^{S_0 t}$$

для будь-яких додатних значень t . Всі реальні фізичні величини електричних кіл задовольняють таким умовам.

Символічно відповідність між функціями $F(p)$ та $f(t)$ записують:

$$F(p) \stackrel{\circ}{\leftarrow} f(t) \text{ або } F(p) \stackrel{\circ}{\rightarrow} f(t).$$

Будемо використовувати надалі перший варіант позначення.

Нагадаємо відомі з відповідних розділів курсу вищої математики деякі властивості перетворення Лапласа.

Властивість 1.

Зображення функції зі змінним масштабом незалежної змінної.

Якщо $f(t) \stackrel{\circ}{\leftarrow} F(p)$, то

$$f(\alpha t) \stackrel{\circ}{\leftarrow} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ де } \alpha > 0. \quad (6.2)$$

Властивість 2. Лінійність зображення.

Нехай $f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)$, де α_i – сталі. Якщо $f(t) \stackrel{\circ}{\leftarrow} F(p)$,

$f_i(t) \stackrel{\circ}{\leftarrow} F_i(p)$, то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p). \quad (6.3)$$

Властивість 3. Теорема зміщення.

Якщо $f(t) \stackrel{\circ}{\leftarrow} F(p)$, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \doteq F(p + \alpha). \quad (6.4)$$

В електротехніці деколи застосовують також перетворення Карсона, яке зв'язане з перетворенням Лапласа множником p :

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p).$$

6.2. Зображення по Лапласу характерних для електричних кіл функцій часу

Знайдемо операторні зображення функцій часу, які звичайно входять у рівняння електричних кіл.

а) Нехай $f(t) = A$ – стала величина.

Зображення цієї функції:

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

б) Для функції $f(t) = e^{-\alpha t}$ зображення:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p+\alpha)} dt = -\frac{1}{p+\alpha} e^{-t(p+\alpha)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+\alpha}.$$

в) Знайдемо зображення похідної функції $f'(t)$, якщо $f(t) \doteq F(p)$:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Тут інтегрування здійснюється частинами. Враховуючи, що $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$, а $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p)$, зображення похідної приймає

вигляд:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f(0). \quad (6.5)$$

г) Нехай $F(p) \doteq f(t)$. Знайдемо зображення інтегралу функції $f(t)$:

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] d(e^{-pt}).$$

Інтегруючи частинами, маємо:

$$-\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] d(e^{-pt}) = -\frac{1}{p} \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Перша складова праворуч дорівнює нулю, в силу накладених в розділі 6.1 обмежень на $f(t)$, а також обернення в нуль інтегралу

$$\int_0^t f(t) dt \text{ на нижній границі.}$$

Отже:

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{1}{p} F(p). \quad (6.6)$$

У табл. 6.1 приведені найпоширеніші у електротехніці оператори співвідношень $F(p) \doteq f(t)$.

Таблиця 6.1

| № п/п | Оригінал | Операторне зображення |
|-------|-------------------|----------------------------|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | A | $\frac{A}{p}$ |
| 2 | $e^{\pm\alpha t}$ | $\frac{1}{p \mp \alpha}$ |
| 3 | $te^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(p + \alpha)^2}$ |
| 4 | t | $\frac{1}{p^2}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|----|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 5 | $\sin \omega t$ | $\frac{\alpha}{p^2 + \omega^2}$ |
| 6 | $\cos \omega t$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ |
| 7 | $e^{-\delta t} \sin \omega t$ | $\frac{\alpha}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$ |
| 8 | $e^{-\delta t} \cos \omega t$ | $\frac{p + \delta}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$ |
| 9 | $t^n \ (n > 0)$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 10 | $t \sin \omega t$ | $\frac{2\alpha p}{(p^2 + \omega^2)^2}$ |
| 11 | $\sin(\omega t + \psi)$ | $\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$ |
| 12 | $e^{j(\omega t + \psi)}$ | $\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$ |
| 13 | $1 - e^{-\alpha t}$ | $\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$ |
| 14 | $(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$ | $\frac{p}{(p + \alpha)^2}$ |
| 15 | $\frac{1}{a - b}(e^{-bt} - e^{-\alpha t})$ | $\frac{1}{(p + \alpha)(p + b)}$ |
| 16 | $f(t - \tau)$ | $e^{-p\tau} F(p)$ |

6.3. Операторні схеми заміщення елементів електричних кіл

Розглянемо найпоширеніші складові електричних кіл і, використовуючи операторні зображення часових функцій, що описують властивості цих елементів, складемо операторні схеми заміщення.

Якщо комутація відбувається у електричному колі постійного струму з джерелами енергії у вигляді ЕРС E та ДС J , то відповідно, використовуючи зображення по Лапласу сталої величини, для операторної схеми кола будемо мати ділянки з джерелами енергії (рис. 6.1, а).

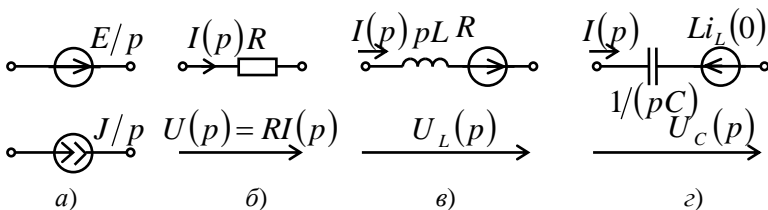


Рис. 6.1

Для ділянки кола з резистором R та функцією струму $i(t)$ напруга $U_R(t) = R \cdot i(t)$. В операторному вигляді ця ділянка показана на рис. 6.1, б, де $I(p) \doteq i(t)$.

Коли через індуктивність L протікає електричний струм $i_L(t)$, то напруга на цьому елементі $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Використавши зображення по Лапласу похідної $i'_L(t)$ (6.5), отримаємо для напруги на індуктивності:

$$U_L(p) = L(p \cdot I(p) - i_L(0)) = pLI(p) - Li_L(0) \quad (6.7)$$

Перша складова зображення напруги $U_L(p)$ має співмножник pL , який є операторним опором котушки. Другу складову $Li_L(0)$ у схемі заміщення ділянки з котушкою слід враховувати у тому

випадку, коли у момент часу $t = 0$ через індуктивність протікає струм. Цю складову називають **внутрішньою ЕРС** котушки і у схемі заміщення (рис. 6.1, в) зображують ЕРС, направленою, у відповідності з (6.7), за струмом $i_L(t)$.

Складемо операторну схему заміщення ділянки кола з ємністю C . Напруга на конденсаторі:

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{C} \int_0^t idt + \frac{1}{C} \int_{-t}^0 idt = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0)$$

Використавши (6.6), запишемо зображення $U_C(p)$:

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p}. \quad (6.8)$$

Тут $1/(pC)$ – опір конденсатора в операторному вигляді, $u_C(0)/p$ – **внутрішня ЕРС**, обумовлена наявністю напруги на обкладках конденсатора при $t = 0$. Направлена ця ЕРС, у відповідності з (6.8), проти струму $I(p)$ (рис. 6.1, з).

Внутрішні ЕРС у операторних схемах заміщення реактивних елементів враховують початкові умови у електричному колі. Вони обумовлені запасанням енергії у магнітному полі котушки чи електричному полі конденсатора до комутації.

Отже, аналізуючи формули (6.7) та (6.8), приходимо до висновку, що операторні зображення дають можливість звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування – до ділення.

Це дає можливість при розрахунках процесів у електричних колах перейти від розв'язку систем інтегро-диференційних рівнянь до значно простіших завдань розв'язку алгебричних рівнянь.

6.4. Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі

Розглянемо узагальнену вітку ab електричного кола (рис. 6.2, а). Напруга на цій ділянці:

$$u_{ab}(t) = i(t)R - e_1(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt + e_2(t) + L \frac{di(t)}{dt}.$$

Застосуємо до цього рівняння перетворення Лапласа, врахувавши співвідношення (6.7) та (6.8):

$$U_{ab}(p) = I(p)R - E_1(p) + I(p) \frac{1}{pC} + \frac{U_c(0)}{p} + E_2(p) + I(p)pL - Li_L(0).$$

Отриманому рівнянню відповідає схема рис. 6.2, б).
Зображення струму:

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + E_1(p) - \frac{U_c(0)}{p} + Li_L(0) - E_2(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} \quad (6.9)$$

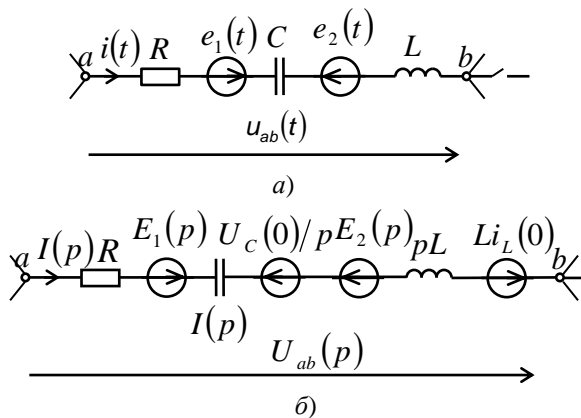


Рис. 6.2

Формула (6.9) є законом Ома в операторній формі, де операторний опір вітки ab :

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}. \quad (6.10)$$

Структура цього опору аналогічна структурі комплексного опору цієї ділянки змінному струму, якщо $j\omega$ замінити на p . Величина, обернена операторному опору, називається **операторною провідністю**:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}. \quad (6.11)$$

Многочлен у чисельнику (6.9), крім операторного зображення ЕРС $e_1(t)$ та $e_2(t)$, включає в себе внутрішні ЕРС котушки індуктивності $Li_L(0)$ та конденсатора $U_C(0)/p$. Додатній напрям ЕРС індуктивності співпадає з додатним напрямом струму у вітці, додатний напрям внутрішньої ЕРС ємності протилежний струму. Якщо на момент $t = 0$ індуктивний струм $i_L(0) = 0$ та ємнісна напруга $U_C(0) = 0$ (тобто, при нульових незалежних початкових умовах), внутрішні ЕРС також мають нульове значення.

Переведемо тепер на мову операторних зображень закони Кірхгофа.

Для першого закону Кірхгофа в диференційній формі:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

застосування перетворення Лапласа дає в операторній формі для вузла електричного кола:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0. \quad (6.12)$$

Для замкнутого контуру, що має n віток, за другим законом Кірхгофа:

$$\sum_{k=1}^n R_k i_k + \sum_{k=1}^n L_k \frac{di_k}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int i_k dt = \sum_{k=1}^n e_k.$$

Перейдемо до зображень:

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k(p) + \sum_{k=1}^n (pL_k \cdot I_k(p) - L_k i_k(0)) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{pC_k} I_k(p) + \frac{U_{Ck}(0)}{p} \right) = \sum_{k=1}^n E_k(p).$$

Отже, другий закон Кірхгофа в операторній формі:

$$\sum_{k=1}^n \left(R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} \right) I_k(p) = \sum_{k=1}^n \left(E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{U_{Ck}(0)}{p} \right). \quad (6.13)$$

Оскільки закони Ома та Кірхгофа покладені в основу усіх методів розрахунку електричних кіл, то, переклавши ці закони на операторну форму, можна отримати рівняння методів у операторному вигляді. Розв'язавши ці рівняння (до речі, алгебричні), отримують зображення по Лапласу шуканих струмів чи напруг.

6.5. Перехід від операторного зображення до оригіналу

Визначивши операторне зображення $F(p)$ функції струму, напруги чи потенціалу, необхідно знайти оригінал цієї функції $f(t)$. Для цього можна застосувати різні способи.

В теорії функції комплексного змінного для пошуків $f(t)$ пропонується зворотне перетворення Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Для багатьох функцій $F(p)$ оригінал можна визначити за табл. 6.1 чи довідниками, де можна знайти близько 1500 формул відповідності.

У курсі теорії кіл найчастіше застосовують порівняно простий спосіб знаходження оригіналу за **теоремою розкладання**.

Зображення $F(p)$ при розрахунках перехідних процесі найчастіше має вигляд раціонального дробу:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (6.14)$$

причому, $m < n$, тобто степінь поліному чисельника m менший степеня n поліному знаменника, a_k та b_k – дійсні числа, а многочлени $F_1(p)$ та $F_2(p)$ спільних коренів не мають.

У такому вигляді, зокрема, записуються передатні функції систем автоматичного керування, до аналізу яких широко застосовується теорія перехідних процесів.

У цьому випадку, як доводиться у курсі вищої математики, оригінал $f(t)$ зображення $F(p)$ можна знайти за формулою теореми розкладання:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (6.15)$$

У цій формулі p_k – прості корені многочлена $F_2(p)$, причому серед них може бути і корінь рівним нулю. $F_1(p_k)$ – значення многочлена чисельника, тобто $F_1(p)$, обчислене з підстановкою замість p значення k -того кореня, тобто $p = p_k$. У знаменнику (6.15) – похідна $dF_2(p)/dp$, обчислена також з підстановкою $p = p_k$.

Приклад 6.1.

Знайти оригінал функції $f(t)$, зображення по Лапласу якої має вигляд:

$$F(p) = \frac{10p + 800}{3p^2 + 150p + 1800}.$$

Розв'язок.

Отже:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{10p + 800}{3p^2 + 150p + 1800}.$$

Визначимо корені знаменника:

$$F_2(p) = 3p^2 + 150p + 1800 = 0:$$

$$p_1 = -20 \text{ с}^{-1}; \quad p_2 = -30 \text{ с}^{-1}.$$

Многочлен знаменника має два корені, отже сума (6.15) має дві складові.

Підрахуємо значення многочлена $F_1(p)$, підставляючи замість p по черзі значення p_1 та p_2 :

$$F_1(p_1) = 10(-20) + 800 = 600;$$

$$F_1(p_2) = 10(-30) + 800 = 500.$$

Похідна знаменника:

$$F_2'(p) = 6p + 150.$$

Обчислимо значення $F_2'(p)$ при $p = p_1$ та $p = p_2$:

$$F_2'(p_1) = 6(-20) + 150 = 30;$$

$$F_2'(p_2) = 6(-30) + 150 = -30.$$

Оригінал функції:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^2 \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \\ &= \frac{600}{30} e^{-20t} + \frac{500}{-30} e^{-30t} = 20e^{-20t} - 16,7e^{-30t}. \end{aligned}$$

Приклад 6.2.

Знайти оригінал перехідного струму, зображення по Лапласу якого:

$$I(p) = \frac{200p + 10^4}{p(p^2 + 600p + 5 \cdot 10^4)}.$$

Розв'язок.

За теоремою розкладання:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Для нашого прикладу:

$$F_1(p) = 200p + 10^4;$$

$$F_2(p) = p^3 + 600p^2 + 5 \cdot 10^4 p.$$

Знайдемо корені знаменника:

$$F_2(p) = p^3 + 600p^2 + 5 \cdot 10^4 p = 0;$$

$$p_1 = 0; p_2 = -100 \text{ с}^{-1}; p_3 = -500 \text{ с}^{-1}.$$

Визначаємо $F_1(p_k)$:

$$F_1(p_1) = 10^4;$$

$$F_1(p_2) = -100 \cdot 200 + 10^4 = -10^4;$$

$$F_1(p_3) = -500 \cdot 200 + 10^4 = -9 \cdot 10^4.$$

Похідна знаменника:

$$F_2'(p) = 3p^2 + 1200p + 5 \cdot 10^4;$$

$$F_2'(p_1) = 5 \cdot 10^4;$$

$$F_2'(p_2) = 3 \cdot 10^4 + 1200(-100) + 5 \cdot 10^4 = -4 \cdot 10^4;$$

$$F_2'(p_3) = 3 \cdot 25 \cdot 10^4 + 1200(-500) + 5 \cdot 10^4 = 20 \cdot 10^4.$$

Оригінал:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} = \\ &= \frac{10^4}{5 \cdot 10^4} e^{0t} + \frac{-10^4}{-4 \cdot 10^4} e^{-100t} + \frac{-9 \cdot 10^4}{20 \cdot 10^4} e^{-500t} = \\ &= (0,20 + 0,25e^{-100t} - 0,45e^{-500t})A. \end{aligned}$$

Часто використовується дещо інший варіант формули розкладання, коли знаменник (6.14) має один нульовий корінь, тобто $F_2(p) = pF_3(p)$. Тоді:

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (6.16)$$

де у складі $F_3(p)$ вже немає множника p , а рівняння $F_3(p) = 0$ має n різних і не рівних нулю коренів.

Приклад 6.3.

Операторне зображення напруги на ділянці кола має вигляд:

$$U(p) = \frac{2p + 1000}{p(p + 100)}.$$

Визначити оригінал $u(t)$.

Розв'язок.

Позначимо:

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} = \frac{2p + 1000}{p(p + 100)}.$$

За формулою (6.16):

$$\begin{aligned} F_1(0) &= 1000; \quad F_3(0) = 100; \\ F_3(p) &= p + 100. \end{aligned}$$

Звідки $p_1 = -100$ с⁻¹.

Похідна $F_3'(p) = 1$. $F_1(p_1) = -100 \cdot 2 + 1000 = 800$.

Тоді:

$$u(t) = \frac{1000}{100} + \frac{800}{-100 \cdot 1} e^{-100t} = (10 - 8e^{-100t}).$$

Якщо рівняння $F_2(p) = 0$ має комплексні спряжені корені, то для пари таких коренів p_i та p_i^* у формулі (6.15), можна виконати деякі спрощення:

$$\frac{F_1(p_i)e^{p_i t}}{F_2'(p_i)} + \frac{F_1(p_i^*)e^{p_i^* t}}{F_2'(p_i^*)} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} e^{p_i t} \right]. \quad (6.17)$$

Це впливає з того, що функції з дійсними коефіцієнтами від комплексних спряжених значень незалежного змінного самі є комплексними спряженими. Сума, що відповідає цим двом складовим, дорівнює подвоєному значенню дійсної частини, знайденої для одного з цих коренів.

Приклад 6.4.

Зображення функції:

$$F(p) = \frac{25 \cdot 10^4}{p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6}.$$

Знайти оригінал.

Розв'язок.

Прирівнявши $F_2(p)$ до нуля, знаходимо корені знаменника:

$$p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6 = 0;$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000 c^{-1}.$$

Корені комплексні спряжені. Скористаємося формулою (6.17) для знаходження $f(t)$:

$$F_1(p_1) = 25 \cdot 10^4;$$

$$F_2'(p) = 2p + 2000;$$

$$F_2'(p_1) = 2(-1000 + j2000) + 2000 = j4000.$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{25 \cdot 10^4}{j4000} e^{(-1000+j2000)t} \right] = \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[62,5 e^{-j90^\circ} \cdot e^{-1000t} \cdot e^{j2000t} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[62,5 e^{-1000t} \cdot e^{j(2000t-90^\circ)} \right] = \\
 &= 125 e^{-1000t} \cos(2000t - 90^\circ) = 125 e^{-1000t} \sin 2000t.
 \end{aligned}$$

Серед коренів многочлена $F_2(p)$ можуть бути також кратні корені. Якщо рівняння $F_2(p) = 0$ має n різних коренів (p_1, p_2, \dots, p_s), і з них корінь p_1 має кратність m_1 , корінь p_2 має кратність m_2 , корінь p_s має кратність m_s , то оригінал шукають за формулою:

$$f(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(p)e^{pt}}{F_2(p)} \right]_{p=p_k} \quad (6.18)$$

У цій формулі $F_2(p)$ необхідно спочатку скоротити на співмножники, що дають кратні корені, а потім диференціювати.

Приклад 6.5.

Знайти оригінал функції $f(t)$, якщо її зображення:

$$F(p) = \frac{150}{3p^2 + 1200p + 12 \cdot 10^4}.$$

Розв'язок.

Шукаємо корені знаменника $F_2(p)$:

$$3p^2 + 1200p + 12 \cdot 10^4 = 0;$$

$$p_1 = p_2 = -200 c^{-1}.$$

Маємо кратні корені кратністю $m_1 = 2$.

Тоді:

$$m_k = m_1 = 2; (m_k - 1)! = (2 - 1)! = 1;$$

$$\frac{F_2(p)}{(p - p_1)^{m_k}} = \frac{3(p + 200)^2}{(p + 200)^2} = 3.$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[\frac{d}{dp} \cdot \frac{F_1(p)e^{pt}}{3} \right]_{p=p_k} = \left[\frac{d}{dp} 50e^{pt} \right]_{p=p_1} = \\ &= \left[50te^{pt} \right]_{p=p_1} = 50te^{-200t}. \end{aligned}$$

6.6. Розрахунок перехідних процесів операторним методом

У попередніх параграфах розділу були розглянуті загальні засади та особливості окремих етапів застосування перетворення Лапласа до розрахунку електричних кіл. Узагальнюючи все сказане вище, можна скласти такий алгоритм розрахунку:

- визначення незалежних початкових умов у схемі, тобто значення $i_L(0)$ та $u_C(0)$;
- складання операторної схеми заміщення скомутованого кола;
- застосування для визначення зображення шуканої величини одного із методів розрахунку електричних кіл;
- визначення оригіналу перехідної величини за допомогою формул розкладання;

Приклад 6.6.

Розрахувати струм у колі джерела після комутації в схемі рис. 6.3, а. Параметри схеми: $E = 35 \text{ В}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1500 \text{ мкФ}$.

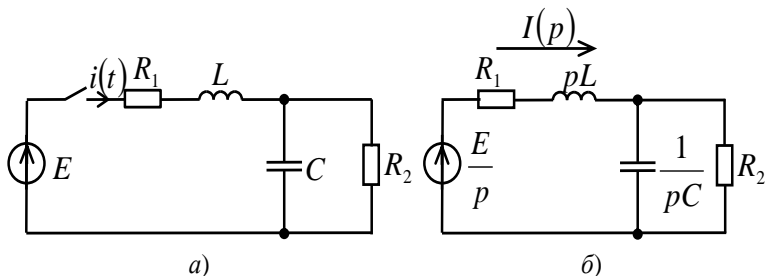


Рис. 6.3

Розв'язок.

У схемі маємо нульові незалежні початкові умови: $i_L(0) = i_L(0_-) = 0$; $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$. Тому операторна схема заміщення (рис. 6.3, б) не має внутрішніх ЕРС індуктивності та ємності.

Знайти операторне зображення струму $I(p)$ можна за законом Ома в операторній формі:

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)},$$

де $E(p) = \frac{E}{p}$,

$$Z(p) = R_1 + pL + \frac{\frac{1}{pC} \cdot R_2}{\frac{1}{pC} + R_2} = \frac{p^2 LCR_2 + p(CR_1R_2 + L) + R_1 + R_2}{1 + pCR_2}.$$

Таким чином, зображення струму:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{E(pCR_2 + 1)}{p[p^2 LCR_2 + p(CR_1R_2 + L) + R_1 + R_2]} = \\ &= \frac{35(p \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 5 + 1)}{p[p^2 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 5 + p(15 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 5 + 10^{-3}) + 7]} = \\ &= \frac{262,5 \cdot 10^{-3} p + 35}{p(7,5 \cdot 10^{-6} p^2 + 16 \cdot 10^{-3} p + 7)}. \end{aligned}$$

Шукаємо оригінал струму за формулою розкладання:

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Корені многочлена знаменника $F_2(p)$:

$$p(7,5 \cdot 10^{-6} p^2 + 16 \cdot 10^{-3} p + 7) = 0;$$

$$p_1 = 0; p_2 = -614 \text{ с}^{-1}; p_3 = -1520 \text{ с}^{-1}.$$

Корені дійсні різні, значить, оригінал необхідно шукати у вигляді:

$$i(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Підрахуємо значення чисельника $F_1(p)$ для трьох різних значень p :

$$F_1(p_1) = 35;$$

$$F_1(p_2) = 262,5 \cdot 10^{-3}(-614) + 35 = -126;$$

$$F_1(p_3) = 262,5 \cdot 10^{-3}(-1520) + 35 = -364.$$

Похідна знаменника у загальному вигляді:

$$F_2'(p) = 3 \cdot 7,5 \cdot 10^{-6} p^2 + 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} p + 7.$$

Підрахуємо $F_2'(p)$ для трьох різних значень p :

$$F_2'(p_1) = 7;$$

$$F_2'(p_2) = 22,5 \cdot 10^{-6}(-614)^2 + 32 \cdot 10^{-3}(-614) + 7 = -4,17;$$

$$F_2'(p_3) = 22,5 \cdot 10^{-6}(-1520)^2 + 32 \cdot 10^{-3}(-1520) + 7 = 10,33.$$

Оригінал струму:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{35}{7} e^{0t} + \frac{-126}{-4,17} e^{-614t} + \frac{-364}{10,33} e^{-1520t} = \\ &= (5 + 30,2e^{-614t} - 35,2e^{-1520t}) A. \end{aligned}$$

Перевіримо правильність підрахунку: при $t = 0$ $i(0) = 0$, як і повинно бути за початковими умовами.

Приклад 6.7.

Визначити перехідну напругу на конденсаторі у схемі рис. 6.4, а, якщо $E = 60$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = R_3 = 20$ Ом, $L = 1$ мГн, $C = 10$ мкФ.

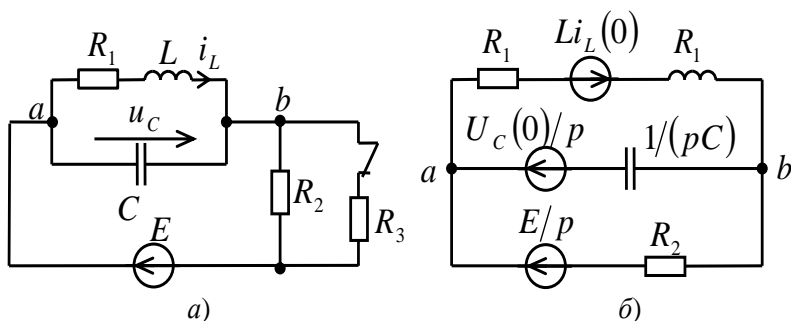


Рис. 6.4

Розв'язок.

Розрахуємо незалежні початкові умови:

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = 3 \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-) \cdot R_1 = 30 \text{ В}.$$

Операторна схема заміщення кола після комутації повинна мати вигляд рис. 6.4, б.

Щоб знайти зображення напруги на конденсаторі, зручно скористатися методом двох вузлів.

$$\begin{aligned}
 U_c(p) = U_{ab}(p) &= \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{U_c(0)}{p} \cdot pC - Li_L(0) \cdot \frac{1}{R_1 + pL}}{\frac{1}{R_2} + pC + \frac{1}{R_1 + pL}} = \\
 &= \frac{\frac{ER_1 + EpL + U_c(0)pCR_2R_1 + U_c(0)p^2LCR_2 - pLi_L(0)R_2}{pR_2(R_1 + pL)}}{\frac{R_1 + pL + p^2LCR_2 + pCR_1R_2 + R_2}{R_2(R_1 + pL)}} = \\
 &= \frac{p^2LCR_2U_c(0) + p(CR_1R_2U_c(0) + EL - Li_L(0)R_2) + ER_1}{p[p^2LCR_2 + p(CR_1R_2 + L) + R_1 + R_2]}
 \end{aligned}$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\begin{aligned}
 U_c(p) &= \frac{p^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 30}{p[p^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 20] + p(10^{-5} \cdot 10 \cdot 20 + 10^{-3}) + 10 + 20} + \\
 &+ \frac{p(10^{-5} \cdot 10 \cdot 20 \cdot 30 + 60 \cdot 10^{-3} - 10^{-3} \cdot 3 \cdot 20) + 60 \cdot 10}{p[p^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 20] + p(10^{-5} \cdot 10 \cdot 20 + 10^{-3}) + 10 + 20} = \\
 &= \frac{p^2 \cdot 6 \cdot 10^{-6} + p \cdot 60 \cdot 10^{-3} + 600}{p(p^2 \cdot 20 \cdot 10^{-8} + p \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 30)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.
 \end{aligned}$$

Застосуємо формулу розкладання. Знаходимо значення коренів рівняння $F_2(p) = 0$:

$$\begin{aligned}
 p(p^2 \cdot 20 \cdot 10^{-8} + p \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 30) &= 0; \\
 p_1 &= 0; \quad p_{2,3} = (-0,75 \pm j0,97) \cdot 10^4 c^{-1}.
 \end{aligned}$$

Серед коренів рівняння пара комплексних спряжених. Оригінал будемо шукати у вигляді:

$$u_c(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} \right).$$

Підрахуємо значення $F_1(p)$ при $p = p_1$ та $p = p_2$:

$$F_1(p_1) = 600;$$

$$\begin{aligned}
 F_1(p_2) &= (-0,75 + j0,97)^2 \cdot 10^8 \cdot 6 \cdot 10^{-6} + \\
 &+ (-0,75 + j0,97) \cdot 10^4 \cdot 60 \cdot 10^{-3} + 600 = \\
 &= -74,7 - j290 = 299,5e^{-j104,4^\circ}.
 \end{aligned}$$

Похідна знаменника:

$$F_2'(p) = 60 \cdot 10^{-8} p^2 + 6 \cdot 10^{-3} p + 30.$$

Значення похідної при $p = p_1$ та $p = p_2$:

$$F_2'(p_1) = 30;$$

$$\begin{aligned}
 F_2'(p_2) &= 60 \cdot 10^{-8} \cdot (-0,75 + j0,97)^2 \cdot 10^8 + \\
 &+ 6 \cdot 10^{-3} \cdot (-0,75 + j0,97) \cdot 10^4 + 30 = \\
 &= -37,5 - j29 = 47,4e^{-j142,3^\circ}.
 \end{aligned}$$

Для оригіналу $u_c(t)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
 u_c(t) &= \frac{600}{30} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{299,5e^{-j104,4^\circ}}{47,4e^{-j142,3^\circ}} e^{(-0,75 + j0,97) \cdot 10^4 t} \right) = \\
 &= 20 + 2 \operatorname{Re} \left(6,32e^{-0,75 \cdot 10^4 t} \cdot e^{+j0,97 \cdot 10^4 t + 37,9^\circ} \right) = \\
 &= \left(20 + 12,64e^{-7500t} \cos(9700t + 37,9^\circ) \right) B.
 \end{aligned}$$

Перевіримо результати підрахунків:

$$u_c(0) = 20 + 12,64 \cos 37,9^\circ = 30 \text{ B.}$$

Приклад 6.8.

Напряга $u = 10e^{-2t}$ В включається у коло, яке складається з послідовно з'єднаних резистора з опором $R = 4 \text{ Ом}$ та котушки, індуктивність якої $L = 1 \text{ Гн}$. Визначити струм у колі операторним методом.

Розв'язок.

У колі – нульові незалежні початкові умови. Зображення струму за законом Ома:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

де $U(p) = \frac{10}{p+2}$, $Z(p) = R + pL = 4 + p$.

Отже:

$$I(p) = \frac{10}{(p+2)(p+4)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Шукаємо оригінал. Корені многочлена в знаменнику:

$$F_2(p) = 0; \quad p_1 = -2 \text{ с}^{-1}; \quad p_2 = -4 \text{ с}^{-1};$$

$$F_1(p_1) = F_1(p_2) = 10.$$

Похідна $F_2'(p)$ та її значення при $p = p_1$ та $p = p_2$:

$$F_2(p) = p^2 + 6p + 8;$$

$$F_2'(p) = 2p + 6; \quad F_2'(p_1) = 2; \quad F_2'(p_2) = -2.$$

Визначаємо струм $i(t)$:

$$i(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{10}{2} e^{-2t} + \frac{10}{-2} e^{-4t} = 5(e^{-2t} - e^{-4t}) A.$$

Приклад 6.9.

Операторним методом розрахувати струм через R_2 (рис. 6.5, а) після комутації. Параметри кола: $E = 200 \text{ В}$, $R_1 = 120 \text{ Ом}$, $R_2 = 60 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

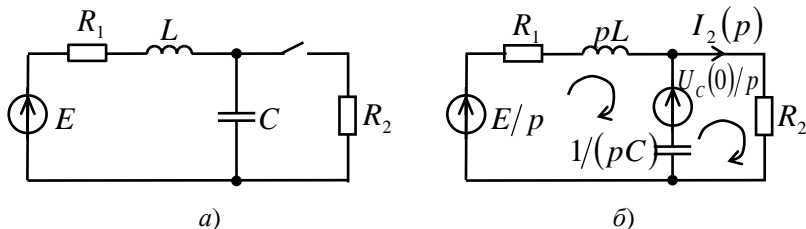


Рис. 6.5

Розв'язок.

Для моменту $t = 0_-$ маємо: $i_L(0_-) = 0$, $u_C(0_-) = E$. Схема заміщення скомутованого кола показана на рис. 6.5, б.

Для розрахунку струму $I_2(p)$ використаємо метод контурних струмів. Система рівнянь у операторному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(p) \left(R_1 + pL + \frac{1}{pC} \right) + I_{22}(p) \left(-\frac{1}{pC} \right) &= \frac{E}{p} - \frac{U_C(0)}{p} \\ I_{11}(p) \left(-\frac{1}{pC} \right) + I_{22}(p) \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) &= \frac{U_C(0)}{p} \end{aligned} \right\}.$$

Зображення струму $I_{22}(p) = I_2(p)$ шукаємо як:

$$I_{22}(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)}.$$

Визначимо $\Delta(p)$, $\Delta_2(p)$ та врахуємо, що $U_C(0) = E$:

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \begin{vmatrix} R_1 + pL + \frac{1}{pC} & -\frac{1}{pC} \\ -\frac{1}{pC} & R_2 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = \\ &= R_1 R_2 + \frac{R_1}{pC} + pLR_2 + \frac{R_2}{pC} + \frac{pL}{pC} + \left(\frac{1}{pC} \right)^2 - \left(\frac{1}{pC} \right)^2 = \\ &= \frac{p^2 R_2 LC + p(CR_1 R_2 + L) + R_1 + R_2}{pC}. \end{aligned}$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} R_1 + pL + \frac{1}{pC} & \frac{E}{p} - \frac{U_c(0)}{p} \\ -\frac{1}{pC} & \frac{U_c(0)}{p} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{R_1 U_c(0)}{p} + \frac{U_c(0) p L}{p} + \frac{U_c(0)}{p^2 C} =$$

$$= \frac{p^2 L C U_c(0) + p C R_1 U_c(0) + U_c(0)}{p^2 C}.$$

$$I_{22}(p) = \frac{p^2 L C U_c(0) + p C R_1 U_c(0) + U_c(0)}{p(p^2 R_2 L C + p(C R_1 R_2 + L) + R_1 + R_2)}.$$

Підставимо числові значення:

$$I_{22}(p) = \frac{p^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + p \cdot 2,4 + 200}{p(p^2 \cdot 6 \cdot 10^{-4} + p \cdot 0,82 + 180)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Корені рівняння $F_2(p) = 0$:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -275 \text{ с}^{-1}; \quad p_3 = -1090 \text{ с}^{-1}.$$

Шукаємо оригінал струму $i_{22}(t) = i_2(t)$ за вже добре відомою схемою:

$$F_1(p_1) = 200;$$

$$F_1(p_2) = (-275)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 2,4(-275) + 200 = -309;$$

$$F_1(p_3) = (-1090)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 2,4(-1090) + 200 = -40.$$

Похідна многочлена знаменника та її значення при різних p_k :

$$F_2'(p) = 18 \cdot 10^{-4} p^2 + 1,64 p + 180;$$

$$F_2'(p_1) = 180;$$

$$F_2'(p_2) = 18 \cdot 10^{-4} (-275)^2 + 1,64(-275) + 180 = -135;$$

$$F_2'(p_3) = 18 \cdot 10^{-4} (-1090)^2 + 1,64(-1090) + 180 = 533.$$

Шуканий струм:

$$i_2(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t};$$

$$i_2(t) = \frac{200}{180} + \frac{-309}{-135} e^{-275t} + \frac{-40}{533} e^{-1090t} =$$

$$= (1,11 + 2,29e^{-275t} - 0,07e^{-1090t}) A.$$

У момент комутації $i_2(0) = 1,11 + 2,29 - 0,07 = 3,33 A$. Правильність розв'язку можна перевірити, використавши незалежні початкові умови. При $t = 0$ напруга $U_{R_2} = U_C(0) = 200 B$. Значить, $i_2(0) = U_{R_2}(0)/R_2 = 3,33 A$.

6.7. Завдання для самостійної роботи

Задача 6.7.1. Для схеми рис. 6.6 розрахувати перехідний струм через конденсатор операторним методом. Задані наступні параметри кола: $E = 160 B$, $R_1 = 80 Ом$, $R_2 = 50 Ом$, $C = 10 мкФ$.

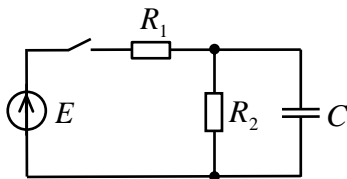


Рис. 6.6

Відповідь: $i_C(t) = 2e^{-3250t} A$.

Задача 6.7.2. Операторним методом визначити напругу на розімкнутих полюсах 2-2' кола рис. 6.7 при підключенні його до постійної напруги $U_1 = 100 B$. Параметри кола: $R_1 = R_2 = 100 Ом$, $C_1 = 40 мкФ$, $C_2 = 60 мкФ$.

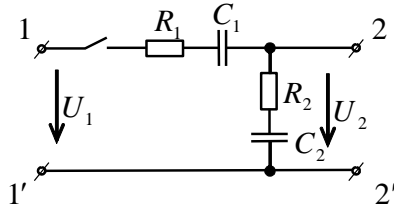


Рис. 6.7

Відповідь: $u_2(t) = (40 + 10e^{-208,3t})B$.

Задача 6.7.3. Розрахувати операторним методом перехідний струм через індуктивність (рис. 6.8), якщо: $E = 120 B$, $R_1 = 80 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$.

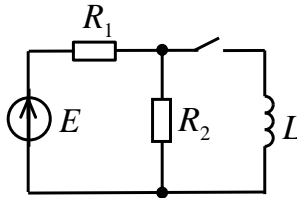


Рис. 6.8

Відповідь: $i(t) = (1,5 - 1,5e^{-266,7t})A$.

Задача 6.7.4. У електричному колі (рис. 6.9) відомо: $E = 48B$, $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$. Операторним методом визначити струм i_3 після комутації.

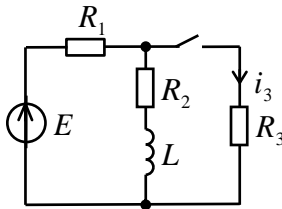


Рис. 6.9

Відповідь: $i_3(t) = (5,2 - 1,5e^{-115t})A$.

Задача 6.7.5. Розрахувати напругу на конденсаторі після комутації операторним методом, якщо електричне коло (рис. 6.10) має параметри: $E = 24 \text{ В}$, $R_1 = 50 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $C = 3 \text{ мкФ}$.

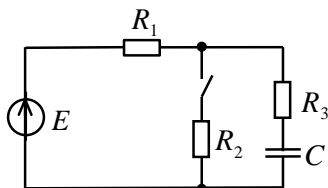


Рис. 6.10

Відповідь: $u_C(t) = (16 + 8e^{-6250t}) \text{ В}$.

Задача 6.7.6. У електричному колі (рис. 6.11) при $t = 0$ замикається контакт K . Операторним методом визначити струм у колі джерела енергії після комутації, якщо параметри кола: $E = 60 \text{ В}$, $R_1 = 400 \text{ Ом}$, $R_2 = 800 \text{ Ом}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$, $C = 2,5 \text{ мкФ}$.

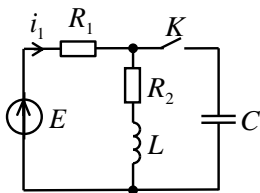


Рис. 6.11

Відповідь: $i_1(t) = (0,05 + 0,2e^{-2000t} - 0,1e^{-3000t}) \text{ А}$.

Задача 6.7.7. Коло рис. 6.12 підключається до постійної напруги $U = 125 \text{ В}$. Операторним методом розрахувати напругу на конденсаторі, якщо: $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 40 \text{ мГн}$, $C = 5 \text{ мкФ}$.

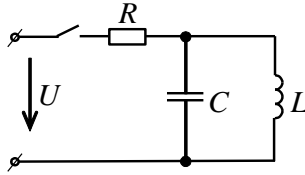


Рис. 6.12

Відповідь: $u_C(t) = 125e^{-1000t} \sin 2000t \text{ В}$.

6.8. Запитання для поточного контролю

1. Який вигляд має пряма перетворення Лапласа?
2. Приведіть та поясніть операторну схему заміщення котушки індуктивності.
3. Приведіть та поясніть операторну схему заміщення конденсатора.
4. Які елементи операторних схем заміщення реактивних елементів кола враховують початкові умови у колі?
5. Запишіть рівняння першого та другого законів Кірхгофа в операторній формі.
6. Приведіть формулу теореми розкладання та поясніть особливості її використання.

Розділ 7. Вмикання пасивного двополюсника до джерела напруги довільної форми

7.1. Ступінчата та імпульсна функції

При розрахунку перехідних процесів у багатьох випадках зручно користуватися ступінчатою та імпульсною функціями, відомими з курсу вищої математики. Ці функції є певною ідеалізацією, яка полегшує приблизне математичне описання реальних сигналів та властивостей ідеальних комутуючих пристроїв, ідеальних джерел та елементів кола.

Напруга у вигляді ступінчастої функції реалізується, наприклад, при вмиканні кола до ідеального джерела постійної напруги за допомогою ідеального ключа (рис. 7.1, а). Опір ключа в момент $t = 0$ миттєво стає нульовим, напруга на вході двополюсника змінюється до постійного значення U .

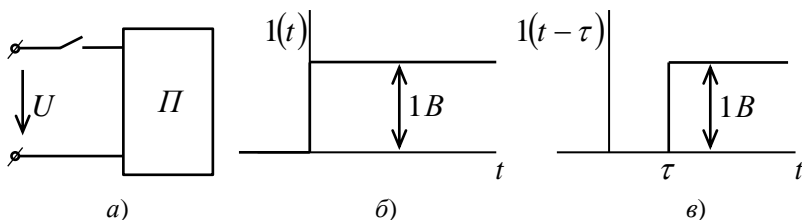


Рис. 7.1

Ступінчасту функцію з амплітудою, яка дорівнює одиниці (рис. 7.1, б), називають одиничною ступінчатою функцією $1(t)$ (функцією Хевісайда).

Аналітично ця функція записується так:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Таким чином, одинична функція $1(t)$ тотожно дорівнює нулю при від'ємних значеннях аргументу і одиниці при додатних значеннях аргументу.

Одинична функція записується у вигляді $1(t - \tau)$, коли постійна одинична напруга включається у момент $t = \tau$, а не $t = 0$ (рис. 7.1, в). Будь-яка обмежена функція часу, помножена на функцію $1(t - \tau)$, тотожно обертається в нуль при $t < \tau$ та зберігає своє значення при $t > \tau$:

$$f(t) \cdot 1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < \tau; \\ f(t), & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (7.2)$$

Отже, множення функції на $1(t - \tau)$ рівнозначне дії ключа, який вмикає джерело сигналу $f(t)$ у момент $t = \tau$.

У багатьох практичних задачах електротехніки доводиться мати справу з короткодійними силами (наприклад, ЕРС), які мають характер миттєвого поштовху чи імпульсу. При розгляді таких задач зручно користуватися так званою імпульсною функцією $\delta(t)$, яка ще називається δ -функцією Дірака.

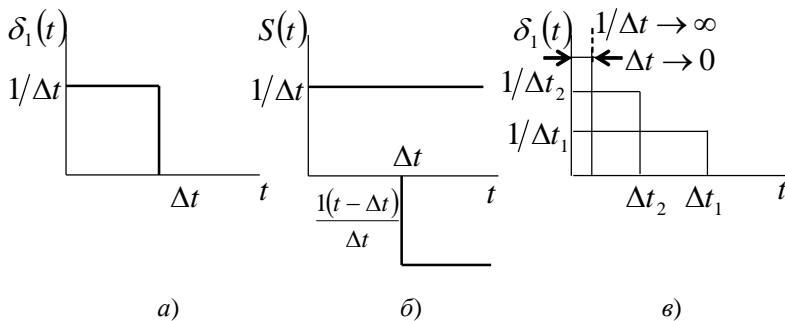


Рис. 7.2

Розглянемо імпульс одиничної площі, зображений на рис. 7.2, а. Амплітуда цього імпульсу дорівнює $1/\Delta t$, а його тривалість Δt . Створити його можна суперпозицією двох стрибків $S(t)$, показаних на рис. 7.2, б. Позначивши імпульс як $\delta_1(t)$, його можна записати таким чином:

$$\delta_1(t) = \frac{1(t) - 1(t - \Delta t)}{\Delta t}; \quad (7.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) dt = 1.$$

Як показано на рис. 7.2, в, обидві рівності зберігаються при будь-яких значеннях Δt . Зокрема, при $\Delta t \rightarrow 0$ маємо імпульсну функцію $\delta_1(t)$, яка дорівнює нескінченності при $t = 0$ та нулю при $t \neq 0$.

$$\delta_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - \Delta t)}{\Delta t};$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) dt = 1.$$

Перше рівняння, за визначенням, є похідною одиничної ступінчастої функції, а друге визначає площу імпульсу. Отже, **дельта-функція є імпульсом нульової тривалості з одиничною площею**. Така функція формально визначається як похідна по часові від одиничної функції:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \quad (7.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

При заміні змінної t на $t - \tau$ зміщена на τ δ -функція:

$$\delta(t - \tau) = \frac{d1(t - \tau)}{dt}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \quad (7.5)$$

Множення зміщеної δ -функції на деяку функцію $f(t)$ рівнозначне множенню її на сталу величину $f(\tau)$, оскільки $\delta(t - \tau) = 0$ при $t \neq \tau$:

$$f(t) \cdot \delta(t - \tau) = f(\tau) \frac{d1(t - \tau)}{dt}, \quad (7.6)$$

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = f(\tau).$$

Розмірність одиничної імпульсної функції часу – 1/с.

7.2. Перехідні функції електричного кола

Перехідні функції електричного кола називають ще *перехідними характеристиками кола*. Вони являють собою реакцію кола на дію одиничної ступінчатої функції на вході. Перехідні функції дорівнюють нулю при $t < 0$, оскільки для пасивного двополюсника при дії одиничної входньої напруги чи струму струми та напруги у вітках двополюсника мають нульові значення.

При підключенні кола до джерела одиничної ступінчатої напруги перехідна функція струму називається перехідною провідністю $g(t)$.

Перехідна провідність $g(t)$ кола чи вітки чисельно дорівнює перехідному струмові кола чи вітки при входній дії у вигляді одиничної ступінчатої напруги. Так, для послідовного RL -кола, де перехідний струм при підключенні до джерела постійної ЕРС змінюється за законом

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

перехідну провідність $g(t)$ записують, поклавши $E = 1 \text{ В}$:

$$g(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Щоб визначити перехідну провідність для будь-якої вітки кола, необхідно класичним чи операторним методом визначити перехідний струм у цій вітці при підключенні на вхід кола одиничної ступінчатої напруги.

Приклад 7.1.

Визначити перехідну провідність для кола (рис. 7.3, а) з параметрами: $R_1 = 200 \text{ Ом}$, $R_2 = 500 \text{ Ом}$, $C = 10 \text{ мкФ}$.

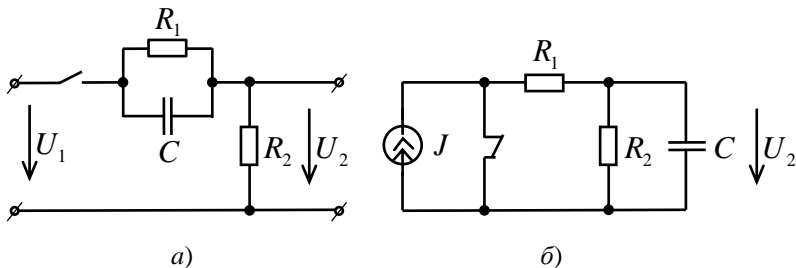


Рис. 7.3

Розв'язок.

Визначимо перехідний струм у колі, наприклад, операторним методом.

Зображення вхідного струму:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{U_1(pR_1C + 1)}{p(pR_1R_2C + R_1 + R_2)}.$$

Поклавши $U_1 = 1 \text{ В}$, підставимо числові значення елементів кола та застосуємо формулу розкладання. Отримаємо:

$$g(t) = (1,4 + 0,6e^{-700t}) \cdot 10^{-3} \text{ Сл.}$$

Перехідна функція ділянки кола за напругою $k(t)$ визначається як перехідна напруга на цій ділянці, яка виникає при вхідній дії у вигляді одиничної напруги $1(t)$. Визначається $k(t)$ за таким самим алгоритмом, що і $g(t)$; розраховується класичним чи операторним методом перехідна напруга на заданій ділянці кола при вхідній напрузі, яка дорівнює 1 В.

Наприклад, для схеми прикладу 7.1 перехідна функція за напругою на резисторі R_2 , визначена через $U_2(p)$:

$$U_2(p) = I(p) \cdot R_2 = \frac{U_1(pR_1C + 1)R_2}{p(pR_1R_2C + R_1 + R_2)}.$$

Прийmemo $U_1 = 1 B$ і визначимо оригінал $k(t)$:

$$k(t) = 0,7 + 0,3e^{-700t}.$$

Перехідні функції кола (перехідні характеристики) не залежать від форми та амплітуди діючих у схемі джерел ЕРС та струму і визначаються самою схемою і параметрами її елементів.

7.3. Інтеграли Дюамеля

Розглянемо перехідний процес у колі рис. 7.4, а, до входу якого вмикається напруга $u(t)$, яка неперервно змінюється в часі (рис. 7.4, б). Перехідні функції будемо вважати відомими.

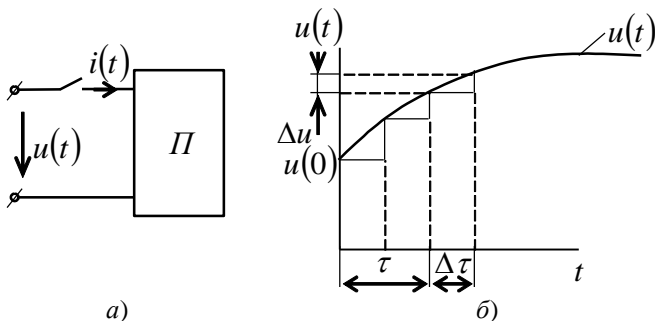


Рис. 7.4

Замінімо плавну криву напруги $u(t)$ ступінчатою функцією зі сталим кроком дискретизації $\Delta\tau$. Тоді перехідний струм $i(t)$ у певний момент часу повинен включати в себе складові від усіх елементарних стрибків напруги Δu , зміщених один відносно іншого на інтервал часу $\Delta\tau$.

Ввімкнення при $t = 0$ початкової сходинок напруги $u(0)$ обумовлює компонент струму $u(0) \cdot g(t)$. Постійна напруга, яка включається в момент $t = \tau + \Delta\tau$, дорівнює ΔU . У будь-який момент $t \geq \tau$ ця напруга створює струм $\Delta u \cdot g(t - \tau - \Delta\tau)$. Елементарний стрибок напруги Δu , як видно з рис. 7.4, б, можна

записати, як $\Delta u \approx (du/dt)\Delta\tau$, причому ця приблизна рівність виконується тим точніше, чим менший крок дискретизації $\Delta\tau$. Складаючи компоненти струму від вмикання усіх елементарних стрибків напруги, знайдемо струм:

$$\begin{aligned} i(t) &\cong u(0) \cdot g(t) + \sum_{\tau=0}^t \Delta u g(t - \tau - \Delta\tau) = \\ &= u(0) \cdot g(t) + \sum_{\tau=0}^t \frac{du}{d\tau} \Delta\tau g(t - \tau - \Delta\tau). \end{aligned}$$

У граничному випадку, зменшуючи інтервал дискретизації $\Delta\tau$ до нескінченно малого значення $d\tau$, переходимо від скінченної суми до інтеграла:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau. \quad (7.7)$$

Вираз (7.7) називають **першою формою інтеграла Дюамеля**.

Замінюючи змінні чи виконуючи інтегрування частинами, можна отримати інші форми інтеграла Дюамеля:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau; \quad (7.8)$$

$$i(t) = u(t) \cdot g(0) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau; \quad (7.9)$$

$$i(t) = u(t) \cdot g(0) + \int_0^t u'(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau. \quad (7.10)$$

Для розрахунку перехідної напруги на будь-якій вітці скомутованого кола можна отримати аналогічні формули, де замість перехідної провідності $g(t)$ повинна вживатися перехідна функція за напругою $k(t)$.

Приклад 7.3.

На вхід послідовного RC - кола з параметрами $R = 2 \text{ кОм}$, $C = 1 \text{ мкФ}$ підключається напруга $u(t) = U_0 + kt$, де $U_0 = 20 \text{ В}$, $k = 2 \cdot 10^4 \text{ В} \cdot \text{с}^{-1}$. Визначити закон зміни струму у колі.

Розв'язок.

Використаємо для розрахунку формулу (7.7) інтеграла Дюамеля.

Знайдемо перехідну провідність кола $g(t)$. У операторній формі зображення струму у схемі:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

де $U(p) = 1/p$ – операторне зображення одиничної функції напруги.

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} = \frac{1 + pRC}{pC}.$$

Маємо:

$$I(p) = \frac{C}{1 + pRC}.$$

Оригінал струму:

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Отже, перехідна провідність кола:

$$g(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Визначимо величини, необхідні для формули (7.7):

$$u(0) = U_0;$$

похідна напруги $u'(\tau) = k$;

перехідна провідність $g(t - \tau) = \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}(t - \tau)}$.

Підставимо отримані співвідношення у першу форму інтеграла Дюамеля:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= U_0 \cdot \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} + \int_0^t k \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau = \\
 &= \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{k}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\tau} d\tau = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} + \\
 &+ \frac{k}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \cdot RC \left(e^{\frac{1}{RC}t} - 1 \right) = kC + \left(\frac{U_0}{R} - kC \right) e^{-\frac{1}{RC}t}.
 \end{aligned}$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} + \left(\frac{20}{2 \cdot 10^3} - 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} \right) e^{-\frac{1}{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}t} = \\
 &= (20 - 10e^{-500t}) \text{ мА}.
 \end{aligned}$$

Переконаємося, що при $t = 0$ струм $i_c(0) = U_0/R = 10 \text{ мА}$, як і повинно бути при нульових незалежних початкових умовах.

За допомогою інтеграла Дюамеля розраховують також перехідні процеси при вмиканні кола на ЕРС, задану кусково-аналітичною функцією часу.

Припустимо, наприклад, що пасивний двополюсник з відомими перехідними функціями (рис. 7.5, а) вмикається до напруги, яка змінюється в часі так, як показано на рис. 7.5, б. Крива напруги $u(t)$ має три ділянки неперервних аналітичних функцій та дві стрибкоподібні зміни. Визначимо струм у колі для усіх інтервалів часу.

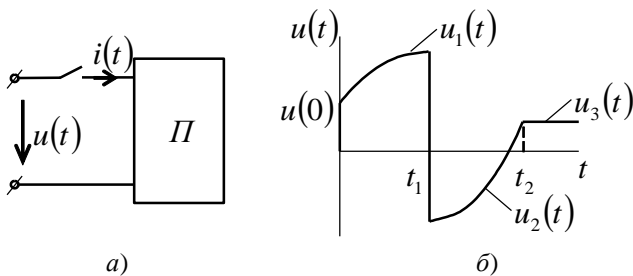


Рис. 7.5

На інтервалі значень $0 < t < t_1$, струм у колі залежить від початкового стрибка напруги $u(0)$ та змінної напруги $u_1(t)$, і може бути визначений за першою формою інтеграла Дюамеля:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u_1'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau.$$

Для будь-якого моменту часу t , який приймає значення в проміжку $t_1 \leq t < t_2$ при розрахунках струму потрібно враховувати усі зміни у вхідній напрузі з моменту вмикання: стрибок при $t = 0$, неперервну зміну $u_1(t)$ до $t = t_1$, стрибок на величину $u_2(t) - u_1(t)$ в момент $t = t_1$, і, нарешті, неперервну функцію $u_2(t)$ від моменту $t = t_1$ і до будь-якого t на інтервалі значень від t_1 до t_2 . За тією ж першою формою інтеграла Дюамеля запишемо:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau + \\ + [u_2(t_1) - u_1(t_1)] \cdot g(t - t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau.$$

Третій характерний інтервал часу: $t_2 \leq t < \infty$. На цьому проміжку, як і для попереднього, необхідно визначити реакцію кола на початковий стрибок $u(0)$, змінну функцію $u_1(t)$, стрибок напруги при $t = t_1$, змінну функцію $u_2(t)$ (до моменту $t = t_2$). Напруга $u_3(t)$, яка вмикається при $t = t_2$, постійна, її похідна $u_3'(\tau) = 0$, тому відповідного інтеграла у формулі для струму бути не може. Отже, для третього проміжку часу:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau + \\ + [u_2(t_1) - u_1(t_1)] \cdot g(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau.$$

7.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 7.4.1. Розрахувати перехідну провідність кола (рис. 7.6) $g(t)$ та перехідну функцію $k_2(t)$ передачі за напругою. Параметри кола: $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 60 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$.

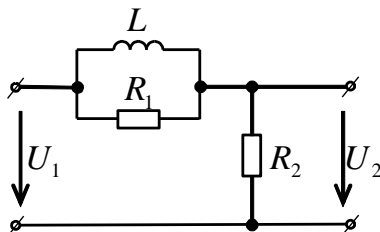


Рис. 7.6

Відповідь: $g(t) = (0,0167 - 0,0067 e^{-240t}) \text{ См}$, $k_2(t) = 1 - 0,4 e^{-240t}$.

Задача 7.4.2. Розрахувати перехідну провідність кола (рис. 7.7), якщо: $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 50 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$.

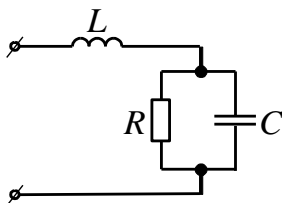


Рис. 7.7

Відповідь: $g(t) = (0,01 - 0,0117 e^{-2760t} + 0,0017 e^{-7240t}) \text{ См}$.

Задача 7.4.3. Записати інтеграл Дюамеля для напруги на виході схеми задачі 7.4.1, якщо коло включається до напруги $u_1(t)$ (рис. 7.8, $U_0 = 5 \text{ В}$, $U_1 = 10 \text{ В}$, $t_1 = 5 \text{ мс}$).

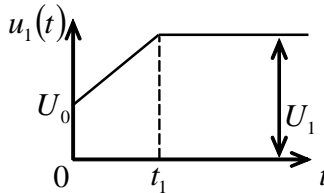


Рис. 7.8

Відповідь: $0 < t < t_1: u_2(t) = (3,33 + 10^3 t - 0,33e^{-240t}) \text{ В};$
 $t > t_1: u_2(t) = (10 - 5,87e^{-240t}) \text{ В}.$

Задача 7.4.4. До електричного кола (рис. 7.9, а) з параметрами: $R = 50 \text{ Ом}$, $L = 200 \text{ мГн}$ подається напруга, зображена на рис. 7.9, б. Визначити струм у колі через 3 мс після підключення кола, скориставшись інтегралом Дюамеля.

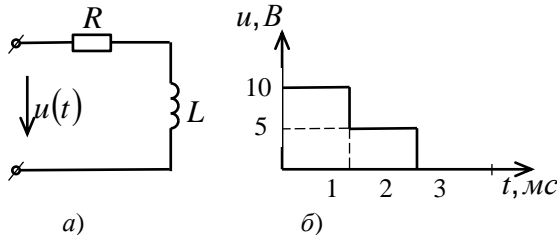


Рис. 7.9

Відповідь: $i = 44 \text{ мА}.$

7.5. Запитання для поточного контролю

1. Яка функція називається одиничною ступінчатою?
2. Як визначити перехідну провідність ділянки кола?
3. Як визначити перехідну функцію ділянки кола за напругою?
4. Приведіть першу форму інтеграла Дюамеля та поясніть її складові.

Розділ 8. Спектральний (частотний) метод аналізу електричних кіл

8.1. Перетворення Фур'є та його основні властивості

Складний сигнал можна подати як сукупність гармонічних коливань, яка називається спектром сигналу. *Спектри сигналів*, при усій їх різноманітності, можна розділити на два основні види – *дискретні* та *суцільні*. Періодичні функції, як ми вже переконалися раніше, мають дискретний або лінійчатий спектр.

Щоб отримати спектр неперіодичної функції, використаємо комплексну форму ряду Фур'є. Періодична функція $f(t)$ з періодом T , яка задовольняє умови Діріхле, може бути розкладена в ряд Фур'є у тригонометричній формі:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega_0 t \quad (8.1)$$

або у другому варіанті:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \psi_k) \quad (8.2)$$

Тут: $\omega_0 = 2\pi/T$ – частота основної гармоніки;

A_0 – постійна складова ряду;

A_k, B_k, C_k – амплітуди відповідних гармонічних складових.

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (8.3)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (8.4)$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (8.5)$$

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; B_k = A_k \cos \psi_k; C_k = A_k \sin \psi_k. \quad (8.6)$$

Використаємо відоме з курсу математики перетворення:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}.$$

Підставивши це співвідношення у формулу (8.2), отримаємо:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(e^{j(k\omega_0 t + \psi_k)} - e^{-j(k\omega_0 t + \psi_k)} \right). \quad (8.7)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= A_k e^{j\psi_k}; \\ \dot{A}_{k-} &= -A_k e^{-j\psi_k}. \end{aligned}$$

Ряд (8.7) запишемо таким чином:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (8.8)$$

У формулі (8.8) індекс k може приймати усі значення від $-\infty$ до $+\infty$ (крім $k = 0$). Для періодичної функції $f(t)$ співвідношення (8.8) є рядом Фур'є у комплексній формі.

Комплексна амплітуда ряду (див. (8.4) – (8.6)):

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= A_k e^{j\psi_k} = A_k \cos \psi_k + jA_k \sin \psi_k = B_k + jC_k; \\ \dot{A}_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\sin k\omega_0 t + j \cos k\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{2j}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos k\omega_0 t - j \sin k\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

Або:

$$\dot{A}_k = \frac{2j}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (8.9)$$

Підставимо праву частину (8.9) у формулу (8.8):

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_0 t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (8.10)$$

Спрямуємо період функції $f(t)$ до нескінченності та накладемо певні обмеження на саму функцію $f(t)$, такі, що

величина $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ не є нескінченно велика. При таких

допущеннях

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

Замінімо $k\omega_0$ на змінну частоту ω : $k\omega_0 = \omega$, та позначимо інтервал між сусідніми частотами (k -тою та $k+1$ -ою) у ряді (8.10) так:

$$\Delta\omega = (k+1)\omega_0 - k\omega_0 = \omega_0 = 2\pi/T.$$

Звідси:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

При $T \rightarrow \infty$, замінивши $\Delta\omega$ диференціалом $d\omega$, отримаємо для (8.10):

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8.11)$$

Позначимо:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8.12)$$

Врахуємо, що при зміні k від $-\infty$ до $+\infty$ частота $\omega = k\omega_0$ також змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, та перейдемо у (8.11) від суми до інтегралу:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.13)$$

Формула (8.13) називається **інтегралом Фур'є** або **зворотним перетворенням Фур'є**. За допомогою цього перетворення неперіодична функція часу $f(t)$ розкладається на нескінченно велику кількість синусоїдних функцій з нескінченно близькими частотами та нескінченно малими амплітудами $F(j\omega)d\omega$. Величина $F(j\omega)$ називається **спектром** функції $f(t)$ або **спектральною густиною**. Формулу (8.12) називають **прямим перетворенням Фур'є**. За прямим перетворенням Фур'є функція часу $f(t)$ перетворюється у функцію частоти $F(j\omega)$. $F(j\omega)$ – функція комплексна:

$$F(j\omega) = F(\omega) e^{j\psi(\omega)}. \quad (8.14)$$

$F(\omega)$ називається **амплітудно-частотною характеристикою** (АЧХ), $\psi(\omega)$ – **фазочастотною характеристикою**, а $F(j\omega)$ – **амплітудно-фазочастотною характеристикою** (АФЧХ) або **годографом**. Амплітудний спектр – завжди парна, а фазовий спектр – завжди непарна функція ω .

Якщо в інтервалі часу t від $-\infty$ до 0 функція $f(t) = 0$, а у проміжку від 0 до ∞ часова функція не дорівнює нулю, то застосовують **одностороннє перетворення Фур'є**:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8.15)$$

Комплексну функцію $F(j\omega)$ можна записати і так:

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= P(\omega) + jQ(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \omega t dt.
 \end{aligned}$$

Дійсна частина спектральної функції:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t dt \quad (8.16)$$

є косинусним перетворенням, і, отже, парною функцією:

$$P(\omega) = P(-\omega).$$

Уявна частина

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \omega t dt \quad (8.17)$$

є синусним перетворенням і, отже, непарною функцією:

$$Q(\omega) = -Q(\omega).$$

Для зворотного перетворення Фур'є (8.13):

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) + jQ(\omega)](\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega)\cos \omega t - Q(\omega)\sin \omega t] d\omega + \\
 &+ j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega)\sin \omega t + Q(\omega)\cos \omega t] d\omega.
 \end{aligned}$$

Уявна частина цього виразу дорівнює нулю, як інтеграл від непарних функцій в границях від $-\infty$ до ∞ . Тому:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [P(\omega)\cos \omega t - Q(\omega)\sin \omega t] d\omega. \quad (8.18)$$

Співставляючи пряме та зворотне перетворення Лапласа (див. підрозділ 6.1) та пряме та зворотне перетворення Фур'є у

комплексній формі (8.12) – (8.13), можна прийти до висновку, що перетворення Фур'є можна розглядати як окремі випадки перетворення Лапласа, якщо $p = j\omega$. Отже, одержати спектральну густину функції $f(t)$ можна, поклавши у операторному зображенні цієї функції $p = j\omega$:

$$F(j\omega) = F(p) \Big|_{p=j\omega}. \quad (8.19)$$

Такий спосіб знаходження спектральної характеристики найпростіший та найзручніший, оскільки він дозволяє використовувати таблиці оригіналів та зображень.

8.2. Спектри деяких функцій часу

Визначимо спектри деяких найпростіших сигналів, які вмикаються до входу електричних кіл.

Нехай $f(t) = \delta(t)$ – *одинична імпульсна функція*. Зображення по Лапласу цієї функції:

$$F(p) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Спектральна густина одиничної імпульсної функції:

$$F(j\omega) = 1.$$

Отже: $F(\omega) = 1$, $\psi(\omega) = 0$, $P(\omega) = 1$, $Q(\omega) = 0$.

Це означає, що спектр дельта-функції має косинусні гармоніки усіх частот з рівними нескінченно малими амплітудами.

Для *експоненційної* функції часу $f(t) = e^{-\alpha t}$ спектральна функція, згідно з (8.19):

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \omega/\alpha} = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Як видно з наведених виразів, амплітудно-частотна характеристика цієї функції монотонно спадає від $F(0) = 1/\alpha$ до

$F(\infty)=0$ (рис. 8.1, а), фазочастотна – від $\psi(0)=0$ до $\psi(\infty)=-\pi/2$ (рис. 8.1, б). Комплексна частотна характеристика $F(j\omega)=1/(\alpha + j\omega)$ в комплексній площині описується годографом – півколом у від’ємній напівплощині уявної осі, що перетинається з віссю дійсних у двох точках: $F(j\omega)=1/\alpha$ та $F(j\omega)=0$ (рис. 8.1, в).

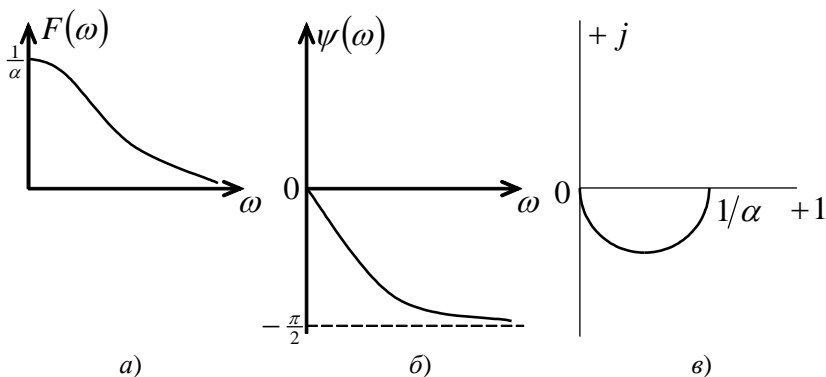


Рис. 8.1

Нехай функція $f(t)$ має вигляд **прямокутного імпульсу** з амплітудою a_m та тривалістю τ (рис. 8.2, а).

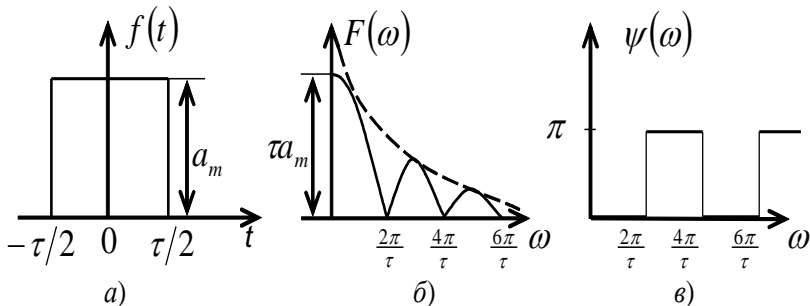


Рис. 8.2

Спектральна густина цієї функції:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a_m e^{-j\omega t} dt = \frac{a_m}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{a_m}{-j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}} \right) = \frac{2a_m}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2} = F(\omega) e^{j\psi(\omega)}. \end{aligned}$$

Модуль спектра, тобто амплітудно-частотна характеристика має вигляд:

$$F(\omega) = \frac{2a_m}{\omega} \left| \sin \frac{\omega \tau}{2} \right|.$$

Амплітуда $F(\omega)$ має нулі, які розміщені при частотах, де $\sin(\omega\tau/2) = 0$, тобто при $\omega\tau = 2k\pi$, де k – ціле додатне число. Графік спектральної густини амплітуд імпульсу показаний на рис. 8.2, б. Із графіка видно, що основна частина енергії цього імпульсу приходить на область низьких частот. При $\omega \rightarrow 0$ функція $F(\omega)$ приймає вигляд:

$$F(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2a_m \frac{|\sin \omega \tau/2|}{\omega} = a_m \tau.$$

Зі зменшенням тривалості імпульсу τ його спектр стає ширшим і навпаки.

Значення фази $\psi(\omega)$ дорівнює 0 при додатних значеннях синуса, і π – при від'ємних (рис. 8.2. в).

Порівняємо спектри поодинокого прямокутного імпульсу та періодичної послідовності таких самих прямокутних імпульсів з періодом $T = 2\pi/\omega_0$ (рис. 8.3, б).

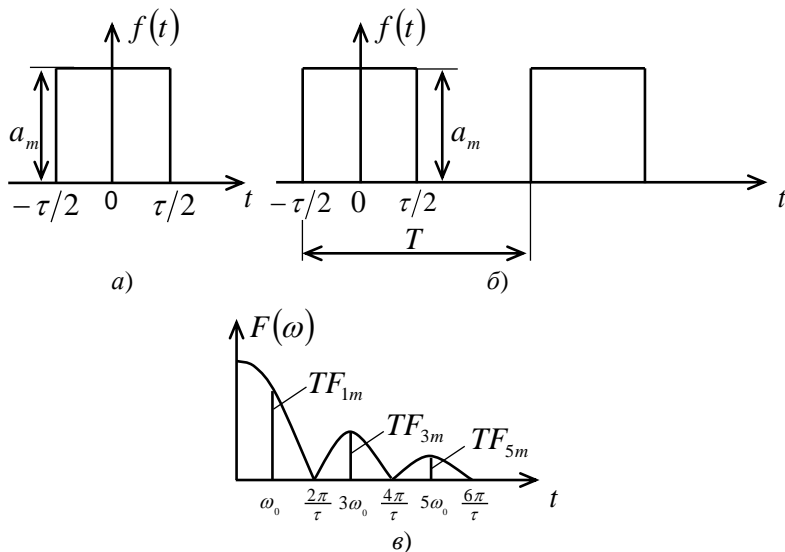


Рис. 8.3

Спектральна густина неперіодичної функції – імпульсу з амплітудою a_m та тривалістю τ :

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a_m e^{-j\omega t} dt$$

Комплексна амплітуда k -ї гармоніки ряду Фур'є (8.9) періодичної послідовності таких самих імпульсів:

$$F_{km} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a_m e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

у тому числі – для постійної складової (нульової гармоніки):

$$F_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a_m dt$$

Виходить, що при частотах $\omega = k\omega_0$ амплітуди лінійчатого спектра періодичної послідовності імпульсів відрізняються від

спектральної густини поодинокого імпульсу множитимом

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} :$$

$$F_{km} = \frac{F(j\omega)}{T}. \quad (8.20)$$

Дискретний спектр амплітуд періодичної функції вписується в амплітудно-частотну характеристику відповідної неперіодичної функції (рис. 8.3, *в*; $T = 2\tau$). При збільшенні періоду T лінії дискретного спектра густішають (зменшується ω_0 та відстань між сусідніми лініями спектра). Коли $T \rightarrow \infty$, дискретний спектр зливається з суцільним і амплітуди гармонік (8.20) стають нескінченно малими (рис. 8.4).

Використовуючи формулу (8.20), за спектральною густиною $F(j\omega)$ можна знайти комплексні амплітуди ряду Фур'є для періодичної послідовності імпульсів з будь-яким періодом T .

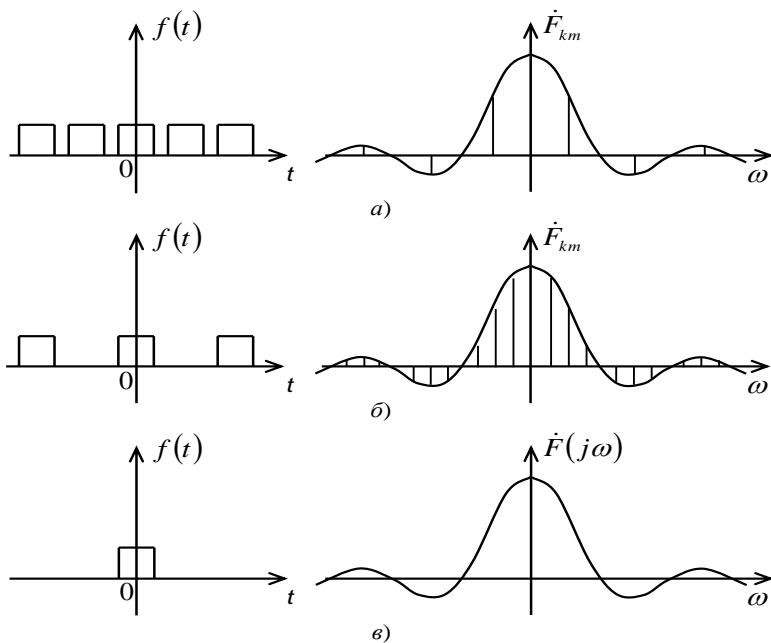


Рис. 8.4

8.3. Аналіз перехідних процесів частотним методом

Частотний (спектральний) метод аналізу процесів у електричних колах ґрунтується на використанні понять спектрів вхідних сигналів та частотних властивостей кіл.

Реакцію електричного кола на вхідну дію у вигляді гармонічного сигналу шукають методом комплексних амплітуд. Якщо вхідний сигнал періодичний, то його розкладають у ряд Фур'є, і, застосувавши метод накладання, також визначають реакції кола на кожну гармонічну складову комплексним методом. Такий самий підхід можна розповсюдити і на неперіодичні вхідні сигнали, якщо замість ряду Фур'є використати інтеграл Фур'є.

Розв'язок диференційного рівняння, яке описує роботу кола, з правою частиною у вигляді функції $f_1(t)$ спектральним методом шукають у такій послідовності:

– визначають спектральну функцію вхідної дії $F_1(j\omega)$;

– комплексним методом розраховують реакцію кола $F_2(j\omega)$ (струми чи напруги) на вхідний сигнал

$$F_2(j\omega) = K(j\omega) \cdot F_1(j\omega), \quad (8.21)$$

де $K(j\omega)$ – комплексна частотна характеристика (КЧХ) кола, яка описує властивості кола і не залежить від вхідного сигналу;

– визначають часову функцію $f_2(t)$ за її спектральною густиною $F_2(j\omega)$.

Припустимо, наприклад, що лінійний двополіусник з комплексним опором $Z(j\omega)$ вмикається у момент $t=0$ при нульових початкових умовах до джерела ЕРС $e(t)$. Позначивши спектральну характеристику ЕРС, як $E(j\omega)$, визначимо спектральну характеристику струму:

$$I(j\omega) = Y(j\omega) \cdot E(j\omega),$$

де $Y(j\omega)$ – комплексна провідність кола в усталеному режимі для усього спектра частот.

Перехідний струм двополюсника $i(t)$ можна знайти за зворотним перетворенням Фур'є:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

У розглянутому нами прикладі комплексною частотною характеристикою виступає комплексна провідність кола $Y(j\omega)$. Замість зворотного перетворення Фур'є можна перейти у спектральній густині струму $I(j\omega)$ до зображення по Лапласу $I(p)$ (замінивши $j\omega$ на p), а потім шукати оригінал $i(t)$ чи то за таблицями, чи то за формулами розкладання.

Комплексна частотна характеристика кола може бути визначена безпосередньо по схемі кола. Для цього кожен елемент кола описується його комплексним опором, вважаючи, що частота вхідної дії невизначена і дорівнює ω . Одним із методів комплексного розрахунку визначається комплексна амплітуда реакції кола на комплексну вхідну дію. КЧХ, як комплексна функція, може бути представлена так:

$$K(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (8.22)$$

де $A(\omega)$ – дійсна частотна характеристика;

$B(\omega)$ – уявна частотна характеристика;

$|K(j\omega)|$ – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega)$ – фазочастотна характеристика (ФЧХ).

КЧХ може бути визначена експериментально, вона може бути і поіменованою величиною і безрозмірною, в залежності від того, який фізичний зміст мають функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

Приклад 8.1

Для електричного кола, показаного на рис. 8.5, обчислити комплексну функцію передачі по напрузі $K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$ і

визначити амплітудно-частотну та фазочастотну (АЧХ та ФЧХ) характеристики. Параметри кола: $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$, $C = 10 \text{ мкФ}$.

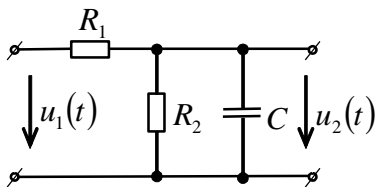


Рис. 8.5

Розв'язок.

Комплексна частотна характеристика кола для нашого прикладу є безрозмірною величиною, що зв'яже у комплексному вигляді напруги $U_2(j\omega)$ та $U_1(j\omega)$, тобто КЧХ для нашої схеми – комплексна функція передачі по напрузі.

Запишемо у комплексному вигляді напругу на виході схеми:

$$U_2(j\omega) = I(j\omega) \cdot \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = I(j\omega) \cdot \frac{R_2}{(1 + j\omega R_2 C)},$$

де

$$I(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{R_1 + \frac{R_2 \cdot 1/(j\omega C)}{R_2 + 1/(j\omega C)}} = \frac{U_1(j\omega)(1 + j\omega R_2 C)}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}.$$

Тоді КЧХ:

$$K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}$$

Модуль цієї функції (АЧХ):

$$K(\omega) = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}}.$$

Фаза комплексної функції передачі:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$K(j\omega) = \frac{100}{200 + j\omega 10^4 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{2 + j\omega \cdot 10^{-3}};$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2 \cdot 10^{-6}}};$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} 0,5 \cdot 10^{-3} \omega.$$

Приклад 8.2

На вхід послідовного RC -кола (рис. 8.6) з параметрами $R = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ, вмикається напруга $u_1(t) = U_0 e^{-\alpha t}$, де $U_0 = 100$ В, $\alpha = 500$ с⁻¹. Спектральним методом визначити напругу на конденсаторі $u_2(t)$.

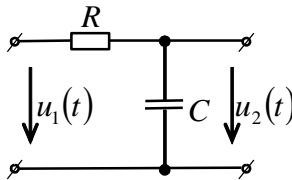


Рис. 8.6

Розв'язок.

Комплексна густина вхідного сигналу, як було визначено раніше (див. підрозділ 8.2):

$$U_1(j\omega) = \frac{U_0}{\alpha + j\omega}.$$

Комплексна частотна характеристика кола:

$$K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{U_1(j\omega) \cdot 1/(j\omega C)}{U_1(j\omega) \cdot (R + 1/(j\omega C))} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Спектральна густина вихідної напруги:

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot K(j\omega) = \frac{U_0}{(\alpha + j\omega)(1 + j\omega RC)}.$$

Знаходимо за (8.13) напругу на конденсаторі:

$$U_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_0}{(\alpha + j\omega)(1 + j\omega RC)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби:

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{(\alpha + j\omega)(1 + j\omega RC)} &= \\ &= \frac{U_0}{1 - \alpha RC} \cdot \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{U_0}{1 - \alpha RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega}. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{U_0}{1 - \alpha RC} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\alpha + j\omega} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1/(RC) + j\omega} d\omega \right) = \\ &= \frac{U}{1 - \alpha RC} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \end{aligned}$$

Покажемо, як цю задачу можна розв'язати іншим шляхом.

Функція $u_1(t)$ абсолютно інтегрована, тому використаємо її зображення по Лапласу:

$$u_1(t) = U_0 e^{-\alpha t} \doteq \frac{U_0}{p + \alpha} = U_1(p).$$

Замінивши p на $j\omega$, отримаємо $U_1(j\omega)$:

$$U_1(j\omega) = \frac{U_0}{\alpha + j\omega}.$$

Позначивши опір кола як $R + 1/(j\omega C)$, запишемо у загальному вигляді спектральну густину напруги на конденсаторі:

$$\begin{aligned}
 U_2(j\omega) &= \frac{U_1(j\omega)}{R+1/(j\omega C)} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{U_1(j\omega)}{1+j\omega RC} = \\
 &= \frac{U_0}{\alpha+j\omega} \cdot \frac{1}{1+j\omega CR} = \frac{1}{(\alpha+j\omega)\left(\frac{1}{RC}+j\omega\right)} \cdot \frac{U_0}{RC}.
 \end{aligned}$$

Використаємо спорідненість прямого перетворення Фур'є та прямого перетворення Лапласа, і запишемо зображення по Лапласу вихідної напруги, замінивши $j\omega$ на p :

$$U_2(p) = \frac{1}{(p+\alpha)\left(\frac{1}{RC}+p\right)} \cdot \frac{U_0}{RC}.$$

Оригінал цієї функції знайдемо по таблиці операторних зображень:

$$u_2(t) = \frac{U}{1-\alpha RC} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$u_2(t) = 200 \left(e^{-500t} - e^{-1000t} \right).$$

При розгляді конкретних задач аналізу перехідних процесів, як можна було переконатися на прикладі 8.2, доцільно використовувати не частотний, а операторний метод, який накладає менш жорсткі обмеження на функції вхідного сигналу. Крім того, у операторному методі зручно і просто враховуються початкові умови задачі. Спектральним методом вигідно аналізувати процеси в колах з визначеними експериментально частотними характеристиками. Це часто зустрічається під час аналізу та синтезу пристроїв і систем автоматичного керування, тому частотний метод широко застосовується саме в теорії автоматичного керування.

8.4. Завдання для самостійної роботи

Задача 8.4.1. Визначити спектральну густину імпульсу напруги, що має форму рівнобедреного трикутника (рис. 8.7).

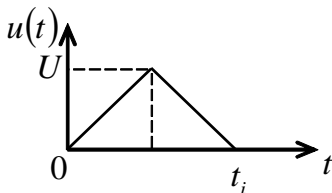


Рис. 8.7

Відповідь: $U(j\omega) = \frac{U t_i}{2} \left(\frac{\sin a}{a} \right) e^{-j2a}$, де $a = \frac{\omega t_i}{4}$.

Задача 8.4.2. Обчислити значення спектральної густини на частоті $f = 1 \text{ МГц}$ пілкоподібного імпульсу напруги (рис. 8.8), якщо $t_i = 2 \text{ мкс}$, $U = 1 \text{ В}$.

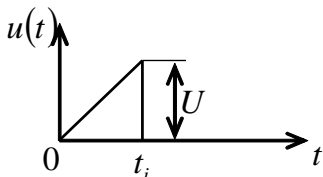


Рис. 8.8

Відповідь: $U = 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ В}\cdot\text{с/рад}$.

Задача 8.4.3. Для електричного кола, зображеного на рис. 8.9, визначити комплексну функцію передачі по напрузі, амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики.

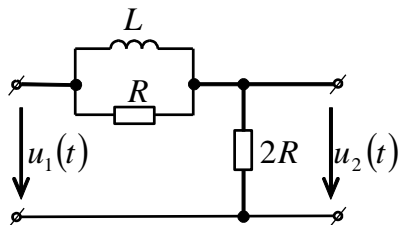


Рис. 8.9

Відповідь: $K(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j1,5\omega\tau}$; $K(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + 2,25\omega^2\tau^2}}$;
 $\psi(\omega) = \arctg \omega\tau - \arctg 1,5\omega\tau$, де $\tau = L/R$.

Задача 8.4.4. На вхід RC - кола (рис. 8.10, а) подається прямокутний імпульс напруги (рис. 8.10, б) тривалістю t_i . Визначити спектральну функцію напруги на конденсаторі $u_2(t)$, якщо $U = 10\text{ В}$, $t_i = 1\text{ мс}$, $R = 100\text{ Ом}$, $C = 5\text{ мкФ}$.

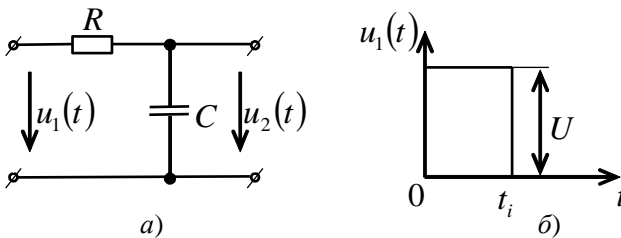


Рис. 8.10

Відповідь: $U_2(j\omega) = \frac{20 \sin(5 \cdot 10^{-4} \omega)}{\omega(1 + j5 \cdot 10^{-4} \omega)} e^{-j5 \cdot 10^{-4} \omega}$.

8.5. Запитання для поточного контролю

1. Приведіть інтеграл Фур'є та поясніть його призначення при аналізі процесів у електричних колах з сигналами у вигляді неперіодичних функцій часу.
2. Яка різниця між спектрами амплітуд одиничного імпульсу та періодичної послідовності імпульсів?
3. Як знайти амплітудо-частотну характеристику неперіодичної функції часу $f(t)$?

Частина третя

Нелінійні електричні та магнітні кола

Розділ 9. Характеристика нелінійних кіл та методів їх розрахунку

9.1. Елементи нелінійних кіл

Електричні кола, які розглядалися у попередніх розділах посібника, належать до класу лінійних кіл. Параметри елементів цих кіл – опорів, індуктивностей, ємностей – не залежать від значень прикладених до них напруг чи протікаючих через ці елементи струмів. Наприклад, опір $R = 10 \text{ Ом}$ свідчить про те, що відношення напруги на полюсах елемента до струму, який через цей елемент протікає, дорівнює десяти, незалежно від того, який за величиною цей струм: 1 mA , 1 A чи 100 A .

Між тим, будь-який реальний елемент таких властивостей не має, лінійність проявляється лише у певних межах значень напруг чи струмів. Існує також досить широкий клас елементів та пристроїв, параметри яких суттєво залежать від струмів чи напруг навіть при зміні їх величин у обмеженому діапазоні. Ці елементи називають *нелійними*. Для кількісного описання їх властивостей необхідно мати відповідні залежності (характеристики), визначені, як правило, експериментально та зображені найчастіше у вигляді графіків.

Електричне коло, до складу якого входить хоча б один нелінійний елемент, називається *нелінійним*. Нелінійні кола характеризуються складністю та великою різноманітністю явищ та процесів, які знаходять широке застосування при створенні різних важливих електротехнічних, радіотехнічних та електронних пристроїв для перетворення електромагнітної енергії, вимірювання та передачі інформації, автоматичного керування та регулювання і т. ін.

Розглянемо у загальному вигляді характеристики основних нелінійних ідеалізованих двополюсних елементів.

Резистивний елемент. Умовне позначення елемента показано на рис. 9.1, *a*. Резистивний нелінійний елемент повністю визначається залежністю між струмом i та напругою u , тобто вольт-амперною характеристикою (ВАХ):

$$i = i(u) \text{ чи } u = u(i).$$

Характеристики, кожна точка яких визначає значення постійної напруги при відповідному значенні постійного струму, називають **статичними** (рис. 9.1, *б*).

Для кожної точки $u = u_0$, $i = i(u_0) = i_0$ можна ввести поняття **статичного опору**:

$$R_{cm} = \frac{u_0}{i_0}. \quad (9.1)$$

Статичний опір нелінійного елемента визначається, отже, як відношення постійної напруги на елементів до усталеного значення постійного струму.

Динамічними називають характеристики, які визначають зв'язок між напругою та струмом при досить швидких змінах струму. Вони можуть відрізнятися від статичних характеристик внаслідок, наприклад, теплової інерції чи інших причин. При досить повільній зміні напруги та струму динамічні характеристики співпадають зі статичними.

Динамічний (диференційний) опір R_0 визначається відношенням малого приросту напруги до відповідного приросту струму (рис. 9.1, *б*)

$$R_0 = \left. \frac{du}{di} \right|_{i=i_0} = k \operatorname{tg} \alpha, \quad (9.2)$$

де k – масштабний множник.

Тобто опір R_0 пропорційний тангенсу кута нахилу дотичної до ВАХ у даній точці.

Характеристики на рис. 9.1, *б* розміщені у першому та третьому квадрантах, де знаки напруг та струмів співпадають. Значить, потужність, що споживаються елементом, додатна: $p = ui \geq 0$.

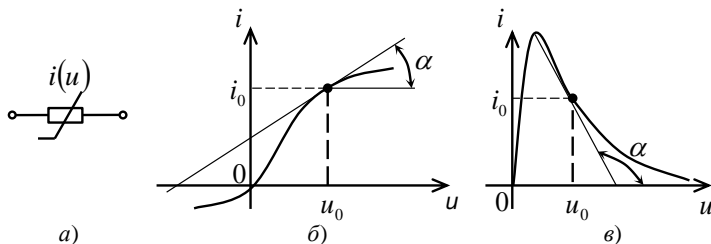


Рис. 9.1

Резистивні елементи з такими характеристиками називають **пасивними**. Статичний опір пасивного резистивного елемента завжди додатний, але динамічний опір може мати від'ємне значення (рис. 9.1, в). Для пасивного елемента $i(0) = 0$. Якщо частина ВАХ попадає в другий чи четвертий квадранти, то кажуть, що елемент є **активним**. Це означає, що він має джерело енергії чи перетворювач енергії іншого виду в електричну. Статичний опір R_{cm} та споживана потужність активного елемента від'ємні.

Індуктивний елемент. Умовне позначення нелінійної індуктивності показано на рис. 9.2, а.

Індуктивний елемент повністю визначається вебер-амперною характеристикою (наприклад, рис. 9.2, б):

$$i = i(\psi), \quad \psi = \psi(i),$$

$$\text{де } \psi = \int_{-\infty}^i u dt, \quad u = \frac{d\psi}{dt}.$$

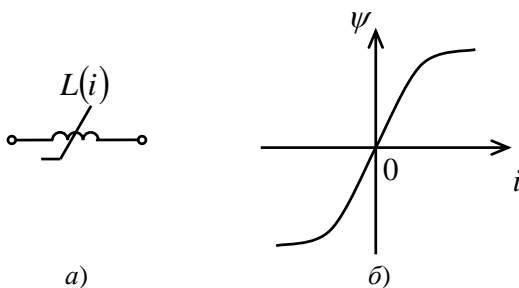


Рис. 9.2

Для кожної точки вебер-амперної характеристики можна ввести статичну та динамічну індуктивності:

$$L_{cm} = \frac{\psi}{i}; L_{\partial} = \frac{d\psi}{di}. \quad (9.3)$$

Характеристики пасивних індуктивних елементів розміщені у першому та третьому квадрантах. Відповідно, енергія, споживана таким елементом, додатна для будь-яких значень t :

$$W(t) = \int_0^t id\psi \geq 0.$$

Ємнісний елемент. Умовне позначення нелінійного ємнісного елемента приведене на рис. 9.3, *а*. Ємнісний елемент повністю визначається залежністю між зарядом та напругою, тобто кулон-вольтовою характеристикою (наприклад, рис. 9.3, *б*):

$$q = q(u); u = u(q),$$

де $q = \int_{-\infty}^t idt, i = \frac{dq}{dt}.$

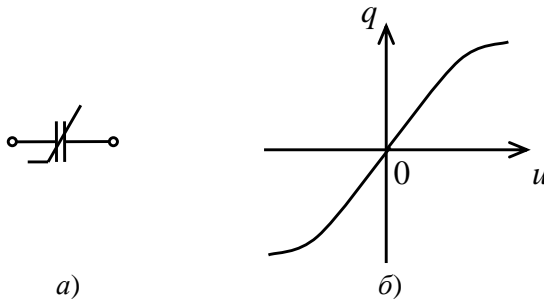


Рис. 9.3

Статична ємність визначається відношенням заряду у кожній точці характеристики до відповідної напруги, а динамічна ємність – відношенням малого приросту заряду до відповідного приросту напруги:

$$C_{cm} = \frac{q}{u}; C_{\partial} = \frac{dq}{du}. \quad (9.4)$$

Для пасивного ємнісного елемента з кулон-вольтною характеристикою у першому та третьому квадрантах споживана енергія додатна у будь-який час:

$$W(t) = \int_0^t q du \geq 0$$

Для математичного аналізу нелінійних кіл характеристики нелінійних елементів повинні бути описані аналітично. Наближене аналітичне описання характеристик нелінійних елементів називають *апроксимацією* характеристик.

Аналітичне описання функцій, заданих у вигляді графіків чи таблиць, вибирають, виходячи з оцінки вимог точності описання та складності апроксимуючої функції. Як правило, чим вищі вимоги до точності апроксимації, тим складніший аналітичний вираз характеристики, і тим важчий розв'язок рівнянь, отриманих на основі цього виразу.

Для наближеного аналітичного описання характеристик нелінійних елементів використовують у теорії нелінійних кіл різні функції: експоненціальні поліноми, кусочно-лінійні функції, степеневі поліноми, деякі трансцендентні функції та ін. На вибір тієї чи іншої функції впливає вигляд конкретної характеристики. Розглянемо у загальному випадку деякі з методів апроксимації.

Кусочно-лінійне наближення ґрунтується на заміні окремих ділянок характеристики відрізками прямих (рис. 9.4, а), тобто реальна крива замінюється ламаною лінією.

Рівняння відрізка k - ї лінійної ділянки між сусідніми точками зламу (x_k, y_k) та (x_{k+1}, y_{k+1}) можна записати у вигляді:

$$\frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad (9.5)$$

звідки:

$$y = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} x - \frac{y_k x_{k+1} - x_k y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} = ax + Y_k \quad (9.6)$$

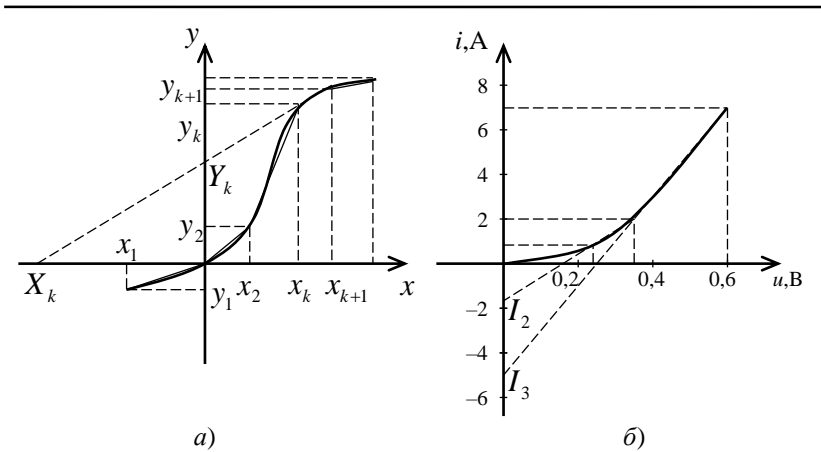


Рис. 9.4

Коефіцієнт a у цьому рівнянні є кутовим коефіцієнтом прямої, а величина Y_k – ордината точки перетину прямої з віссю y .

Розв'язавши (9.5) відносно змінної x , маємо:

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{1}{a} Y_k = a'y + X_k, \quad (9.7)$$

де a' – кутовий коефіцієнт прямої, X_k – абсциса точки перетину прямої з віссю x .

Точність кусочно-лінійної апроксимації залежить від числа інтервалів лінійного наближення. На кожному лінійному інтервалі нелінійний елемент можна розглядати як лінійний, застосовуючи для аналізу такого лінеаризованого кола весь апарат теорії лінійних кіл.

Розглянемо також особливості апроксимації нелінійної характеристики *степеневими поліномами*. Алгебричний поліном степені n :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (9.8)$$

має $n+1$ коефіцієнтів. Ці коефіцієнти визначаються із умови, щоб похибка апроксимації не перевищувала деякого заданого

значення. Відносно простими вважаються два методи наближення: інтерполяція та дискретне середньоквадратичне наближення.

При *інтерполяції* невідомі коефіцієнти a_k полінома (9.8) визначають із умови співпадання значень полінома та заданої нелінійної характеристики у вибраних точках інтервалу наближення. Кількість i таких точок (вузлів) дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів. Із цієї умови отримують систему $n + 1$ лінійних рівнянь:

$$y = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k = g(x_i) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (9.9)$$

Розв'язавши цю систему, визначають коефіцієнти a_k .

Недоліком інтерполяції є те, що похибка на проміжках між вузлами не контролюється і може набувати суттєвих значень. Для підвищення точності необхідно вибирати більше вузлів, а це приводить, у свою чергу, до більш високого степеня полінома.

При застосуванні для апроксимації нелінійної характеристики **дискретного середньоквадратичного наближення** степінь полінома не залежить від кількості вибраних дискретних значень на графіку нелінійної функції. Проаналізуємо особливості цього методу.

На нелінійній характеристиці вибирають $m + 1$ різних значень аргумента x_i , яким відповідають значення g_i функції.

Коефіцієнти полінома $y(x)$ визначають із умови мінімальності суми квадратів похибок у кожній точці:

$$\sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_k x_i^k - g_i \right)^2 = \sigma^2. \quad (9.10)$$

Щоб визначити значення коефіцієнтів полінома a_k із умови мінімуму σ^2 , необхідно прирівняти до нуля частинні похідні по усіх $n + 1$ коефіцієнтах:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_{x_l}} = 2 \sum_{i=0}^m \left[\sum_{k=0}^n a_k x_i^{k+l} - g_i \right] x_i^l = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Система рівнянь для визначення коефіцієнтів приймає вигляд:

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^m x_i^{k+l} = \sum_{i=0}^m g_i x_i^l.$$

Вводять позначення:

$$\sum_{i=0}^m x_i^{k+l} = \alpha_{lk}; \quad \sum_{i=0}^m g_i x_i^l = \beta_l \quad (9.11)$$

Тоді систему лінійних рівнянь можна записати:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{lk} \cdot a_k = \beta_l \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (9.12)$$

Розв'язавши (9.12), отримують коефіцієнти полінома.

Для аналітичного описання симетричних характеристик зручно користуватися *гіперболічним синусом*:

$$y = \alpha \operatorname{sh} \beta x. \quad (9.13)$$

Тут α та β – коефіцієнти. Для визначення двох невідомих коефіцієнтів складають систему двох рівнянь. Для цього на заданій графічно характеристиці вибирають дві найбільш характерні точки, координати яких підставляють у рівняння (9.13). Отримують:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \alpha \operatorname{sh} \beta x_1 \\ y_2 &= \alpha \operatorname{sh} \beta x_2 \end{aligned} \right\}$$

Щоб визначити β необхідно розв'язати трансцендентне рівняння:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\operatorname{sh} \beta x_2}{\operatorname{sh} \beta x_1} \quad (9.14)$$

Цей розв'язок можна здійснити графічним способом. Тоді

$$\alpha = \frac{y_1}{\operatorname{sh} \beta x_1} = \frac{y_2}{\operatorname{sh} \beta x_2}.$$

Для розв'язання конкретних інженерних задач вибирають той чи інший метод апроксимації характеристик. Широко застосовують кусочно-аналітичне описання функції на окремих ділянках, наприклад у вигляді сукупності відрізків квадратичних чи кубічних парабол (метод параболічних чи кубічних сплайнів). Застосування стандартних програм ЕОМ дає можливість отримати аналітичне описання функцій з необхідною точністю.

9.2. Фізичні явища у нелінійних колах постійного та змінного струму

Кола з нелійними елементами відзначаються великою різноманітністю явищ, які в принципі не можуть виникати у лінійних колах. Власне, використання цих явищ дозволило розробити велику кількість пристроїв, призначених для перетворень електричних сигналів.

Перерахуємо деякі із найбільш відомих явищ, які мають місце у нелінійних колах.

Найуніверсальніша особливість електричного кола з нелійним елементом – виникнення сигналів різних частот при живленні кола від джерела синусоїдної ЕРС (чи струму) однієї частоти. Проілюструємо це явище графічно. Нехай ВАХ нелінійного елемента має вигляд, зображений на рис. 9.5, *а*, а напруга, прикладена до цього елемента, синусоїдна. Визначимо графічно форму струму через елемент, вважаючи, що елемент безінерційний. Розмістимо осі координат часових характеристик узгоджено з осями ВАХ. Вісь часу функцій $u(t)$ направимо вниз (рис. 9.5, *б*), осі системи координат для отримання характеристики $i(t)$ розмістимо праворуч від ВАХ (рис. 9.5, *в*). Виберемо довільний момент часу t_1 та відкладемо відповідну йому точку на осях t залежностей $u(t)$ та $i(t)$.

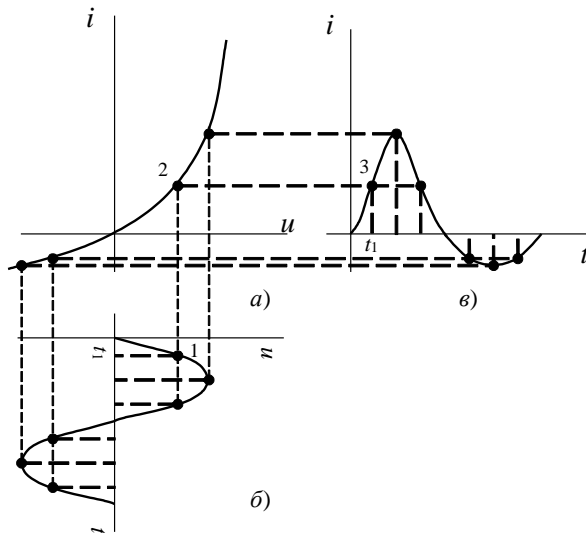


Рис. 9.5

Спроектуємо точку 1, що відповідає миттєвому значенню напруги u в момент t_1 , на графік ВАХ (точка 2) та проведемо горизонтальну пряму до перетину з перпендикуляром до осі t в точці t_1 графіка $i(t)$ (точка 3). Це буде перша точка, яка показує миттєве значення струму в момент часу t_1 . Аналогічно, вибравши інші моменти часу, перенесемо точки з графіка $u(t)$ в систему координат для $i(t)$ та отримаємо всю картину залежності струму від часу протягом усього періоду.

Очевидно, що струм являє собою періодичну несинусоїдну функцію, що містить у собі вищі гармоніки. Отже спектр вихідного сигналу містить у собі лінії, відсутні на вході нелінійного кола.

Із спектра частот струму можна виділити постійну складову та використовувати її як джерело постійного струму. На цьому принципі побудована робота випрямлячів.

Так само, виділивши зі спектра частот струму ті чи інші вищі гармоніки, можна використати їх, як джерело вищих частот. Цей підхід використовується при побудові схем помножників частоти.

При деяких умовах у нелінійному колі можуть виникнути так звані субгармонічні коливання, частоти яких у цілу кількість разів менші частоти прикладеного до кола синусоїдного сигналу.

Нелінійна характеристика елемента може забезпечити незмінність постійної напруги (чи амплітуди основної гармоніки) на одній із ділянок кола при значних змінах напруги джерела, тобто дає можливість побудувати стабілізатори напруги.

Сумісне використання джерел постійного та синусоїдного струму у колах з нелійними елементами дає можливість регулювати змінний струм. У нелінійних колах можна отримати змінний струм значної потужності за рахунок енергії джерел постійного струму, і навпаки, отримати потужний сигнал постійного струму за рахунок енергії змінного струму. На цьому побудовані різні підсилювачі сигналів.

Підключення декількох джерел синусоїдних коливань різних частот до нелінійного кола приводить до появи, крім гармонічних складових кожної з цих частот, ще ряду бокових частот – виникнення модульованих коливань.

Перехідні процеси у нелінійних колах часто використовують для формування різних імпульсів у пристроях автоматики та радіотехніки.

Існує клас автоколивальних нелінійних кіл, у яких виникають незгасаючі коливання при відсутності періодичного зовнішнього сигналу.

Нелінійні електричні кола часто мають декілька станів рівноваги. Деякі з цих станів можуть бути нестійкими – відповідні їм усталені режими існувати не можуть.

При плавній зміні амплітуди вхідного сигналу чи частоти (якщо діє періодичний сигнал) у нелінійних колах можуть відбуватися стрибкоподібні зміни напруг і струмів чи фаз і частоти у випадку періодичного режиму.

У складних нелінійних колах з багатьма елементами, при різних вхідних діях та різних початкових умовах може виникнути поєднання багатьох з перелічених особливостей.

9.3. Резистивні нелінійні елементи

Нелінійні резистивні елементи (НР) прийнято поділяти на дві великі групи: некеровані та керовані. Керовані нелінійні елементи, на відміну від некерованих, мають допоміжне коло – коло керування. Це коло дає можливість змінювати ВАХ основного кола. Тому керовані нелінійні елементи мають не одну вольт-амперну характеристику, а сімейство ВАХ.

До керованих НР належать напівпровідникові тріоди (транзистори), тріод-тиристри, триелектродні (і більше) лампи та ін.

До групи некерованих резистивних елементів належать лампи розжарювання, електрична дуга, баретер, термістор, стабіловольт, варистор, напівпровідникові діоди та ін. Вольт-амперні характеристики таких елементів можуть бути симетричними (коли $f(x) = -f(-x)$) чи несиметричними.

ВАХ баретера (рис. 9.6, а), електричної дуги з однаковими електродами (рис. 9.6, б), варистора (рис. 9.6, в), термістора (рис. 9.6, з), лампи розжарювання з вольфрамовою ниткою (рис. 9.6, д) симетричні.

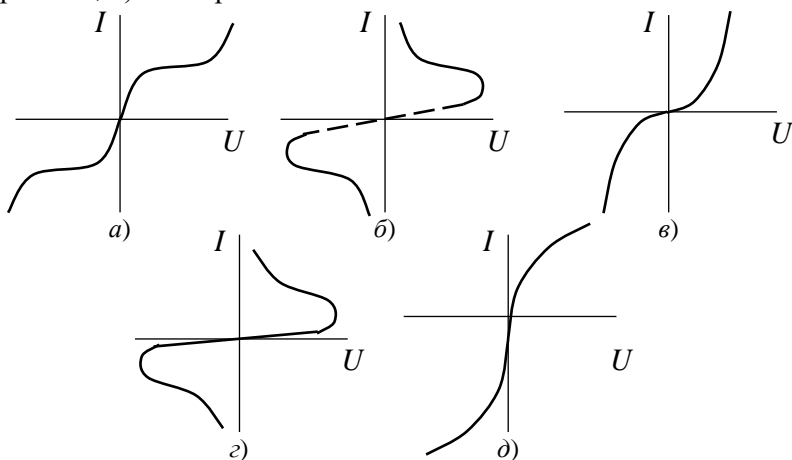


Рис. 9.6

Баретер – прилад у вигляді заповненого воднем скляного балона з тонкою сталюю спіраллю усередині. У межах деяких

значень напруг струм, що протікає через баретер, залишається незмінним. Це зумовлює застосування приладу для стабілізації струму.

Електрична дуга – це один з видів самостійного дугового розряду в газі. У проміжку між двома електродами газу та пари металів перебувають у іонізованому стані, створюючи плазмовий шнур. Якщо електроди розміщені горизонтально, то під дією висхідних потоків нагрітого розрядом газу цей шнур приймає форму дуги. Температура у розрядному проміжку при струмі величиною декілька амперів досягає майже 5000 °С, зростаючи у декілька разів при обдуванні проміжка потужним газовим потоком. ВАХ дуги – падаюча: зі зростанням струму напруга між електродами зменшується. При різномірних електродах вольт-амперна характеристика дуги несиметрична. Електрична дуга знаходить застосування у електрозварюванні, світлотехніці, електрометалургії. Для деяких галузей (наприклад, у техніці високих напруг) електрична дуга є шкідливим явищем, для боротьби з яким використовують спеціальні пристрої.

Варистор – напівпровідниковий прилад, виготовлений на основі суміші кристалічного карбїду кремнію з глиною. При протіканні струму відбувається локальне підвищення температури на границях кристалів карбїду, опір кристалів суттєво знижується, що приводить до зменшення загального опору варистора. Один з основних параметрів варистора – коефіцієнт нелінійності λ . Це відношення статичного опору варистора R_{cm} до динамічного R_o :

$$\lambda = \frac{R_{cm}}{R_o} \approx const.$$

Коефіцієнт нелінійності для різних типів варисторів лежить в межах від 2 до 6. Застосовують варистори для захисту пристроїв змінного струму від імпульсної перенапруги, для стабілізації та регулювання напруг та струмів і т. ін.

Термістор – різновид напівпровідникового терморезистора, опір якого залежить від температури. Матеріалом для виготовлення термісторів служать напівпровідники з електронною електропровідністю, в основному суміші окислів металів. ВАХ термістора має падаючу ділянку, де зі зростанням струму напруга

спадає. Опір термістора зменшується з температурою, цю залежність описують експоненційним законом:

$$R_m = Ke^{-\beta/T},$$

де K , β – коефіцієнти, що залежать від конструктивних особливостей термістора та концентрації домішок у напівпровіднику, T – абсолютна температура. Основний параметр – температурний коефіцієнт опору α :

$$\alpha = \frac{1}{R_m} \cdot \frac{dR_m}{dT},$$

який прийнято оцінювати, як зміну опору у відсотках при зміні температури на 1°C. Для термісторів $\alpha = -0,03 \dots -0,06$. Застосовують термістори у системах регулювання температури, теплового захисту, для вимірювання температури у широкому діапазоні і т. ін.

Найобширнішу та найбільш практично значиму групу некерованих НР складають **напівпровідникові діоди**. Ці нелінійні елементи мають несиметричну ВАХ.

Для виробництва напівпровідникових діодів використовують германій, кремній, арсенід галію та інші матеріали. Основним елементом діодів є електронно-дірковий перехід (p - n -перехід). Це зона, яка розділяє у напівпровідниковому кристалі області з провідностями двох типів: дірковою (p -тип) та електронною (n -тип).

Природа двох типів провідності, способи створення областей кристала з провідністю того чи іншого типів, фізичні процеси, які відбуваються у p - n -переході – усе це лежить за межами змісту нашого курсу. Ми будемо розглядати напівпровідникові прилади, як елементи електричного кола з нелінійними ВАХ, побіжно зупиняючись на деяких властивостях p - n -переходів.

Головна властивість p - n -переходу – здатність пропускати значний струм при прямому підключенні (позитивний полюс ЕРС – до p -області, негативний – до n -області) та мати великий опір при зворотному підключенні (“плюс” джерела – до n -області, “мінус” – до p -області). Ця властивість називається вентильним ефектом та

обумовлює широке застосування **випрямних** діодів для перетворення змінного струму у постійний.

Вище оборотного лавинного пробою p - n -переходу використовується у **кремнієвих стабілітронах**. При певних значеннях зворотної напруги ВАХ має вигляд прямої лінії, майже паралельної до осі струмів. Тому при зміні у широких межах струму спад напруги на стабілітроні U_{cm} практично не змінюється. Ця властивість кремнієвих діодів дозволяє використовувати їх для стабілізації напруги.

Як уже згадувалося вище, керовані нелінійні елементи, крім робочого кола, мають ще й коло керування. Тому це – нелінійні чотириполюсники. До цієї групи НР належать транзистори, тріодні тиристри, триелектродні (та більше) лампи.

Транзистором називають напівпровідниковий електроперетворювальний прилад з одним чи декількома p - n -переходами, трьома виводами та здатністю до підсилення потужності. Транзистори бувають біполярні та польові.

Біполярні транзистори мають три області з провідністю p - та n - типу, які чергуються. У відповідності з чергуванням областей з різними типами електропровідності транзистори розділяють на два класи: типу p - n - p та типу n - p - n (рис. 9.7, а, б).

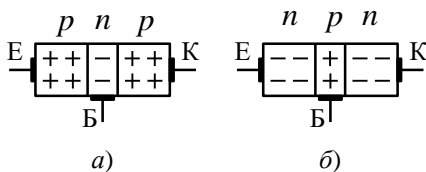


Рис. 9.7

Термін “біполярний” пов’язаний з тим, що такі транзистори мають носії зарядів двох типів – електрони та дірки.

Одна з крайніх областей транзистора називається емітером, друга – колектором, середня область – базою. Біполярний транзистор має, таким чином, два p - n переходи: емітер-база (емітерний перехід) та база-колектор (колекторний). Кожна з областей транзистора має виводи – електроди для підключення до кола. До емітерного p - n -переходу напруга підключається у

прямому напрямі, тому навіть при невеликих напругах через емітерний перехід протікає значний струм. На колекторний перехід подається напруга у зворотному напрямі, тобто у декілька разів більша, ніж на перехід емітер-база.

Розглянемо принцип дії транзистора на прикладі структури *p-n-p* типу. При підключенні до емітерного переходу прямої напруги, а до колекторного переходу – зворотної (“мінус” на колекторі), дірки інжектуються (упорскуються) з емітера у базу. Технологічно область бази створюється тоненькою і з невеликою кількістю електронів. Тому процес рекомбінації (взаємодії дірок з електронами) у базі незначний. Більша частина дірок пролітає базу і попадає у область колектора, створюючи колекторний струм.

Виходячи з принципу роботи біполярного транзистора, завжди струми транзистора зв’язані між собою співвідношенням:

$$I_e = I_b + I_k. \quad (9.15)$$

При цьому струм бази I_b складає, як правило (0,01 ... 0,05) I_e , тому часто приймають, що $I_e \approx I_k$.

9.4. Нелінійні індуктивні та ємнісні елементи

Раніше ми відмічали, що нелінійні індуктивності мають нелінійну вебер-амперну характеристику $\psi = f(i)$. Індуктивність електричного контура залежить від магнітних властивостей середовища, у якому розповсюджується магнітне поле. Нелінійність вебер-амперної характеристики обумовлена феромагнітними властивостями осердя котушки.

Нагадаємо відомі з курсу фізики основні величини, які характеризують магнітне поле та магнітні властивості речовин.

Електричний струм котушки i обумовлює магнітне поле. Для лінійної індуктивності зв’язок електричного струму з магнітним полем ми описували у першій частині посібника пропорційною залежністю:

$$\psi = L \cdot i,$$

де L – сталий коефіцієнт, названий індуктивністю.

Потокозчеплення ψ являє собою сумарний магнітний потік Φ котушки з кількістю витків w :

$$\psi = w \cdot \Phi .$$

Одиницею магнітного потоку є вебер ($\text{Вб} = \text{В} \cdot \text{с}$).

Магнітний потік Φ є однією з основних характеристик магнітного поля. Це інтегральна величина, яка визначається, як потік вектора магнітної індукції \vec{B} крізь деяку поверхню S :

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s} . \quad (9.16)$$

Лінії магнітної індукції неперервні, не мають ні початку, ні кінця, тобто:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 . \quad (9.17)$$

Вимірюється магнітна індукція в теслах ($\text{Тл} = \text{Вб} \cdot \text{м}^{-2}$).

Ще одна з найважливіших величин, які характеризують магнітне поле, – напруженість магнітного поля \vec{H} . Для лінійних середовищ:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} ,$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ – магнітна стала;

μ_r – відносна магнітна проникність.

Вимірюється напруженість магнітного поля в $\text{А} \cdot \text{м}^{-1}$.

У залежності від магнітних властивостей тверді тіла поділяються на діамагнетики, парамагнетики та феромагнетики. Відносна магнітна проникність діамагнетиків дещо менша одиниці, μ_r парамагнетиків трохи більша одиниці, а μ_r феромагнітних матеріалів багато більша одиниці і може досягати значень 10^5 . Крім того, намагніченість феромагнетиків зберігається і після виключення поля, причому залежність між B та H нелінійна і має вигляд петлі гістерезиса.

Феромагнітні властивості мають залізо, кобальт, нікель, гадоліній, диспрозій та велика кількість феромагнітних сплавів. Ці матеріали мають доменну структуру (рис. 9.8, а), тобто складаються з доменів – мікрообластей зі спонтанним намагніченням, яке може існувати і при відсутності зовнішнього магнітного поля. У межах домена спіни орієнтовані паралельно, створюють постійну та значну намагніченість. Найбільш типові лінійні розміри доменів – біля 10^{-5} м.

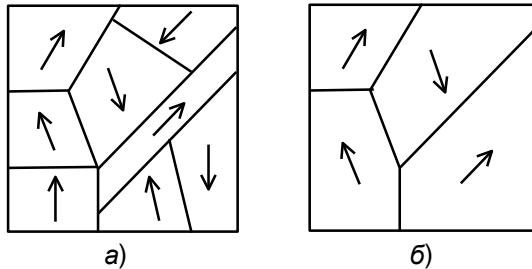


Рис. 9.8

Уявлення про доменну структуру дають можливість пояснити гістерезисну залежність B від H (рис. 9.9).

Якщо розмістити феромагнетик у зовнішнє магнітне поле, то при зростанні H від нуля стінки доменів починають зміщуватись, створюючи ненульову намагніченість та збільшуючи B (ділянка $0-A$ на рис. 9.9, а). Подальше зростання B обумовлене повертанням магнітних моментів доменів (рис. 9.8, б). У точці C_1 магнітні моменти усіх доменів орієнтовані вздовж H , і індукція досягає насичення. При зменшенні напруженості магнітного поля крива B не співпадає з початковою, тому що зміщення стінок частини доменів незворотне. Крива OC_1 називається початковою кривою намагнічування. Значення магнітної індукції, що відповідає зменшеній до нуля величині H , називається залишковою індукцією B_r .

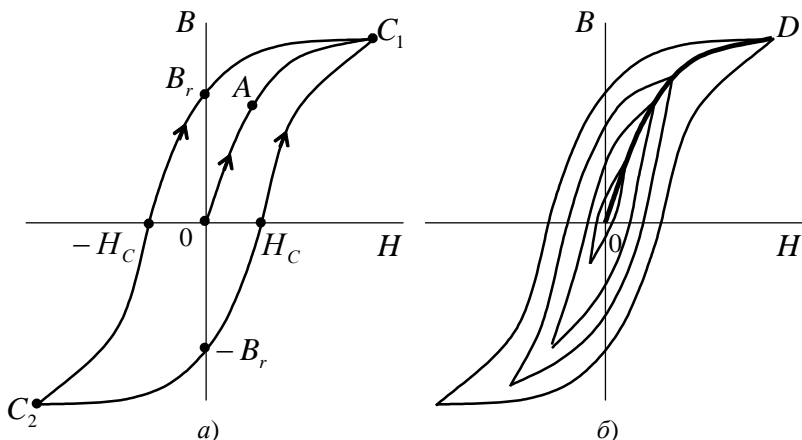


Рис. 9.9

Щоб звести до нуля індукцію B , необхідно змінити напрям напруженості поля H та довести її величину до значення $-H_C$, що називається коерцитивною силою. Зростання від'ємного значення H відповідно приводить до насичення магнітної індукції (точка C_2), що також прийняла від'ємне значення. Подальші зміни H завершують формування ділянки петлі гістерезиса з від'ємним значенням залишкової індукції $-B_r$ та коерцитивною силою H_C .

На рис. 9.9, б зображене сімейство петель гістерезиса, отриманих для різних значень максимальної напруженості магнітного поля. Крива $B = f(H)$, яка проведена через вершини симетричних гістерезисних петель, називається **основною кривою намагнічування**. Прийнято саме цю криву використовувати для оцінки магнітних властивостей феромагнітних матеріалів. У довідниках основна крива намагнічування для матеріалів, які використовуються у різноманітних пристроях, задається або у вигляді таблиць (див. Додаток 3), або у вигляді графіків (рис. 9.10).

Значення магнітної проникності матеріалів та залежність її від напруженості магнітного поля визначається за цією кривою.

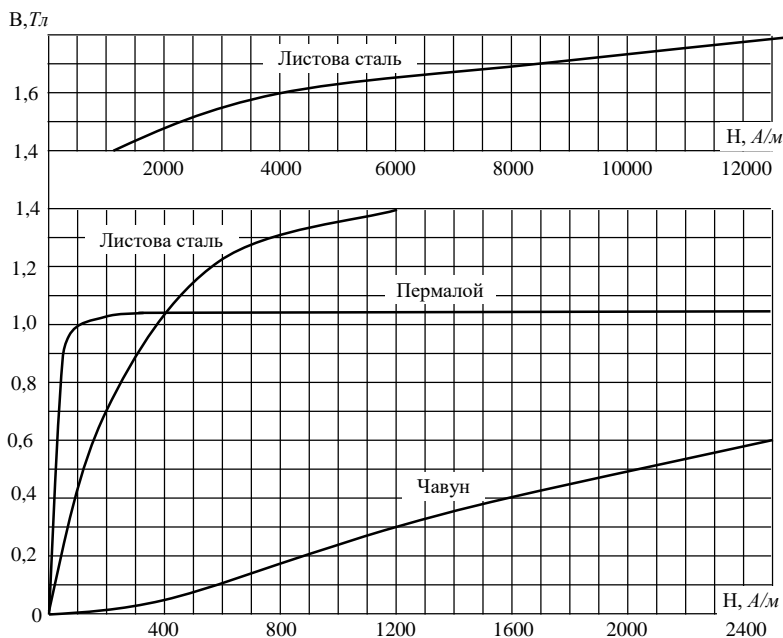


Рис. 9.10

У залежності від величини коерцитивної сили H_C феромагнітні матеріали прийнято поділяти на *магнітно-м'які* ($H_C < 0,05 \dots 0,01 \text{ A/m}$) та *магнітно-тверді* ($H_C > 20 \dots 30 \text{ кА/м}$). На рис. 9.11, а якісно співставлені гістерезисні петлі для магнітно-м'якого (1) та магнітно-твердого (2) матеріалів.

Магнітно-м'які матеріали мають дуже високі значення магнітної проникності. Вони застосовуються у пристроях, які працюють при слабких змінних магнітних полях (трансформаторах, індуктивних котушках, електричних генераторах чи двигунах і т.п.). До магнітно-м'яких матеріалів належать електротехнічні сталі, залізонікелеві сплави та ін. Наприклад, сплав, що містить 78,5% Ni (пермалой), має

максимальне значення магнітної проникності
 $\mu_r = 100000 \dots 200000$.

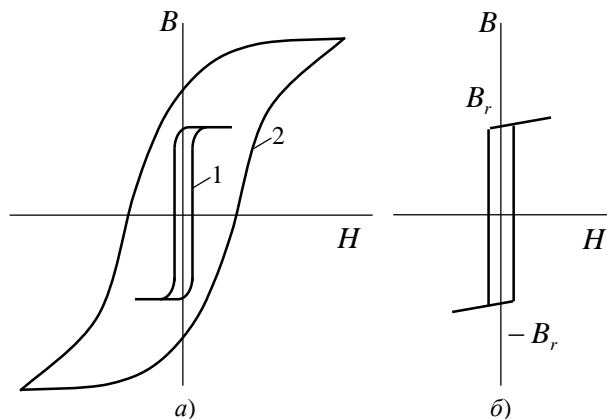


Рис. 9.11

Електротехнічні сталі у слабких полях мають величину μ_r у 15–20 разів меншу, ніж пермалой. Деякі магнітно-м'які матеріали мають петлю гістерезису, близьку по формі до прямокутної (рис. 9.11, б). Вони знаходять застосування у пристроях автоматики.

Петлі гістерезису деяких матеріалів настільки вузькі, що для розрахунків їх можна замінити основною кривою намагнічування.

Магнітно-тверді матеріали використовують для виготовлення постійних магнітів. Ці матеріали повинні мати високі значення залишкової індукції B_r та коерцитивної сили H_C . До цієї групи феромагнетиків належать вуглецеві сталі, сплав магніко (до нього входять Fe , Ni , Co , Al , Cu), сплави на основі вольфраму, платини, деяких рідкоземельних матеріалів та ін. Найпопулярніший з них, сплав магніко, має $B_r = 1,25 \text{ Тл}$ та $H_C = 44 \text{ кА/м}$.

Для роботи електромагнітних пристроїв на високих частотах осердя котушок та трансформаторів виготовляють із **феритів** та **магнітодіелектриків**.

Ферити виготовляють із суміші окислів заліза з окислами інших металів (Zn , Ni та ін.) по керамічній технології. Подрібнену суміш окислів формують та пресують, а потім випалюють при високих температурах ($800 \dots 1400^\circ C$). Отриманий твердий розчин має магнітну проникність від декількох сотень до тисяч, причому магнітні властивості залежать від складу матеріалу та технологічних факторів. За своїми електричними властивостями ферити належать до напівпровідників, їх об'ємний опір лежить у межах $1 \dots 10^7 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

Магнітодіелектрики виробляють, змішуючи дрібномелені порошки заліза, магнетита чи пермалоя з порошком діелектрика (найчастіше – полімерних матеріалів). Суміш пресують та випалюють. Феромагнітна основа забезпечує високе значення магнітної проникності, а ізолююча плівка, що огортає кожне зернятко, збільшує об'ємний опір. Це значно зменшує втрати у осердях на вихрові струми.

Нелінійна індуктивність має намотку, навиту на замкнуте феромагнітне осердя. У електричних схемах її зображують так, як показано на рис. 9.12, а або рис. 9.12, б. Низькочастотні котушки мають осердя пакетного або спірального типів.

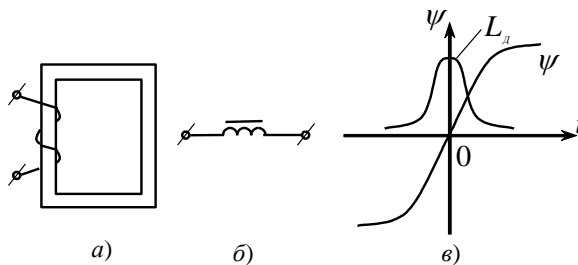


Рис. 9.12

Пакетні осердя складаються з тонких феромагнітних пластин кільцевої, П- чи Ш-подібної форми. Спіральні осердя виготовляють з тонкої феромагнітної стрічки. По формі вони схожі на тугу скручену годинникову пружину.

Пластини пакетують, а витки спірального осердя ізолюють одне від одного рідким діелектриком та запікають.

Вебер-амперна характеристика $\psi = \psi(i)$ котушки, навитої на замкнуте осердя, має форму, подібну до форми основної кривої

намагнічування. Справді, потокозчеплення ψ пропорційне B , струм i пропорційний до H . Індуктивність L_d такої котушки залежить від струму.

Якщо знехтувати гістерезисом, то залежності $\psi = \psi(i)$ та $L_d = L_d(i)$ будуть мати вигляд, приведений на рис. 9.12, в.

Часто приводять нелінійну вольт-амперну характеристику нелінійної індуктивності $U = U(I)$ (рис. 9.13),



Рис. 9.13

де U та I – діючі значення змінних напруги та струму.

Нагадаємо, що нелінійна індуктивність, як і будь-який нелінійний елемент, спотворює форму гармонічного сигналу. Тому, якщо до полюсів котушки прикладена синусоїдна напруга з діючим значенням U , то, враховуючи те, що форма кривої струму буде несинусоїдна, вживають для нелінійної вольт-амперної характеристика або діюче значення першої гармоніки струму, або ж діюче значення несинусоїдної функції струму.

Нелінійні котушки бувають некеровані та керовані. Керовані котушки мають додаткову обмотку, що живиться постійним струмом.

Для аналізу та розрахунку роботи електричних кіл з нелійними індуктивними елементами користуються схемами заміщення нелінійної котушки, при складанні яких необхідно врахувати усі енергетичні процеси у цьому елементі кола. Як і у випадку лінійної індуктивної котушки, схема заміщення нелінійної котушки повинна мати активну складову опору обмотки $R_{об}$. Для врахування того, що частина ліній магнітного потоку замикається не в магнітопроводі, а через повітря (рис. 9.14, а), у схему заміщення включають індуктивність

розсіювання L_p . При роботі нелінійної котушки частина енергії витрачається на нагрів матеріалу магнітопроводу, обумовлений вихровими струмами та гістерезисом.

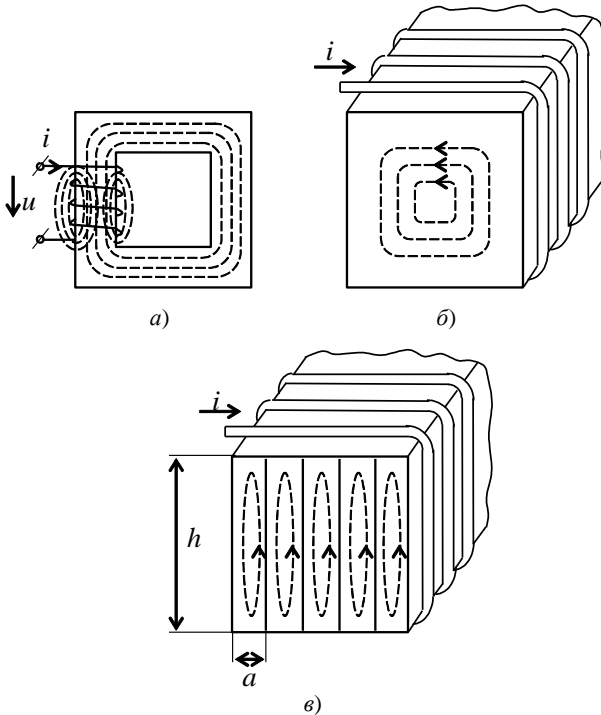


Рис. 9.14

Вихрові струми виникають у феромагнітному осерді під впливом електричного поля, яке наводиться у магнітопроводі змінним магнітним потоком. Згідно з правилом Ленца вихрові струми направлені так, щоб створене ними магнітне поле було орієнтоване зустрічно до поля зовнішнього. На рис. 9.14, б розподіл вихрових струмів у осерді схематично позначений стрілками.

Вихрові струми, по-перше, ослаблюють результуюче магнітне поле, внаслідок чого воно розподілене в товщі осердя нерівномірно. Найсуттєвіше екрануюча дія вихрових струмів

позначається у центральній частині осердя, оскільки вона оточена більшою кількістю ліній вихрових струмів. Зменшити нерівномірний розподіл магнітного поля у осерді можна, виготовляючи його у вигляді тонких пластин (рис. 9.14, в).

По-друге, вихрові струми приводять до втрат енергії на нагрівання осердя. Величина цих втрат залежить від квадрату наведеної у контурі ЕРС та опору контура. Електрорушійна сила при вибраній довжині листа h (рис. 9.14, в) пропорційна товщині листа a , амплітудному значенню магнітної індукції B_m та частоті змінного струму f . У свою чергу, опір контура, по якому замикаються вихрові струми, пропорційний периметру цього контура та питомому опору. Для тонких листів периметр контура майже не залежить від товщини. Тому витрати енергії на вихрові струми P_ϵ пропорційні квадрату амплітудного значення індукції, квадрату частоти f , квадрату товщини листа a та першій степені питомої провідності γ :

$$P_\epsilon \sim B_m^2 \cdot f^2 \cdot a^2 \cdot \gamma.$$

Для зменшення величини втрат на вихрові струми магнітопроводи, як уже відмічалось, виготовляють із тонких листів феромагнітних матеріалів, заізольованих один від одного захисною діелектричною плівкою.

На частоті 50 Гц товщина листів складає 0,35 ... 0,5 мм, на звукових частотах – близько 0,02 ... 0,05 мм. Щоб збільшити питомий опір феромагнітного матеріалу, у процесі його виробництва вводять різні домішки (присадки). Потужність втрат на вихрові струми часто підраховують за формулою:

$$P_\epsilon = \sigma_\epsilon \cdot f^2 \cdot B_m^2 \cdot G, \quad (9.18)$$

де σ_ϵ – коефіцієнт, що залежить від сорту сталі та розмірів листів;

G – маса магнітопроводу.

Крім втрат на вихрові струми, при намагнічуванні осердя спостерігають втрати енергії, обумовлені незворотними

доменними процесами (втрати на гістерезис P_2). Потужність цих втрат визначається за різними емпіричними формулами, наприклад:

$$P_2 = \sigma_2 \cdot f \cdot B_m^n \cdot G, \quad (9.19)$$

де σ_2 – коефіцієнт, що залежить від сорту сталі, $n = 1,6$ для значень магнітної індукції $0,1 \leq B_m \leq 1$ Тл та $n = 2$ при $1 \leq B_m \leq 1,6$ Тл.

Зростання втрат енергії у осерді з частотою (особливо – за рахунок вихрових струмів) унеможливорює використання електротехнічних сталей та магнітно-м'яких сплавів на високих частотах. Застосування феритів та магнітодіелектриків, тобто матеріалів з підвищеним значенням питомого опору, дає можливість зменшити P_6 .

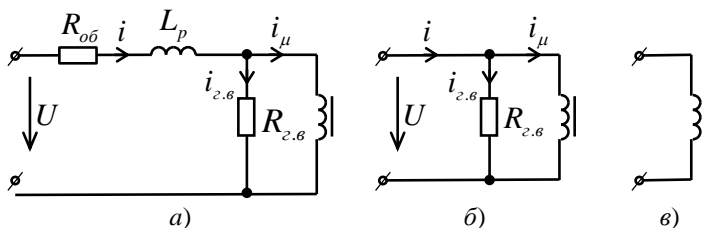


Рис. 9.15

Для врахування втрат на гістерезис та вихрові струми у схему заміщення нелінійної котушки паралельно до ідеалізованого індуктивного нелінійного елемента включають активний опір $R_{z.g}$.

Отже, усі приведені вище міркування дають можливість схему заміщення нелінійної індуктивності зобразити у вигляді, показаному на рис. 9.15, а. Для інженерних розрахунків цю схему часто спрощують. Так, якщо активний опір обмотки та індуктивність розсіювання настільки малі, що спадом напруг на них можна знехтувати, то R_{ob} і L_s із схеми заміщення виключають (рис. 9.15, б). Якщо осердя виготовлене з тонких листів високоякісного магнітно-м'якого матеріалу, то втрати у ньому малі, отже опір $R_{z.g}$ великий і у схемі заміщення його можна не враховувати. Врешті при цих допущеннях опір котушки виявляється чисто індуктивним (рис. 9.15, в).

Нелінійні ємнісні елементи характеризуються нелінійною залежністю ємнісної складової опору від величини електричного поля чи прикладеної напруги. До таких елементів належать вариконди, варикапи, керовані ємності різноманітних датчиків.

Вариконд – нелінійний конденсатор, який отримав свою назву від назви керамічних матеріалів, які використовуються, як діелектрик між обкладинками конденсатора.

Усі діелектрики мають здатність поляризуватися у електричному полі. Діелектрична проникність ε варикондів залежить від прикладеної напруги і може досягати досить великих значень (наприклад, для титанату барію вона складає біля 1000 при кімнатних температурах і слабких полях).

Варикапи – це напівпровідникові діоди, у яких використовується бар'єрна ємність p - n -переходу. Ця ємність C_0 залежить від напруги $U_{зв}$, прикладеної до діода при зворотному підключенні. Зі зростанням напруги область p - n -переходу, збіднена носіями заряду, розширюється, що приводить до зменшення ємності діоду.

9.5. Нелінійні електричні кола при постійному струмі

У колах постійного струму нелійними елементами можуть бути тільки резистивні елементи. Вітки з нелійними індуктивними елементами слід розглядати як ділянки закорочені ($R = 0$), вітки з ємнісними елементами на постійному струмі розімкнуті ($R = \infty$).

Процеси у нелінійних колах описуються законами Кірхгофа, які складаються за такими самими правилами, що і для лінійних кіл. Але, на відміну від лінійних кіл, для кіл з нелійними елементами ці рівняння будуть нелійними, і, зокрема, для кіл постійного струму – алгебричними. Як ми уже відмічали раніше, методи розв'язку цих рівнянь можуть бути аналітичними, графоаналітичними чи графічними.

Аналітичні методи доцільно застосовувати, коли вольт-амперні характеристики нелінійних елементів кола задаються аналітично, або ж можуть бути апроксимовані аналітичними функціями. Для розв'язку таких рівнянь застосовують ЕОМ, використовуючи спеціальні програми.

Розглянемо методи розрахунку простих нелінійних кіл з послідовним, паралельним та змішаним з'єднанням нелінійних резисторів (НР) та джерел ЕРС. До лінійної частини електричного кола можна застосувати всі перетворення, розглянуті у розділі 1. Із методів розрахунку, приведених у вказаному розділі, до розрахунку нелінійних кіл використовують: заміну декількох з'єднаних віток однією, еквівалентною; метод двох вузлів; метод еквівалентного генератора.

Практикується також заміна нелінійного резистора еквівалентним лінійним опором і ЕРС.

На рис. 9.16, а приведена схема послідовно з'єднаних лінійного резистора з опором R та НР, вольт-амперна характеристика 1 якого показана на рис. 9.16, б. Резистори підключені до постійної ЕРС E . Необхідно розрахувати струм у колі та розподіл напруг на резисторах.

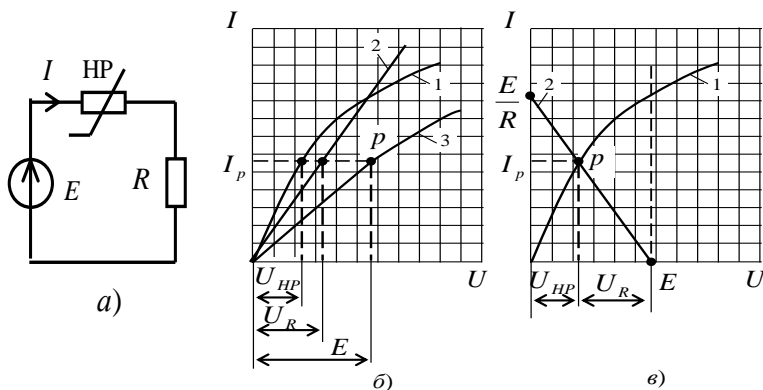


Рис. 9.16

Виконаємо розрахунок графічним методом, скориставшись другим законом Кірхгофа:

$$E = U_R + U_{HP}.$$

Побудуємо ВАХ для усього кола, виходячи з того, що при послідовному з'єднанні через обидва елементи протікає однаковий струм. Задаючись цим струмом у межах, визначених нелінійною ВАХ, проведемо пряму 2 – ВАХ лінійного резистора з опором R . Сумарну ВАХ (крива 3) отримаємо, складаючи напруги U_R та U_{HP} при різних значеннях струму I у колі. Відклавши по осі напруг значення ЕРС у колі E , отримаємо на сумарній ВАХ 3 точку розв'язку P , координата якої по осі струмів визначає числове значення струму у колі I_P . Використавши ВАХ 1 та ВАХ 2, знайдемо відповідні значення спадів напруг на елементах кола U_{HP} та U_R при значенні струму у колі I_P . Дійсно, для цих спадів напруг виконується другий закон Кірхгофа при знайденому значенні струму.

Часто для розв'язку таких задач застосовують дещо інший підхід. Проілюструємо його на прикладі цієї самої задачі. Так само, використовуємо задану ВАХ для нелінійного резистора (рис. 9.16, в, крива 1). Враховуючи те, що рівняння $IR + U_{HP} = E$ є рівнянням прямої, що у координатах I , U_{HP} проходить через точки: $I = E/R$, $U_{HP} = 0$ та $I = 0$, $E = U_{HP}$, проводимо цю пряму 2 на графіку ВАХ для НР. Точка перетину цієї прямої з кривою 2 визначає режим роботи кола. Справді, для цієї точки струм I_P , що протікає через НР та R , однаковий, а сума спадів напруг U_R та U_{HP} дорівнює ЕРС.

Аналогічним чином можна розраховувати кола з послідовним з'єднанням декількох НР. У цьому випадку доводиться будувати спочатку сумарну ВАХ двох НР, потім трьох і т.д.

При паралельному з'єднанні нелінійних резисторів (рис. 9.17, а) напруги на обох елементах однакові, а загальний струм дорівнює сумі струмів двох НР:

$$U_1 = U_2 = E ; I = I_1 + I_2 .$$

Вольт-амперні характеристики обох елементів зображені на рис. 9.17, б (криві 1 та 2). Щоб одержати результуючу вхідну

характеристику, необхідно поскладати ординати характеристик елементів, задаючись певними значеннями напруги (крива 3).

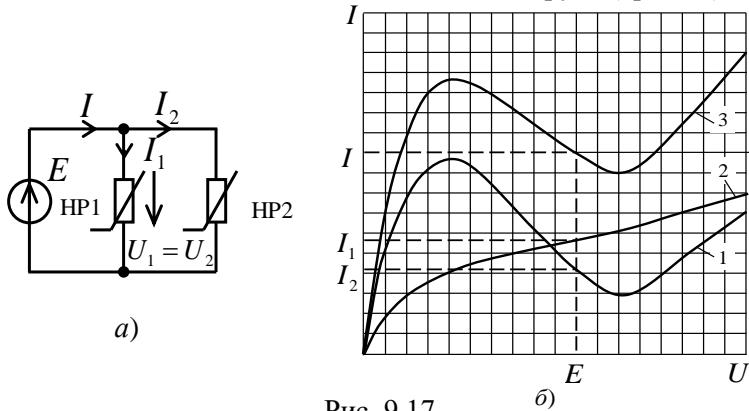


Рис. 9.17

Визначити значення усіх струмів у колі при підключенні його до певного значення ЕРС можна, відклавши по осі абсцис цю величину E та провівши вертикальну лінію з цієї точки до перетину з відповідними ВАХ.

Розглянуті нами міркування щодо розрахунку нелінійних кіл при послідовному та паралельному з'єднаннях нелінійних резисторів можна узагальнити для аналізу кіл ланцюгової конфігурації, тобто послідовно-паралельних кіл з одним джерелом енергії.

Так, наприклад, для кола, схема якого показана на рис. 9.18, допоміжні побудови необхідно розпочинати з правого кінця кола. Спочатку необхідно знайти спільну характеристику двох послідовних елементів $HP5$ та $HP6$, потім визначити характеристику для вітки $HP5-6$ та вітки з $HP4$, з'єднаних паралельно і т.д.

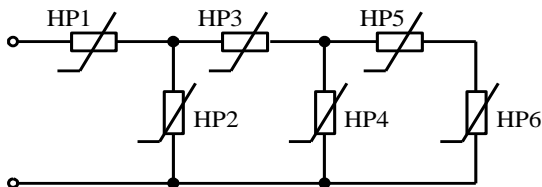


Рис. 9.18

Такий метод розрахунку відомий під назвою методу перетворення схем і може застосовуватися, зокрема, для визначення графічним методом вхідних та передатних характеристик нелінійних кіл.

9.6. Нелінійні магнітні кола при постійних потоках

Магнітним колом називають сукупність котушок із осерддями з феромагнітного матеріалу, призначену для створення магнітного потоку.

Такі магнітні кола є складовими частинами різноманітних електротехнічних пристроїв (реле, електричні машини, вимірювальні прилади та ін.).

Магнітне поле з постійним магнітним потоком Φ створюється у магнітних колах котушками з постійним струмом чи постійним магнітом. Магнітопровід призначений для підсилення магнітного потоку та його концентрації у об'ємі, зайнятому феромагнітним осерддям.

Різновид магнітного кола задається конфігурацією магнітопроводу. На рис. 9.19 приведені типові форми магнітопроводів. Найпростіше одноконтурне магнітне коло однорідне, має однакову площу перерізу (рис. 9.19, а) та магнітну проникність на усіх ділянках. Одноконтурне коло, показане на рис. 9.19, б, складається з ділянок, що мають різну площу перерізу та магнітну проникність, а магнітне коло, зображене на рис. 9.19, в, є розгалуженим, має три вітки та два вузли. Довжина магнітних ліній ділянок кола визначається по довжині середньої лінії у стержнях магнітопроводу.

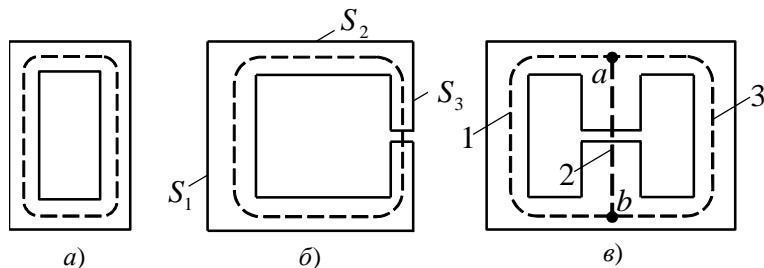


Рис. 9.19

Магнітний потік Φ у магнітному колі створюється **магніторушійною силою** (МРС) F котушки зі струмом. МРС обмотки зі струмом – це добуток числа витків w котушки на струм I , який протікає у обмотці:

$$F = I \cdot w \quad (9.20)$$

Вимірюється МРС у амперах.

Магніторушійна сила – величина направлена, її додатний напрям позначають на схемі стрілкою. Напрямок МРС зв'язаний з напрямом струму у котушці правилом правого гвинта (додатний напрям МРС співпадає з рухом вістря правого гвинта, якщо повертати гвинт за напрямом струму (рис. 9.20)). Зручно для визначення напрямку МРС користуватися мнемонічним правилом: якщо подумки покласти на осердя праву руку так, щоб пальці її розмістилися за напрямом струму у котушці, то відігнутий великий палець вкаже напрям МРС.

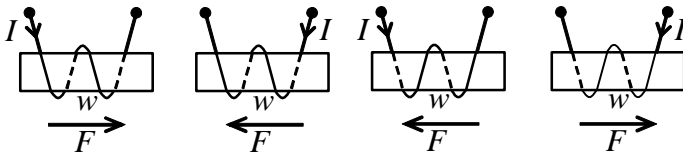


Рис. 9.20

Між магнітними та електричними колами можна відмітити формальну аналогію, використавши, як аналоги, такі пари величин:

- електричний струм – магнітний потік;
- електрорушійна сила – магніторушійна сила;
- електрична напруга – магнітна напруга;
- електричний опір – магнітний опір.

Спадом магнітної напруги між точками a та b магнітного кола називають лінійний інтеграл від напруженості магнітного поля між цими точками:

$$U_{M_{ab}} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}. \quad (9.21)$$

Якщо на цій ділянці \vec{H} – величина постійна і співпадає за напрямом з елементом шляху, то:

$$U_{M_{ab}} = H \cdot l_{ab}, \quad (9.22)$$

де l_{ab} – довжина шляху між точками a та b .

Вимірюється спад магнітної напруги у амперах.

Основні закони магнітних кіл – це аналоги законів Ома та Кірхгофа для резистивних електричних кіл.

Перший закон Кірхгофа: алгебрична сума магнітних потоків у вузлі магнітного кола дорівнює нулю:

$$\sum \Phi_k = 0. \quad (9.23)$$

Цей закон випливає із відомого з курсу фізики принципу безперервності магнітного потоку:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = 0,$$

і може бути сформульований і таким чином: магнітний потік, який пронизує будь-яку замкнуту поверхню, дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа: у замкнутому контурі магнітного кола алгебрична сума спадів магнітної напруги дорівнює алгебричній сумі МРС цього контура:

$$\sum U_{M_k} = \sum I_k w_k \quad (9.24)$$

Другий закон Кірхгофа є, по суті, іншою формою запису відомого з курсу фізики емпіричного закону повного струму: лінійний інтеграл від вектора напруженості магнітного поля \vec{H} вздовж будь-якого довільного контура дорівнює алгебричній сумі струмів, охоплених цим контуром:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (9.25)$$

Перед тим, як записувати рівняння законів Кірхгофа для магнітного кола, необхідно, як і у випадку кола електричного, довільно вказати додатні напрями потоків у вітках та довільно вибрати додатні напрями обходів контурів. Якщо напрям магнітного потоку на певній ділянці кола співпадає з додатним напрямом обходу контура, то спад магнітної напруги записується

у рівнянні другого закону Кірхгофа зі знаком “плюс”. Якщо напрям магніторушійної сили на ділянці кола співпадає з додатним напрямом обходу контура, то ця МРС записується у рівнянні (9.24) зі знаком “плюс”.

Складемо, для прикладу, рівняння законів Кірхгофа для магнітного кола, показаного на рис. 9.21.

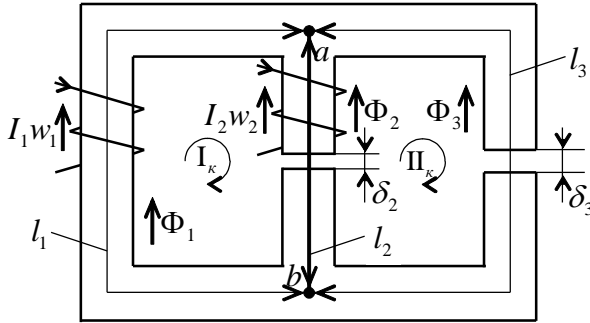


Рис. 9.21

Позначимо довільно напрями потоків у колі, прийнявши за першу вітку лівий стержень осердя, за другу – середній, за третю вітку – правий стержень. Відповідно позначимо довжини цих ділянок кола (по середніх лініях у осерді) через l_1 , l_2 , l_3 , довжини повітряних зазорів у стержнях позначимо, як δ_2 та δ_3 .

Коло має два вузли, тому за першим законом Кірхгофа, маємо скласти одне рівняння:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \quad (9.26)$$

Виберемо додатний напрям обходу у обох незалежних контурах за годинниковою стрілкою та запишемо рівняння другого закону Кірхгофа. Для лівого контура:

$$H_1 l_1 - H_2 l_2 - H_{\delta_2} \delta_2 = I_1 w_1 - I_2 w_2. \quad (9.27)$$

У цьому рівнянні H_{δ_2} – напруженість магнітного поля у повітряному зазорі другого стержня. Складова $H_1 l_1$ увійшла у рівняння зі знаком “плюс”, оскільки напрям магнітного потоку Φ_1

співпадає з напрямом обходу контура, складові $H_2 l_2$ та $H_{\delta_2} \delta_2$ записані зі знаком “мінус”, тому що напрям потоку Φ_2 зустрічний напрямку обходу першого контура.

Для правого контура з аналогічних міркувань запишемо:

$$H_2 l_2 + H_{\delta_2} \delta_2 - H_3 l_3 - H_{\delta_3} \delta_3 = I_2 w_2. \quad (9.28)$$

Отримаємо **закон Ома** для магнітного кола. Магнітний потік у нерозгалуженому однорідному магнітному колі (рис. 9.22):

$$\Phi = B \cdot s.$$

З врахуванням того, що $B = \mu H$, а $H = Iw/l$ (із закону повного струму), маємо закон Ома:

$$\Phi = \mu H s = \mu s \frac{Iw}{l} = \frac{F}{R_m}, \quad (9.29)$$

де $R_m = \frac{l}{\mu s}$ – **магнітний опір кола**, l – довжина середньої лінії осердя, s – площа перерізу, μ – абсолютна магнітна проникність.

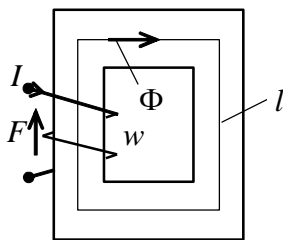


Рис. 9.22

Розмірність магнітного опору $[R_m] = \Gamma H^{-1}$.

Як витікає із формули, магнітний опір феромагнітних матеріалів з високим значенням магнітної проникності набагато менший опору такої самої за розмірами ділянки магнітного кола без феромагнетика. Тому, наприклад, сталь створює для магнітного потоку шлях з магнітним опором, значно менший опору повітря, і магнітний потік, що замикається через стальне

осердя, набагато більше того потоку, що замикається (розсіюється) по повітряю. Цей ефект особливо суттєвий, якщо феромагнетик не насичений.

Розглянемо на конкретному прикладі вплив матеріалу осердя на величину магнітного потоку у колі.

Приклад 9.1

Магнітний потік у осерді (рис. 9.23, а) створюється котушкою зі струмом $I = 1 \text{ A}$ та кількістю витків $w = 200$. Радіус середньої магнітної лінії осердя $R = 10 \text{ см}$, площа перерізу $S = 2 \text{ см}^2$. Розрахувати магнітний потік у колі для двох випадків: матеріалом магнітопроводу служить дерево; осердя виготовлене із феромагнітного матеріалу, крива намагнічування кого показана на рис. 9.23, б.

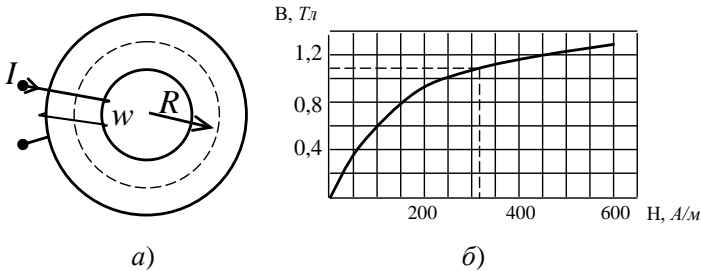


Рис. 9.23

Розв'язок.

Напруженість магнітного поля H однакова для обох випадків і може бути визначена із закону повного струму:

$$H \cdot 2\pi R = Iw.$$

Підставивши числові значення, маємо:

$$H = \frac{Iw}{2\pi R} = \frac{1 \cdot 200}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,1} = 318 \text{ A/m}.$$

Для дерев'яного осердя відносна магнітна проникність $\mu = 1$. Магнітний потік у осерді для цього випадку:

$$\Phi_{\delta} = B \cdot s = \mu_0 \mu H s = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 318 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}.$$

Визначимо величину магнітної індукції у феромагнітному осерді при $H = 318 \text{ А/м}$ із кривої намагнічування: $B = 1,08 \text{ Тл}$. Тоді магнітний потік у цьому магнітопроводі:

$$\Phi_{\phi} = B \cdot s = 1,08 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 21,6 \cdot 10^{-5} \text{ Вб.}$$

Таким чином, **потік у феромагнітному осерді у 2700 разів більший, ніж у неферомагнітному.**

Вебер-амперною характеристикою називають залежність магнітного потоку на ділянці магнітного кола від спаду магнітної напруги на цій ділянці: $\Phi = f(U_M)$. При розрахунках магнітних кіл вона відіграє таку саму важливу роль, як і вольт-амперна характеристика при розрахунках нелінійних електричних кіл.

На відміну від ВАХ нелінійних електричних елементів, які, як правило, задаються для розрахунку електричних кіл, вебер-амперні характеристики для розв'язку задач необхідно будувати, використовуючи нелінійні характеристики матеріалу магнітопроводу.

Розглянемо ділянку AB магнітного кола (рис. 9.24). Дві частини ділянки (довжиною l_1 та l_2 , і площею перерізу s) виконані із феромагнітного матеріалу, крива намагнічування якого задана у вигляді графіка $B = f(H)$ чи таблиці. Третя частина ділянки AB – повітряний проміжок (зазор) довжиною δ . Припустимо, що на ділянках кола магнітний потік однаковий, а площа перерізу повітряного зазору також дорівнює s (насправді ця площа дещо більша за рахунок випуклості силових ліній у зазорі). Спад магнітної напруги:

$$U_{M_{AB}} = U_1 + U_2 + U_{\delta},$$

де U_1 та U_2 – магнітні напруги на нелінійних ділянках кола;

U_{δ} – спад магнітної напруги на зазорі.

Задаємося значенням магнітної індукції B та визначаємо за кривою намагнічування значення напруженості магнітного поля H у матеріалі осердя. Для повітряного зазору зв'язок між B та H лінійний:

$$H_{\delta} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{1,257 \cdot 10^{-6}} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

Для вибраного значення B підрахуємо магнітний потік $\Phi = B \cdot s$ та обчислюємо спад магнітної напруги:

$$U_{\text{м}AB} = H \cdot l_1 + H \cdot l_2 + H_{\delta} \cdot \delta.$$

Провівши аналогічні підрахунки для декількох значень магнітної індукції, отримаємо точки для побудови вебер-амперної характеристики $\Phi = f(U_{\text{м}AB})$.

Приклад 9.2.

Побудувати вебер-амперну характеристику для ділянки магнітного кола, показаної на рис. 9.24, а. Матеріал магнітопроводу має криву намагнічування, яка задається табл. 9.1. Розміри магнітопроводу: $l_1 = 10 \text{ см}$; $l_2 = 15 \text{ см}$; $s = 5 \text{ см}^2$. Виконати розрахунки для двох випадків: а) $\delta = 0 \text{ см}$; б) $\delta = 0,05 \text{ см}$.

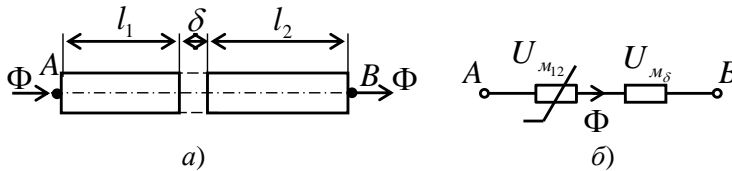


Рис. 9.24

Таблиця 9.1

| | | | | | | | | |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $B, \text{Тл}$ | 0,22 | 0,75 | 0,93 | 1,02 | 1,14 | 1,28 | 1,47 | 1,60 |
| $H, \text{А/м}$ | 20 | 40 | 60 | 80 | 120 | 200 | 400 | 1200 |

Розв'язок.

Задаємося значенням магнітної індукції $B = 0,22 \text{ Тл}$.
Магнітний потік:

$$\Phi = B \cdot s = 0,22 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 11 \cdot 10^{-5} \text{ Вб.}$$

Напруженість магнітного поля у феромагнітному матеріалі, згідно з табл. 9.1:

$$H_1 = H_2 = 20 \text{ А/м.}$$

Для повітряного зазору:

$$H_{\delta} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 0,22 = 1,76 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

Спад магнітної напруги на ділянці AB при $\delta = 0$:

$$U_{M_{AB}} = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 = 20 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,15 = 5 \text{ А.}$$

При $\delta = 0,05 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ отримуємо:

$$U_{M_{AB}} = H \cdot l_1 + H \cdot l_2 + H_{\delta} \cdot \delta = 5 + 1,76 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 93 \text{ А.}$$

Проведемо аналогічні підрахунки для інших значень магнітної індукції та занесемо результати до табл. 9.2.

Таблиця 9.2

| $B, \text{Тл}$ | $\Phi, \text{Вб} \cdot 10^{-5}$ | $H_1 = H_2, \text{А/м}$ | $H_{\delta}, \text{А/м} \cdot 10^5$ | $U_{M_{AB}}, \text{А при } \delta, \text{см}$ | |
|----------------|---------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|------|
| | | | | 0 | 0,05 |
| 0,22 | 11 | 20 | 1,76 | 5 | 93 |
| 0,75 | 37,5 | 40 | 6 | 10 | 310 |
| 0,93 | 46,5 | 60 | 7,44 | 15 | 387 |
| 1,02 | 51 | 80 | 8,16 | 20 | 428 |
| 1,14 | 57 | 120 | 9,12 | 30 | 486 |
| 1,28 | 64 | 200 | 10,24 | 50 | 562 |
| 1,47 | 73,5 | 400 | 11,76 | 100 | 688 |
| 1,60 | 80 | 1200 | 12,8 | 300 | 940 |

Вебер-амперні характеристики, побудовані за результатами підрахунків, приведені на рис. 9.25.

Із приведених характеристик видно, що **присутність повітряного зазору на ділянці магнітного кола приводить до спрямлення характеристики $\Phi = f(U_M)$, зменшення нелінійності.**

Повітряні зазори завжди присутні у магнітних колах пристроїв, побудованих на електромеханічній дії магнітного кола (електромагніти, електромеханічні реле, електричні машини, вимірювальні механізми приладів і т. ін.).

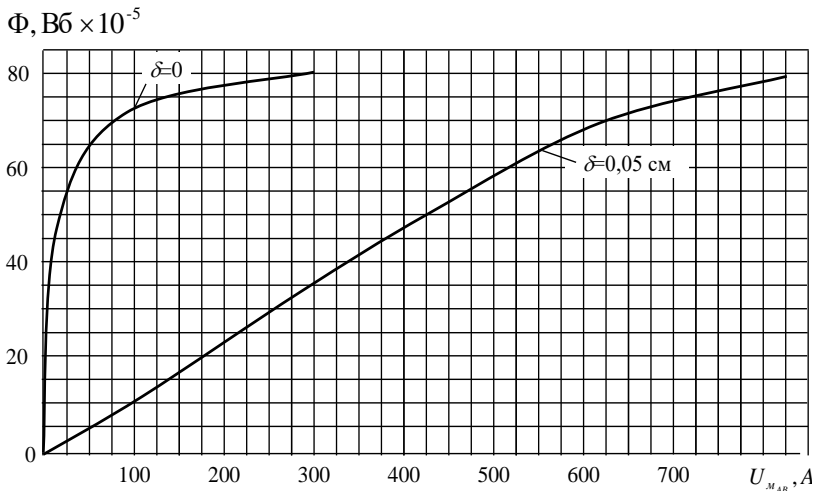


Рис. 9.25

9.7. Нелінійні електричні кола змінного струму

У колах змінного струму нелінійними можуть бути резистивні, індуктивні та ємнісні елементи. Загальна характеристика цих елементів та можливості їх практичного застосування уже розглядалися нами раніше. Аналізуючи детальніше поведінку нелінійних елементів у колах змінного струму, необхідно, перш за все, визначитися з типом нелінійних характеристик. Нагадаємо про універсальну здатність нелінійних елементів спотворювати форму гармонічних сигналів (див. рис. 9.5). Тому коли у залежностях $u(i)$, $\psi(i)$, $q(u)$ вхідна дія (струм i чи напруга u) синусоїдна, то реакція кола (напруга, потокозчеплення, заряд) будуть мати несинусоїдну форму, що створює певні проблеми для математичного описання процесів.

При аналізі та розрахунках роботи нелінійних кіл змінного струму використовують різні типи характеристик одного і того самого елемента:

- характеристики для миттєвих значень;
- характеристики для перших гармонік струмів та напруг;
- характеристики для діючих значень.

Характеристики для миттєвих значень (вольт-амперні, вебер-амперні, кулон-вольтні) є основними характеристиками для нелінійних елементів. Їх використання дає можливість за допомогою нескладних графічних побудов досить просто отримати форму однієї з величин, що описують роботу НЕ, якщо відомий закон зміни у часі другої величини.

Характеристики для миттєвих значень використовуються у напівпровідниковій електроніці при аналізі роботи випрямлячів, підсилювачів і т. ін.

Проаналізуємо, наприклад, роботу однонапівперіодного випрямляча (рис. 9.26, а), вважаючи діод ідеальним вентилям (рис. 9.26, б), що має нульове значення опору при прямому підключенні та нескінченно великий опір при зворотному підключенні.

При значеннях синусоїдної напруги u_2 на вторинній обмотці трансформатора у межах фази $0 < \omega t < \pi$ реалізується пряме підключення вентиля, струм у колі визначається як $i = u/R_n$, тобто теж має синусоїдну форму. При значеннях фази $\pi < \omega t < 2\pi$ діод закривається, тому струм $i = 0$. Отже, при синусоїдній нарузі на вході схеми струм має пульсуючу форму.

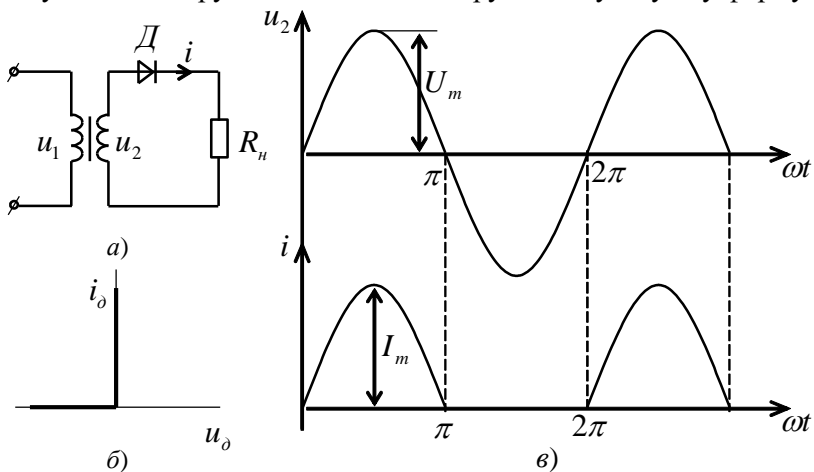


Рис. 9.26

З допомогою характеристик для миттєвих значень часто аналізують процеси у колах з нелінійною котушкою. Нехай вебер-амперна характеристика індуктивності зі стальним осердям має вигляд петлі гістерезису. Якщо до полюсів котушки підключити синусоїдну напругу $u = U_m \sin \omega t$, то магнітний потік у осерді буде також мати синусоїдну форму. Справді, напруга на котушці:

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{w} \int u_L dt = \frac{i}{\omega w} U_m \sin(\omega t - 90^\circ) = \\ &= \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ) \end{aligned} \quad (9.30)$$

На рис. 9.27 виконані графічні побудови для визначення форми струму у котушці при магнітному потоці синусоїдної форми $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$. Для кожного моменту часу (t_0, t_1, t_2, t_3 і т. д.) по петлі гістерезису визначені значення струму, що відповідають значенням магнітного потоку у даний момент часу. При зростанні магнітного потоку використана ділянка ab петлі гістерезису, при спаданні – ділянка bc . Послідовність графічних побудов вказана на рис. 9.27 стрілками. Видно, що форма кривої струму через котушку – несинусоїдна, симетрична відносно осі абсцис, і, як наслідок, не має парних гармонік.

Вольт-амперні характеристики для перших гармонік струмів та напруг – це графічний чи аналітичний зв'язок між амплітудою (або діючим значенням) прикладеної синусоїдної напруги та амплітудою (або діючим значенням) першої гармоніки несинусоїдного струму через нелінійний елемент. Якщо ж через НЕ пропускається синусоїдний струм, то ВАХ для перших гармонік – це зв'язок між амплітудою (або діючим значенням) цього синусоїдного струму та амплітудою (чи діючим значенням) першої гармоніки несинусоїдної напруги на НЕ.

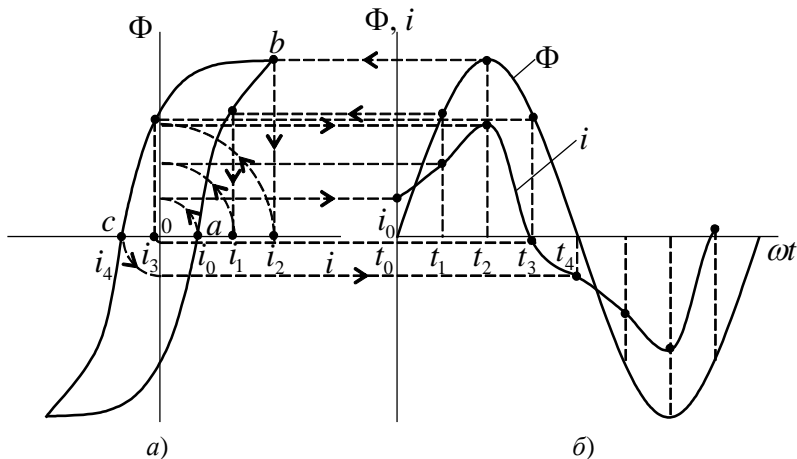


Рис. 9.27

Одержують ВАХ для перших гармонік експериментально або аналітично. У останньому випадку несинусоїдну функцію необхідно розкласти у ряд Фур'є та визначити амплітуду першої гармоніки. Вищі гармоніки несинусоїдного сигналу у цьому випадку не враховуються, що обумовлює певну похибку розрахунків. Проте для аналізу електричних кіл з нелінійними реактивними елементами ВАХ для перших гармонік застосовують. Справді, виходячи з елементів симетрії несинусоїдних реакцій кола, можна зробити висновок, що ряд Фур'є у цьому випадку має тільки непарні гармоніки: 1-шу, 3-тю і т.д. Якщо, наприклад, діюче значення третьої гармоніки складає навіть 50% від діючого значення першої гармоніки, то діюче значення несинусоїдної функції у цьому випадку:

$$I = \sqrt{I^{(1)2} + I^{(3)2}} = \sqrt{I^{(1)2} + (0,5I^{(1)})^2} = 1,12I^{(1)},$$

тобто похибка складатиме лише 12%.

Вольт-амперні характеристики для діючих значень – це залежність між діючим значенням синусоїдного вхідного сигналу та діючим значенням несинусоїдної функції – реакції на вхідну

дію. Діюче значення так званої еквівалентної синусоїди розраховується, як показувалося у розділі 5, за співвідношенням:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{F^{(0)2} + F^{(1)2} + F^{(2)2} + \dots}$$

Експериментально ВАХ для діючих значень отримати можна досить просто, оскільки вимірювальні прилади змінного струму градуйовані, як правило, у діючих значеннях.

Використання ВАХ для еквівалентних синусоїд (чи то для перших гармонік, чи то для діючих значень) дає можливість записувати рівняння нелінійних кіл у комплексній формі та використовувати для аналізу векторні діаграми.

Приведені типи характеристик нелінійних елементів використовуються, у залежності від поставленої проблеми, для розрахунку нелінійних кіл графічними чи аналітичними методами.

Характеристики для діючих значень використовують для аналізу схем заміщення нелінійної індуктивності. Застосування еквівалентних синусоїд дає можливість залучати до аналізу комплексний метод розрахунку та використовувати векторні діаграми.

Схему заміщення нелінійної індуктивності ми розглядали раніше (див. Розділ 9.4), коли моделювали відповідними елементами втрати енергії, які мають місце у котушці з феромагнітним осердям. Ця схема має вигляд, показаний на рис. 9.28, а.

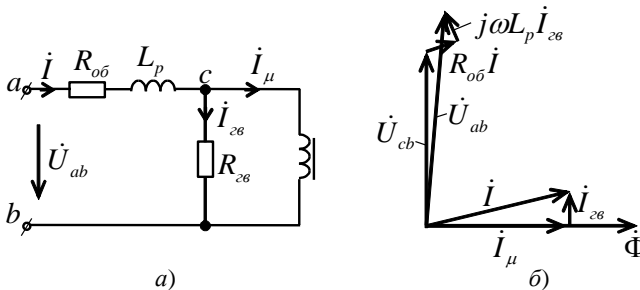


Рис. 9.28

У цій схемі $R_{об}$ – активний опір намотки, L_p – індуктивність розсіювання, яка моделює витрати магнітного потоку у повітрі, $R_{зв}$ – активний опір, за допомогою якого враховують втрати активної потужності у осерді, обумовлені перемагнічуванням (втрати на гістерезис) та виникненням вихрових струмів.

При підключенні котушки до синусоїдної напруги:

$$u_{ab} = U_m \sin \omega t$$

магнітний потік Φ , який пронизує w витків котушки, також змінюється по синусоїдному закону.

Оскільки:

$$u_{ab} = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d(w\Phi)}{dt} = w \frac{d\Phi}{dt},$$

то

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{w} \int u_{ab} dt = \frac{1}{w} \int U_m \sin \omega t dt = \\ &= \frac{U_m}{w\omega} \sin(\omega t - 90^\circ) = \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ). \end{aligned}$$

Оскільки вебер-амперна характеристика котушки нелінійна, то при синусоїдній формі потоку електричний струм буде несинусоїдним. Визначивши діюче значення цього струму, замінюють несинусоїдний струм гармонічним з таким самим діючим значенням.

Рівняння для схеми заміщення котушки у комплексній формі можна записати так:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_\mu + \dot{I}_{зв}, \\ \dot{U}_{ab} &= \dot{I}R_{об} + j\omega L_p \dot{I} + j\omega w\Phi. \end{aligned} \tag{9.31}$$

Побудову векторної діаграми починають з вектора магнітного потоку $\dot{\Phi}$ (рис. 9.28, б). Напряга $\dot{U}_{cb} = j\omega w\Phi$ випереджає потік на 90° . Активна складова струму $\dot{I}_{зв}$ співпадає за фазою з напругою \dot{U}_{cb} , струм намагнічування \dot{I}_μ відстає від напруги \dot{U}_{cb} на 90° . Реальний струм через котушку, згідно з (9.31) – векторна сума струмів втрати та намагнічування. Далі будують вектори напруг:

напруга на активному опорі $R_{об}$ співпадає за фазою зі струмом \dot{I} , напруга на індуктивності розсіювання випереджає струм на 90° . Склавши вектори трьох напруг, отримують вхідну напругу \dot{U}_{ab} .

Векторна діаграма за приведеним способом може бути побудована, коли відомі величини струмів I_{ze} , I_μ та напруг U_{ab} чи U_{cb} . Для визначення складових I_{ze} та I_μ використовують реальні характеристики магнітопроводу. Струм втрат I_{ze} залежить від потужності втрат у феромагнітному матеріалі. Ці втрати нормуються стандартами і наводяться у довідниках. Струм намагнічування I_μ може бути визначений із закону повного струму. Втрати напруги на ділянці $R_{об}$, L_p можуть бути незначними, тоді вважають що $\dot{U}_{ab} \approx \dot{U}_{cb}$. У протилежному разі необхідні додаткові дослідження залежності між цими напругами.

У коливальних контурах, до складу яких входить один з нелінійних реактивних елементів, можуть виникати резонансні режими, особливості яких принципово неможливі у контурах з лінійними реактивними елементами.

Розглянемо ці режими, користуючись поняттями діючих значень еквівалентних синусоїдних функцій для описання вольт-амперної характеристики нелінійної індуктивності. Крім того, припустимо, що котушка не має втрат, тобто зсув фаз між струмом та напругою $\varphi = 90^\circ$.

На рис. 9.29, а приведена схема послідовного коливального контура, до складу якого входить лінійний резистор з опором R , лінійний конденсатор з ємністю C та нелінійна котушка індуктивності. Вольт-амперні характеристики для діючих значень цих елементів приведені на рис. 9.29, в (прямі 1, 2 та крива 3 відповідно).

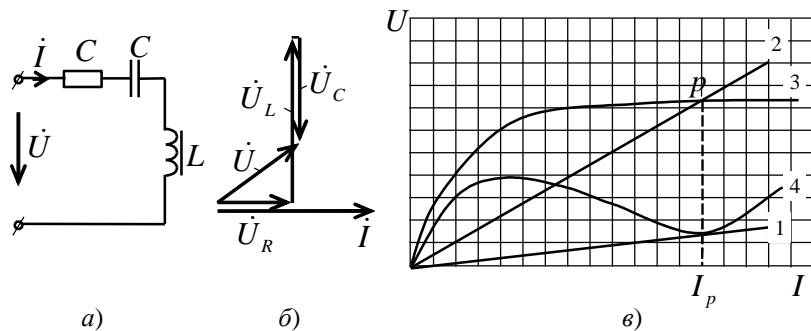


Рис. 9.29

Побудуємо сумарну характеристику нашого кола, прийнявши до уваги, що напруги на котушці та конденсаторі знаходяться у протифазі, і, крім того, напруга на резисторі співпадає за фазою зі струмом (рис. 9.29, б). Задаємося довільними значеннями струму та підрахуємо величину сумарної напруги $U = \sqrt{|U_L - U_C|^2 + U_R^2}$ (крива 4 на рис. 9.29, б).

У точці p сумарної характеристики $U_L = U_C$ і у колі спостерігається **ферорезонанс напруг**. При струмах $I < I_p$ напруга $U_L > U_C$ і коло має активно-індуктивний характер ($\varphi > 0$), при значеннях струмів $I > I_p$ фаза $\varphi < 0$, оскільки $U_C > U_L$.

Проаналізуємо сумарну ВАХ детальніше. При збільшенні напруги на вході кола від 0 до значення U_1 (рис. 9.30) зображуюча точка переміщується по ділянці 0–1 характеристики. Якщо напругу збільшувати далі, то зображуюча точка переміщується стрибком до точки 2 на ВАХ. При цьому у колі стрибкоподібно змінюється струм від значення I_1 до значення I_2 . Таке явище носить назву **тригерного ефекту** у послідовному колі. При цьому стрибком перекидається і фаза від значення $\varphi > 0$ у точці 1 до $\varphi < 0$ у точці 2.

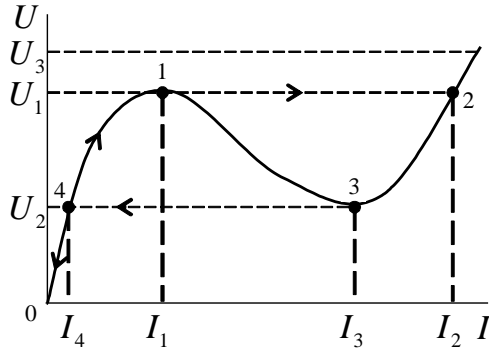


Рис. 9.30

При зменшенні напруги від значення U_3 до значення U_2 зображуюча точка на ВАХ знов стрибком переходить від положення 3 до положення 4, що супроводжується стрибкоподібним зменшенням струму від значення I_3 до I_4 . Таким чином, сумарна ВАХ має ділянку 1–3, яка не може бути реалізована, якщо коло живиться від джерела напруги.

При живленні кола від джерела струму сумарна ВАХ втрачає свою неоднозначність, кожному значенню вхідного струму відповідає єдине значення сумарної напруги і N -подібна характеристика може бути реалізована у всіх точках.

При паралельному з'єднанні нелінійної індуктивності та лінійного конденсатора (рис. 9.31, а) у колі може спостерігатися **ферорезонанс струмів**.

Так само, як у попередньому випадку, побудуємо ВАХ конденсатора (пряма 1, рис. 9.31, б) та нелінійної котушки (крива 2). Сумарну характеристику $I = f(U)$ отримаємо, задаючись певними значеннями напруги і складаючи векторно значення струмів \dot{I}_C та \dot{I}_L , які знаходяться у протифазі (крива 3, рис. 9.31, б).

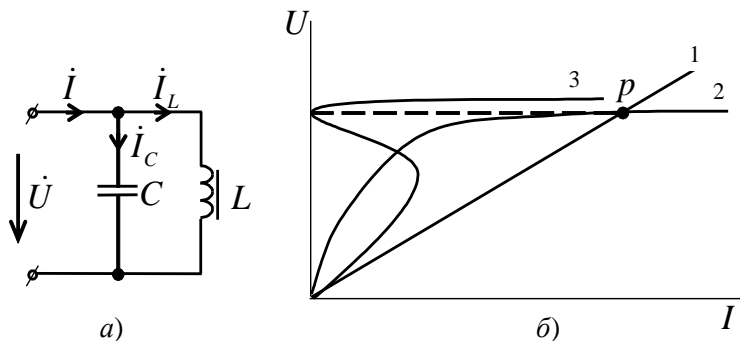


Рис. 9.31

У точці p струми I_L та I_C компенсують один одного і сумарний струм I у ідеальному випадку повинен дорівнювати нулю. Однак, у реальності через втрати у сталі та несинусоїдний характер струму I_L сумарний струм при ферорезонансі до нуля не зменшується.

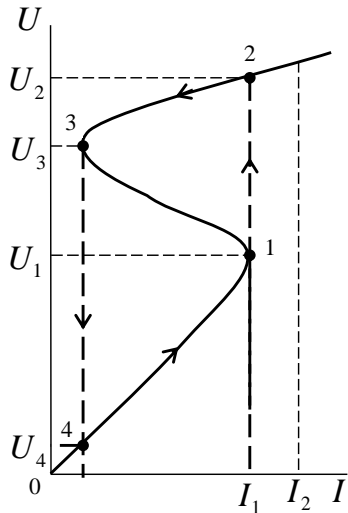


Рис. 9.32

У паралельному контурі також може спостерігатися **тригерний ефект**, який виражається у стрибкоподібній зміні напруги на контурі при зміні струму. Так при зростанні вхідного струму від 0 до I_1 (рис. 9.32) зображуюча точка переміщується по ділянці 0–1 S -подібної сумарної ВАХ. При незначному подальшому збільшенні струму зображуюча точка стрибком переходить у позицію 2 на характеристиці. Стрибок напруги від значення U_1 до значення U_2 супроводжується перекиданням фази від $\varphi < 0$ до $\varphi > 0$. При зменшенні струму від значення I_2 до I_1 вхідна напруга плавно зменшується у відповідності з ділянкою 2–3 характеристики. Подальше зменшення струму приводить до стрибка напруги від значення U_3 до U_4 . Ділянка 1–3 практично реалізовуватись не може, якщо схема живиться від джерела струму. Коли ж підключити коло до джерела ЕРС, то кожному значенню вхідної напруги відповідає одне значення струму на сумарній S -подібній характеристиці, і ця характеристика може бути побудована за всіма точками.

Ферорезонансний режим може спостерігатися і у колах, до складу яких входить лінійна індуктивна котушка та нелінійний конденсатор.

9.8. Завдання для самостійної роботи

Завдання 9.8.1. До напруги $U = 220 \text{ В}$ послідовно підключені реостат та лампа розжарювання, вольт-амперна характеристика якої задана (табл. 9.3). На яку величину опору необхідно встановити реостат, щоб напруга на лампі складала 75 В ?

Таблиця 9.3

| | | | | | | | |
|---------------|---|------|------|------|------|------|------|
| $U, \text{В}$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
| $I, \text{А}$ | 0 | 0,05 | 0,20 | 0,45 | 0,85 | 1,50 | 2,50 |

Відповідь: $R = 200 \text{ Ом}$.

Завдання 9.8.2. До кола з послідовно з'єднаними фотоелементом та опором $R = 10 \text{ МОм}$ підключена напруга $U = 300 \text{ В}$. Вольт-амперна характеристика фотоелемента задається у табл. 9.4. Визначити струм у колі, напругу на

фотоелементі та граничні значення величини цієї напруги при зміні величини опору резистора на $\pm 20\%$.

Таблиця 9.4

| | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| U, B | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 |
| $I, мкА$ | 0,2 | 0,6 | 1,4 | 2,6 | 5,6 |

Відповідь: 5,6 мкА; 250 В; 240...255 В.

Завдання 9.8.3. У схемі параметричного стабілізатора напруги (рис. 9.33, а) опір навантаження $R_n = 12,5 \text{ кОм}$, баластний опір $R_o = 1,16 \text{ кОм}$. Вольт-амперна характеристика кремнієвого стабілітрона приведена на рис. 9.33, б.

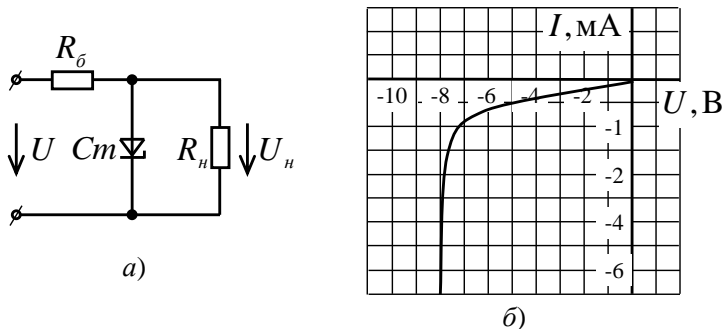


Рис. 9.33

У яких межах зміниться напруга на навантаженні U_n , якщо напруга $U = 12 \text{ В}$ зміниться на $\pm 10\%$?

Відповідь: $\pm 2,5\%$.

Завдання 9.8.4. Визначити усі струми у колі, зображеному на рис. 9.34, якщо $R_1 = 200 \text{ кОм}$, $R_2 = 500 \text{ кОм}$, вольт-амперна характеристика НЕ задана табл. 9.5, а напруга на вході кола $U = 380 \text{ В}$.

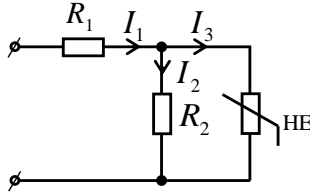


Рис. 9.34

Таблиця 9.5

| | | | | | | |
|---------|---|------|------|------|------|------|
| U, B | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
| I, mA | 0 | 0,04 | 0,10 | 0,18 | 0,38 | 1,30 |

Відповідь: $I_1 = 0,64 mA$; $I_2 = 0,5 mA$; $I_3 = 0,14 mA$.

Завдання 9.8.5. Визначити відносну магнітну проникність осердя із сталі Э-41, якщо котушка, намотана на ньому, має 100 витків та струм 5 А. Розміри осердя у міліметрах вказані на рис. 9.35.

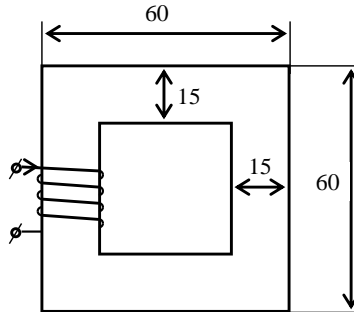


Рис. 9.35

Відповідь: $\mu_r = 365$.

Завдання 9.8.6. Для роботи двигуна магнітна індукція у повітряному зазорі між полюсом і ротором повинна мати значення 0,2 Тл. Визначити, яким повинен бути при цьому струм у обмотці збудження, якщо обмотка має 2000 витків, деталі магнітопроводу виконані із сталі Э-42, а розміри вказані на рис. 9.36 у міліметрах.

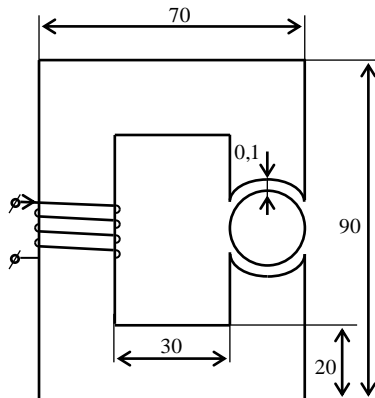


Рис. 9.36

Відповідь: 165 мА.

Завдання 9.8.7. Якого значення досягає магнітна індукція у алюмінієвому диску електrolічильника, якщо котушка має 100 витків, намотана на осердя із сталі Э-41 та має струм 5 А? Розміри магнітопроводу вказані на рис. 9.37 у міліметрах, величина повітряного зазору складає 4 мм.

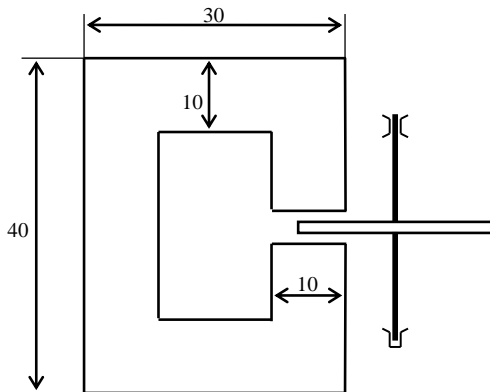


Рис. 9.37

Відповідь: 0,14 Тл.

Завдання 9.8.8. Осердя котушки (рис. 9.38) виконане із сталі Э-41, має товщину 40 мм. Усі інші розміри вказані на рисунку. Визначити магнітний потік у зазорі осердя, якщо на обмотці, яка має 900 витків, протікає струм 2 А.

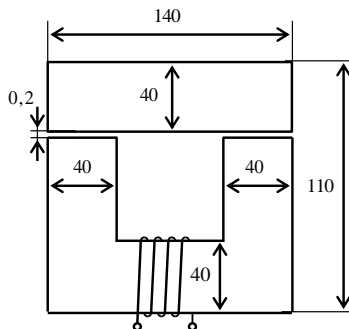


Рис. 9.38

Відповідь: $27 \cdot 10^{-4}$ Вб.

9.9. Запитання для поточного контролю

1. Які резистивні елементи називають нелінійними?
2. Як визначаються статичний та динамічний опори нелінійного резистора?
3. Приведіть вебер-амперну характеристику нелінійної індуктивності та поясніть, як визначити значення статичної та динамічної індуктивності.
4. Поясніть, чому в колах з нелінійними елементами при живленні від джерела синусоїдної ЕРС виникають сигнали вищих гармонік.
5. Якими співвідношеннями зв'язані між собою магнітний потік та магнітна індукція?
6. Якими фізичними процесами обумовлені феромагнітні властивості речовин?
7. Які матеріали називають магніто-м'якими та магніто-твердими?
8. Приведіть схему заміщення нелінійної індуктивності та поясніть сенс кожного з її параметрів.

Додатки

Додаток 1. Дії над комплексними числами

Д1.1. Перехід від алгебричної форми запису комплексного числа до показникової і навпаки здійснюється за формулами:

$$a + jb = C_m e^{j\alpha}; \quad C_m = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$a = C_m \cos \alpha; \quad b = C_m \sin \alpha;$$

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}.$$

Приклади:

$$15 + j23 = 27,5e^{j56,9^\circ}; \quad 14e^{j29^\circ} = 12,24 + j6,79;$$

$$-7 + j11 = 13,04e^{j122,5^\circ}; \quad 72e^{j142^\circ} = -56,74 + j44,33;$$

$$-38 - j105 = 111,7e^{j250,1^\circ}; \quad 8e^{-j150^\circ} = -6,93 - j4;$$

$$61 - j40 = 72,9e^{-j33,2^\circ}; \quad 150e^{-j17^\circ} = 143,4 - j43,8.$$

Д1.2. Операції додавання (віднімання) комплексних чисел здійснюються в алгебричній формі. Сумою двох комплексних чисел $C_1 = a_1 + jb_1$ та $C_2 = a_2 + jb_2$ називається комплексне число $C = C_1 + C_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$.

Приклади:

$$C_1 = 35 - j28; \quad C_1 = 10 + j10;$$

$$C_2 = 140 + j95; \quad C_2 = 31 - j20;$$

$$C_1 + C_2 = 175 + j67; \quad C_1 - C_2 = -21 + j30.$$

Д1.3. Комплексні числа зручно множити (ділити), використовуючи показникову форму запису. При множенні

(діленні) комплексних чисел перемножуються (діляться) модулі та додаються (віднімаються) фази:

$$C_{1m} e^{j\alpha_1} \cdot C_{2m} e^{j\alpha_2} = C_{1m} \cdot C_{2m} e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)};$$

$$\frac{C_{1m} e^{j\alpha_1}}{C_{2m} e^{j\alpha_2}} = \frac{C_{1m}}{C_{2m}} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Приклади:

$$17e^{j31^\circ} \cdot 7,2e^{-j13^\circ} = 17 \cdot 7,2e^{j(31^\circ - 13^\circ)} = 122,4e^{j18^\circ};$$

$$\frac{128e^{-j41^\circ}}{7,2e^{j15^\circ}} = \frac{128}{7,2} e^{j(-41^\circ - 15^\circ)} = 17,8e^{-j56^\circ}.$$

Д1.4. При піднесенні до степеня комплексного числа у показниковій формі використовують формулу:

$$(C_{1m} e^{j\alpha})^n = (C_{1m})^n \cdot e^{jn\alpha}.$$

Приклади:

$$(4,7e^{j15^\circ})^2 = 4,7^2 \cdot e^{j2 \cdot 15^\circ} = 22,1e^{j30^\circ};$$

$$(3,8e^{-j28^\circ})^3 = 3,8^3 \cdot e^{-j3 \cdot 28^\circ} = 54,9e^{-j84^\circ};$$

$$\sqrt{37e^{-j142^\circ}} = (37e^{-j142^\circ})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{37}e^{-j\frac{1}{2} \cdot 142^\circ} = 6,08e^{-j71^\circ}.$$

Д1.5. Логарифмувати комплексне число, записане у показниковій формі $C_m e^{j\alpha}$ – означає логарифмувати добуток:

$$\ln(C_m e^{j\alpha}) = \ln C_m + j\alpha.$$

Кут α у цьому випадку вимірюється у радіанах:

$$\ln(31e^{-j30^\circ}) = \ln(31e^{-j0,52}) = \ln 31 - j0,52 = 3,43 - j0,52;$$

$$\ln(5e^{j115^\circ}) = \ln(5e^{j2}) = \ln 5 + j2 = 1,61 + j2.$$

Додаток 2. Гармонічні ряди характерних періодичних функцій

| | |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | $f(\omega t) = 4A_m/\pi (\sin \omega t + 1/3 \sin 3\omega t + 1/5 \sin 5\omega t + 1/7 \sin 7\omega t + \dots)$ |
| | $f(\omega t) = 4A_m/\pi (\sin(\alpha\pi/2)\cos \omega t + 1/3 \sin(3\alpha\pi/2)\cos 3\omega t + 1/5 \sin(5\alpha\pi/2)\cos 5\omega t + \dots)$ |
| | $f(\omega t) = 4A_m/(\alpha\pi) (\sin \alpha \sin \omega t + 1/9 \sin 3\alpha \sin 3\omega t + 1/25 \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots)$ |
| | $f(\omega t) = 8A_m/\pi^2 (\sin \omega t - 1/9 \sin 3\omega t + 1/25 \sin 5\omega t - 1/49 \sin 7\omega t + \dots)$ |
| | $f(\omega t) = 2A_m/\pi (1/2 + \pi/4 \cos \omega t + 1/(1 \cdot 3) \cos 2\omega t - 1/(3 \cdot 5) \cos 4\omega t + 1/(5 \cdot 7) \cos 6\omega t + \dots)$ |
| | $f(\omega t) = 4A_m/\pi (1/2 + 1/(1 \cdot 3) \cos 2\omega t - 1/(3 \cdot 5) \cos 4\omega t + 1/(5 \cdot 7) \cos 6\omega t - \dots)$ |
| | $f(\omega t) = 3\sqrt{3}A_m/\pi (1/2 + 1/(2 \cdot 4) \cos 3\omega t - 1/(5 \cdot 7) \cos 6\omega t + 1/(8 \cdot 10) \cos 9\omega t - \dots)$ |
| | $f(\omega t) = 3A_m/\pi (1 + 2/(5 \cdot 7) \cos 6\omega t - 2/(11 \cdot 13) \cos 12\omega t + 2/(17 \cdot 19) \cos 18\omega t - \dots)$ |

Додаток 3. Характеристики намагнічування сталей

| В, Тл | Марка сталі | | | |
|-------|-------------------------------------------|----------------------------|----------------|----------------|
| | 1211 (Э-11) 1212 (Э-12) 1311 (Э-21) | 1511 (Э-41) 1512 (Э-42) | Лита сталь | Пермендюр |
| | <i>H</i> , А/м | <i>H</i> , А/м | <i>H</i> , А/м | <i>H</i> , А/м |
| | | | | |
| 0,10 | – | 40 | 80 | 57 |
| 0,20 | – | 50 | 160 | 70 |
| 0,30 | – | 60 | 240 | 73 |
| 0,40 | 140 | 70 | 320 | 76 |
| 0,45 | 152 | 75 | 360 | 79 |
| 0,50 | 171 | 85 | 400 | 82 |
| 0,55 | 191 | 94 | 443 | – |
| 0,60 | 211 | 110 | 488 | 85 |
| 0,65 | 236 | 127 | 535 | – |
| 0,70 | 261 | 145 | 584 | 88 |
| 0,75 | 287 | 165 | 632 | – |
| 0,80 | 318 | 185 | 682 | 91 |
| 0,85 | 352 | 210 | 745 | – |
| 0,90 | 397 | 235 | 798 | 94 |
| 0,95 | 447 | 270 | 850 | – |
| 1,00 | 502 | 300 | 920 | 97 |
| 1,05 | 570 | 340 | 1004 | 100 |
| 1,10 | 647 | 395 | 1090 | 105 |
| 1,15 | 739 | 460 | 1187 | 110 |
| 1,20 | 840 | 540 | 1290 | 115 |
| 1,25 | 976 | 640 | 1430 | 120 |
| 1,30 | 1140 | 770 | 1580 | 125 |
| 1,35 | 1340 | 970 | 1810 | 132 |
| 1,40 | 1580 | 1300 | 2090 | 140 |
| 1,45 | 1950 | 1830 | 2440 | 150 |
| 1,50 | 2500 | 2750 | 2890 | 162 |
| 1,55 | 3280 | 3850 | 3430 | 180 |
| 1,60 | 4370 | 5150 | 4100 | 200 |
| 1,70 | 7780 | 8900 | 5750 | 260 |

Література

1. *Касаткин А.С., Немцов В.М.* Электротехника. – М.: Издательский центр "Академия", 2005. – 544 с.
2. *Міліх В.І.* Електротехніка та електромеханіка. – К.: Каравела, 2006. – 376 с.
3. *Коруд В.І., Гамола О.Є., Малинівський С.М.* Електротехніка. – Львів. – "Магнолія 2006", 2014. – 446 с.
4. *Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В. и др.* Основы теории цепей. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
5. *Каргополова Н.П.* Теорія електричних і магнітних кіл. – Житомир: ЖДТУ, 2003. – 474 с.
6. *Лосев А.К.* Теория линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1987. – 512 с.
7. *Матханов П.Н.* Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. – М.: Высшая школа, 1986. – 352 с.
8. *Шебес М.Р.* Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1982. – 488 с.

Зміст

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Передмова | 3 |
| Список основних умовних позначень фізичних величин і одиниць | 4 |
| Вступ | 5 |
| Частина перша. Лінійні електричні кола | 8 |
| Розділ 1. Лінійні електричні кола постійного струму | 8 |
| 1.1. Елементи електричних кіл та схем | 8 |
| 1.2. Закон Ома для ділянки кола з ЕРС | 12 |
| 1.3. Закони Кірхгофа | 13 |
| 1.4. Розрахунок простих електричних кіл | 15 |
| 1.5. Розрахунок складних електричних кіл за допомогою законів Кірхгофа | 17 |
| 1.6. Метод контурних струмів | 20 |
| 1.7. Метод вузлових потенціалів (напруг) | 24 |
| 1.8. Основні властивості та теореми лінійних електричних кіл | 31 |
| 1.9. Еквівалентні перетворення схем електричних кіл ... | 36 |
| 1.10. Метод накладання | 46 |
| 1.11. Метод еквівалентного генератора | 48 |
| 1.12. Потужність в колах постійного струму | 50 |
| 1.13. Передача енергії від активного двополюсника до пасивного | 52 |
| 1.14. Завдання для самостійної роботи | 55 |
| 1.15. Запитання для поточного контролю | 58 |
| Розділ 2. Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму | 60 |
| 2.1. Синусоїдні електричні величини | 60 |
| 2.2. Синусоїдний струм в резисторі, котушці індуктивності та конденсаторі | 64 |
| 2.3. Закони Кірхгофа в диференційній формі | 72 |
| 2.4. Символічне зображення синусоїдних функцій | 73 |
| 2.5. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі | 76 |
| 2.6. Розрахунок складних електричних кіл комплексним методом | 87 |

| | | |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.7. | Потужність в колах синусоїдного струму | 92 |
| 2.8. | Резонанс в електричних колах | 100 |
| 2.9. | Кола із взаємною індуктивністю | 109 |
| 2.10. | Завдання для самостійної роботи | 124 |
| 2.11. | Запитання для поточного контролю | 129 |
| Розділ 3. | Трифазні кола | 131 |
| 3.1. | Трифазна система ЕРС | 131 |
| 3.2. | З'єднання зіркою та трикутником у трифазних колах | 133 |
| 3.3. | Розрахунок трифазних кіл при з'єднанні зіркою | 135 |
| 3.4. | Розрахунок трифазних кіл при з'єднанні трикутником | 143 |
| 3.5. | Потужність у трифазних колах | 147 |
| 3.6. | Обертове магнітне поле | 149 |
| 3.7. | Завдання для самостійної роботи | 152 |
| 3.8. | Запитання для поточного контролю | 154 |
| Розділ 4. | Кола періодичного несинусоїдного струму | 156 |
| 4.1. | Розкладання періодичних несинусоїдних функцій у тригонометричний ряд Фур'є | 156 |
| 4.2. | Розрахунок кіл періодичного несинусоїдного струму | 160 |
| 4.3. | Діючі та середні значення несинусоїдних ЕРС, напруг та струмів | 165 |
| 4.4. | Потужність у колах періодичного несинусоїдного струму | 168 |
| 4.5. | Завдання для самостійної роботи | 170 |
| 4.6. | Запитання для поточного контролю | 172 |
| Частина друга. | Перехідні процеси у лінійних електричних колах | 174 |
| Розділ 5. | Розрахунок перехідних процесів класичним методом | 174 |
| 5.1. | Виникнення перехідних процесів. Закони комутації та початкові умови | 174 |
| 5.2. | Загальна характеристика класичного методу розрахунку перехідних процесів | 177 |
| 5.3. | Перехідні процеси у колі R, L | 180 |
| 5.4. | Перехідні процеси у колі RC | 190 |
| 5.5. | Перехідні процеси у послідовному RLC -контурі ... | 195 |

| | | |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.6. | Розрахунок перехідних процесів у розгалужених колах класичним методом | 202 |
| 5.7. | Завдання для самостійної роботи | 207 |
| 5.8. | Запитання для поточного контролю..... | 210 |
| Розділ 6. | Операторний метод розрахунку перехідних процесів... | 211 |
| 6.1. | Перетворення Лапласа та його застосування до розрахунку перехідних процесів | 211 |
| 6.2. | Зображення по Лапласу характерних для електричних кіл функцій часу | 213 |
| 6.3. | Операторні схеми заміщення елементів електричних кіл | 216 |
| 6.4. | Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі | 217 |
| 6.5. | Перехід від операторного зображення до оригіналу | 220 |
| 6.6. | Розрахунок перехідних процесів операторним методом | 227 |
| 6.7. | Завдання для самостійної роботи | 236 |
| 6.8. | Запитання для поточного контролю..... | 239 |
| Розділ 7. | Вмикання пасивного двополюсника до джерела напруги довільної форми | 240 |
| 7.1. | Ступінчата та імпульсна функції | 240 |
| 7.2. | Перехідні функції електричного кола | 243 |
| 7.3. | Інтеграл Дюамеля | 245 |
| 7.4. | Завдання для самостійної роботи | 250 |
| 7.5. | Запитання для поточного контролю..... | 251 |
| Розділ 8. | Спектральний (частотний) метод аналізу електричних кіл | 252 |
| 8.1. | Перетворення Фур'є та його основні властивості | 252 |
| 8.2. | Спектри деяких функцій часу | 257 |
| 8.3. | Аналіз перехідних процесів частотним методом | 262 |
| 8.4. | Завдання для самостійної роботи | 267 |
| 8.5. | Запитання для поточного контролю..... | 269 |
| Частина третя. | Нелінійні електричні та магнітні кола | 270 |
| Розділ 9. | Характеристика нелінійних кіл та методів їх розрахунку..... | 270 |
| 9.1. | Елементи нелінійних кіл | 270 |
| 9.2. | Фізичні явища у нелінійних колах постійного та змінного струму | 278 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.3. Резистивні нелінійні елементи | 281 |
| 9.4. Нелінійні індуктивні та ємнісні елементи | 285 |
| 9.5. Нелінійні електричні кола при постійному струмі | 296 |
| 9.6. Нелінійні магнітні кола при постійних потоках | 300 |
| 9.7. Нелінійні електричні кола змінного струму | 309 |
| 9.8. Завдання для самостійної роботи | 318 |
| 9.9. Запитання для поточного контролю..... | 323 |
| Додатки | 324 |
| Додаток 1. Дії над комплексними числами | 324 |
| Додаток 2. Гармонічні ряди характерних періодичних функцій | 326 |
| Додаток 3. Характеристики намагнічування сталей .. | 327 |
| Література | 328 |

Надія Петрівна Каргополова
Андрій Геннадійович Ткачук

Електротехніка та електромеханіка

*Рекомендовано Вченою радою ЖДТУ
як навчальний посібник для студентів, що навчаються за
спеціальністю 151 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані
технології"*

Редактор
Комп'ютерний набір та верстка
Дизайн обкладинки

Добржанський О.О
Єфіменко А.А., Гриневич М.С.
Богдановський М.В.

