МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

**С.П. Семенець, В.М. Бондарчук,
Р.М. Головня, С.П. Давидчук**

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ІЗ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

**Для здобувачів вищої освіти
освітнього рівня «бакалавр»**

ЧАСТИНА 1

ВВЕДЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Житомир -2020

УДК 517. 1.(075)
С-30

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою Державного університету «Житомирська політехніка» (протокол № 03 від 01 жовтня 2020 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:
А. В. Зіновчук, кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри фізики та охорони праці Житомирського державного університету імені Івана Франка;
К. Р. Колос, доктор педагогічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Державного університету «Житомирська політехніка».

С 30 **Методичні рекомендації до лабораторних робіт із математичного аналізу**: [для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»]. **Ч. 1. Введення в математичний аналіз / С.П. Семенець, В.М. Бондарчук, Р.М. Головня, С.П. Давидчук.** – Житомир : РВВ «Житомирська політехніка», 2020. – 51 с.

Методичні рекомендації підготовлено для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр». Введення в математичний аналіз містить добірку завдань із таких тем: «Дійсні числа», «Функції», «Границя функції», «Визначні границі», «Неперервність функції». Пропонується для розв'язування під час проведення лабораторних робіт і самопідготовки студентів. Включає методичні вказівки (правила-орієнтири, алгоритмічні приписи, узагальнені схеми), тестові завдання, що слугують організації самостійної та індивідуальної роботи здобувачів вищої освіти на основі компетентнісного підходу.

УДК 517. 1.(075)

ББК 22.10

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Математи́чний ана́ліз - невід'ємна складова сучасної математики, її фундамент, закладений ще в XVII столітті. У його основі поняття «функція» та дослідження функцій методами нескінченно малих. Наразі математичний аналіз уміщує теорію функцій, теорії границь і рядів, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння та диференціальну геометрію. Тут розв'язуються як прикладні, так і фундаментальні задачі, реалізується потужний математичний інструментарій у галузі природничих наук.

Введення в математичний аналізу передбачає вивчення таких засадничих тем: «Дійсні числа», «Функція», «Границя функції», «Визначні границі», «Неперервність функції». Насправді аналіз функцій дійсної змінної – це розділ математичного аналізу, в якому вивчаються дійсні числа і функції дійсної змінної. Зокрема, тут досліджуються аналітичні властивості функцій дійсної змінної, збіжність і границі послідовностей дійсних чисел, властивості неперервних функцій дійсної змінної.

Вивчення курсу математичного аналізу передбачає дотримання студентами академічної доброчесності:

- самостійне виконання завдань поточного та підсумкового контролю результатів навчання;
- посилання на джерела інформації у разі використання ідей, розробок, тверджень, відомостей;
- надання достовірної інформації про результати власної освітньо-математичної діяльності, використані методи досліджень і джерела інформації.

За порушення академічної доброчесності студенти можуть бути притягнені до такої академічної відповідальності:

- повторне оцінювання результатів навчання (контрольна робота, іспит, залік);

- повторне проходження відповідного компонента освітньої програми.

Методологічною основою вивчення курсу є компетентнісний підхід, що передбачає формулювання та розв'язування компетентнісних задач з математичного аналізу. Здобувачі вищої освіти дають відповіді на питання: «*як діяти?*», «*чому так діяти?*», «*для чого так діяти?*». У такий спосіб досягається розвиток їхньої математичної компетентності (згідно з визначенням С. П. Семенця) - інтегрованої характеристики якості особистості як суб'єкта діяльності в галузі математики, завдяки якій упроваджуються основні компоненти математичної структури (поняття, відношення, аксіоми), формулюються і доводяться математичні твердження (теореми), формулюються та розв'язуються задачі на побудову, дослідження та реалізацію математичних моделей, а також виконуються самоаналіз, самоконтроль, самокорекція і самооцінка процесу та результатів освітньо-математичної діяльності, планується її подальший зміст.

1. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Самостійна робота є невід'ємною складовою компетентнісно орієнтованого вивчення навчальної дисципліни „Математичний аналіз”. Вона передбачає:

- підготовку теоретичних питань до лабораторних робіт;
- конспектування першоджерел;
- виконання колективних (групових, парних) завдань;
- виконання індивідуальних завдань;
- розв'язування задач (прикладних, математичних, компетентнісних);
- підготовку до підсумкової модульної контрольної роботи;
- підготовку до заліку;
- підготовку до екзамену;
- тестовий контроль (самоконтроль).

Підготовка теоретичних питань до лабораторних робіт полягає в опрацюванні (вивченні) питань з визначеної теми. Такі питання можуть висвітлюватися як під час лекцій, так і виноситися на самостійне вивчення.

Навчальний алгоритм самопідготовки теоретичних питань до лабораторних робіт

1.Визначте питання для самопідготовки (розгляньте всі питання, що зазначені в плані лабораторної роботи).

2.Візьміть у бібліотеці університету (читальному залі або на кафедрі) джерела, зазначені в списку основної літератури. Добираючи літературу, можна послуговуватися бібліотечними каталогами (алфавітним, предметним або систематичним).

3.Скористайтеся бібліотечно-інформаційними ресурсами (книжкові фонди, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки Державного університету «Житомирська політехніка», Житомирської обласної універсальної наукової бібліотеки ім. Олега Ольжича (http://www.lib.zt.ua/, 10014, м.

Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33), Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (http://www.nbuv.gov.ua/, Київ, просп. 40-річчя Жовтня, 3 +380 (44) 525-81-04) та інших бібліотек. Самостійно доберіть інші відповідні веб-ресурси.

4.Визначте розділи (теми або параграфи), в яких розкрито питання лабораторної роботи.

5.Прочитайте ці розділи, зробіть структурно-математичний аналіз навчального матеріалу: виокреміть основні поняття, відношення і властивості; назвіть основні теореми, з'ясуйте які перетворення й базові математичні задачі; вкажіть основні типи задач, методи, способи та прийоми їх розв'язування.

6.Обґрунтуйте походження математичних понять, їх сформулюйте.

7.Сформулюйте основні теореми, з'ясуйте як вони доводяться.

8.Складіть план відповіді на кожне питання.

9.Проаналізуйте, яке місце займає опрацьований матеріал (яку роль виконує) в загальній структурі дисципліни, обґрунтуйте його зв'язок із іншими математичними та фаховими навчальними дисциплінами.

10. Побудуйте знако-символьні моделі, схеми, таблиці, графіки, що інтерпретують теоретичну і практичну (задачну) складові навчального матеріалу.

11. Виділіть ті теоретичні питання, які Ви недостатньо зрозуміли. З ними можна звернутися до одногрупників або до викладача у визначений час консультації.

12. Проаналізуйте зміст виконаної навчальної роботи. Оцініть Ваш рівень засвоєння теоретичних знань. Сплануйте зміст подальшої освітньо-математичної діяльності (теоретичну і практичну складові).

Розв'язування задач передбачає виконання мислительних (логічних) дій і операцій, застосування теоретичних знань у процесі вирішення задачних ситуацій. З погляду логіки - це процес мисленнєвого сходження від загального (абстрактного) до часткового (конкретного).

Узагальнена схема (навчальна модель) розв'язування прикладних задач з математики (застосування методу математичного моделювання)

1. Постановка (формулювання) прикладної задачі.
2. Змістовий аналіз умови задачі, виділення основних характеристик (параметрів) процесу, явища, практичної задачної ситуації.
3. Виділення всіх змінних величин, що характеризують об'єкт пізнання.
4. Знаходження всіх відношень, у яких перебувають змінні величини, встановлення їх властивостей (характеристик).
5. Інтерпретація виділених змінних величин та знайдених відношень засобами математики: введення змінних (невідомих), математичних операцій; визначення виду функції (функціоналів, операторів).
6. Конструювання в знаково-символьній формі математичних співвідношень. Встановлення ізоморфізму структур досліджуваного об'єкта та визначеного математичного апарату. Побудова математичної моделі.
7. Формулювання та розв'язування математичної задачі. Знаходження розв'язку.
8. Інтерпретація одержаного розв'язку, тобто його формулювання на мові початкової (прикладної) задачі.
9. Визначення типів прикладних задач, розв'язування яких зводиться до побудови математичних моделей такого ж виду.
10. Самоаналіз, самоконтроль, самокорекція і самооцінка засвоєння методу математичного моделювання.

Формалізована структура математичного моделювання як методу навчального пізнання представляється у вигляді:

1) *постановка прикладної (практичної) задачі та її змістовий аналіз;*

2) *формалізація – формулювання задачі на мові математичних термінів та побудова математичної моделі;*

3) *розв'язання задачі всередині побудованої моделі (знаходження розв'язку математичної задачі);*

4) *інтерпретація одержаного результату, тобто формулювання розв'язку прикладної задачі на її мові.*

Узагальнена схема розв'язування математичних задач (правило-орієнтир)

1. Проаналізуйте задачу (виділіть умову та вимогу).
2. З'ясуйте, до якого виду відноситься задача, у чому її практична чи прикладна значущість.
3. Виділіть поняття, відношення, що містять умова та вимога задачі.
4. Перетворіть задану математичну модель (створіть графічну інтерпретацію).
5. Проаналізуйте властивості виконуваних дій і перетворень (еквівалентність чи нееквівалентність).
6. Знайдіть розв'язки й перевірте (доведіть), що вони задовольняють вимогу задачі.
7. Визначте спосіб розв'язування задачі (як ієрархію дій і операцій).
8. Складіть аналогічну власну задачу та розв'яжіть її. Проконтролюйте і скоректуйте правильність розв'язування.
9. Оцініть рівень засвоєння Вами способу розв'язування задачі.
10. Проаналізуйте знайдений спосіб розв'язування з погляду раціональності. Обґрунтуйте можливості розв'язування задачі іншим способом (методом).

Компетентнісні задачі

Компетентнісні задачі формулюються з метою теоретичного узагальнення типових математичних задач, знаходження методу (способу) їх розв’язування. За результатами розв’язування компетентнісних задач створюється ієрархія загальнологічних, спеціальноматематичних і рефлексивних дій. Це дозволяє класифікувати математичні задачі, оволодівати методом (способом) їх розв’язування.

Компетентнісні задачі розв’язуються індивідуально та передбачають відповідь на такі три питання: «*як діяти?*», «*чому так діяти?*», «*для чого так діяти?*».

Узагальнена схема розв’язування компетентнісних задач

1. Формулювання компетентнісної задачі на основі математичної (базової).
2. Змістовий аналіз з метою знаходження загального відношення (поняття), характерного для типу математичних задач. Формулювання евристик.
3. Формування змістових абстракцій і узагальнень, створення моделі знайденого загального відношення та її перетворення.
4. Конструювання способу (методу) розв’язування типових математичних задач як ієрархії дій і операцій.
5. Змістове планування часткових математичних задач, що розв’язуються знайденим способом (методом).
6. Самоаналіз і самоконтроль виконаних дій і операцій.
7. Самокорекція та самооцінка засвоєння способу розв’язування типових математичних задач.

2. СТРУКТУРА КУРСУ

Теми (змістові модулі)		Кількість годин			
		Всього	**Лекційних**	**Лабораторних**	**Самостійна робота**
1.	Дійсні числа	**5**	**1**	**2**	**2**
2.	Функції	**5**	**1**	**2**	**2**
3	Границя функції	**7**	**2**	**2**	**3**
4	Визначні границі	**5**	**1**	**2**	**2**
5	Неперервність функції	**8**	**3**	**2**	**3**
		30	**8**	**10**	**12**
Модульна контрольна робота					

***Умови автоматичного одержання оцінки за модуль*:**

- відвідати не менше ніж 75% занять (лекційних, практичних);
- одержати не менше ніж 75% від максимальної кількості балів, серед яких обов'язковими є ті, що одержані за самостійне опрацювання теми (розв'язування задач).

Обов'язкові види робіт:

- опрацювати питання плану лабораторної роботи;
- вивчити формулювання математичних понять, з'ясувати їх походження;

- вивчити формулювання основних теорем, з'ясувати як вони доводяться;
- розв'язати задачі, вказані в добірці задач;
- розв'язати компетентнісні задачі з математичного аналізу;
- зробити самоаналіз, самоконтроль, самокорекцію й самооцінку виконаної роботи;
- спроектувати зміст подальшої освітньо-математичної діяльності.

Види робіт на вибір:

- опрацювання тем для індивідуальної роботи;
- індивідуальні та групові завдання із вказаного переліку.

3. ЗМІСТ ЛЕКЦІЙНОГО КУРСУ

Лекція 1. Дійсні числа. Функції

1. Побудова множини дійсних чисел.
2. Поняття функції. Способи задання функції.
3. Класифікація функцій. Числові послідовності.
4. Функції та метод математичного моделювання.

Лекція 2. Границя функції

1. Границя числової послідовності та її властивості.
2. Границя функції в точці та її геометричний зміст.
3. Односторонні границі. Необхідна і достатня умови існування границі функції в точці.
4. Властивості границь функції. Розкриття невизначеностей.

Лекція 3. Визначні границі

1. Перша визначна границя.
2. Еквівалентність нескінченно малих величин.
3. Друга визначна границя.

Лекція 3-4. Неперервність функції

1. Означення неперервної функції в точці.
2. Точки розриву функції. Класифікація точок розриву.
3. Властивості неперервних функції. Метод інтервалів.
4. Дослідження функцій на неперервність.

4. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

4.1. Лабораторна робота № 1. Дійсні числа

1. Числові множини. Побудова множини дійсних чисел.
2. Модуль дійсного числа та його властивості.
3. Ціла та дробова частини дійсного числа.
4. Задачі на доведення.

Основні поняття і теореми

Множина – первісне (невизначене) поняття. Розуміється як сукупність об’єктів, об’єднаних за певною ознакою.

Числові множини

1. Множина натуральних чисел $\mathrm{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$.
2. Множина простих чисел – підмножина множини натуральних чисел, які мають рівно два різних натуральних дільники (1 і саме число). Множина решти натуральних чисел, що не містять число 1, утворює множину складених чисел.
3. Множина цілих невід’ємних чисел $\mathrm{Z}_0 = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$.
4. Множина цілих чисел $\mathrm{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$.
5. Множина раціональних чисел $Q = \left\{ \dfrac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N \right\}$.
6. Множина дійсних чисел $\mathrm{R} = \{x \mid x = a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ...\}$, де $a \in Z$, $\alpha_n -$ цифри десяткової системи числення.
7. Множина ірраціональних чисел $\mathrm{I} = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$.

Зв'язок між множинами $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

Модуль дійсного числа.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}.$$

Цілою частина дійсного числа $[x]$ називається найбільше ціле число, яке не більше ніж *x*.

Теорема 1. Q - множина нескінченних періодичних десяткових дробів.

Теорема 2. I - множина нескінченних неперіодичних десяткових дробів.

Теорема 3. R - множина всіх точок числової прямої.

Теорема 4. Геометрично $|x|$ визначає відстань від початку відліку до точки, що відповідає числу х на числовій осі.

Теорема 5. Для довільного дійсного x виконується рівність $x=[x]+\{x\}$, де $\{x\}$- дробова частина дійсного числа, $0\le\{x\}<1$, $[\mathrm{x}]$ - ціла частина дійсного числа.

Завдання для самостійної роботи

І. Опрацювати тему за такими питаннями:

1. Числові множини. Побудова множини дійсних чисел.
2. Модуль дійсного числа та його властивості.
3. Ціла та дробова частини дійсного числа.
4. Задачі на доведення.

ІІ. Дати відповідь на такі питання:

1. Як тлумачать поняття множини? Навести приклади множин.
2. Представити в знако-символьній формі множини натуральних чисел, цілих невід'ємних чисел, цілих чисел, раціональних чисел, дійсних чисел, ірраціональних чисел. Як співвідносяться ці множини?
3. Які числа утворюють множини $\mathrm{N}, \mathrm{Z}_0, Z, Q, I, R$?
4. Які числа називають простими, а які складеними?
5. Як визначається модуль дійсного числа? У чому полягає його геометричний зміст?
6. Як визначаються ціла і дробова частини дійсного числа?
7. Сформулювати основні теореми для числових множин.

III. Розв'язати задачі із вказаного переліку. Послуговуючись узагальненою схемою, ***розв'язати компетентнісні задачі.***

1. Довести, що якщо p – просте число і p>3, то $p^2 - 1$ ділиться на 24.
2. Чи може дискримінант квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнювати 23?
3. Довжини всіх сторін прямокутного трикутника є натуральні числа. Чи можуть довжини катетів бути непарними числами?
4. Розв'язати нерівності:

4.1. $|5x - 3| \le 6$.

4.2. $|7x + 5| > 3$.

4.3. $|x| > x$.

4.4. $\left|\dfrac{x}{x+3}\right| \ge \dfrac{x}{x+3}$

4.5. $(3x - 5)^2 \ge 9$.

4.6. $(x - 3)^2 < 4$

4.7. $|x^2 - 5x + 6| \ge x^2 - 5x + 6$.

4.8. $|x^2 + 5x + 8| < x^2 - 5x + 6$.

4.9. $[x] \le 3$

4.10. $[x^2] \ge 5$

5. Розв'язати рівняння:

5.1. $|3x - 5| = 1$.

5.2. $|x^2 - 6x| = 5$.

5.3. $|x| = x^2$.

5.4. $|\sin x| = \sin x + 2$.

5.5. $|\sin x| = 2 - \sin x$.

5.6. $|x-1|+|x-2|=1$.

5.7. $[x]=-3$.

5.8. $[x^2]=1+\sin x$.

6. Довести ірраціональність чисел:

6.1. $\sqrt{3}$.

6.2. $\lg 5$.

6.3. $tg1^0$.

6.4. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

IV. Проаналізувати зміст виконаної навчальної роботи (теоретичну і практичну складові), ***зробити її самокорекцію та самооцінку, спланувати*** зміст подальшої освітньо-математичної діяльності.

Теми для індивідуальної роботи

1. Поле дійсних чисел.
2. Фалес і перші математичні доведення.

Рекомендована література

Основна

1. Бондарчук В.М., Коваль В.О. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.1. – Житомир: ЖДТУ, 2010.–50 с.
2. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с.
3. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ, 2001. – 176 с.
4. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 3. – Житомир: ЖДТУ, 2002. – 156 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 1. Основні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.

6. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 2. Спеціальні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.:Либідь, 2003. – 368 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2006. – 648 с.
8. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник, 3-є видання. – Тернопіль: Економічна думка, 2010. – 304 с.
9. Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.
10. Семенець С.П., Семенець Л.М. Елементарна математика (підготовлено на основі концепції розвивальної освіти): [навч.-метод. посіб.] - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. - 144 с.

Додаткова

1. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф-тів педуніверситетів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
2. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 32 с.
3. Бондарчук В.М. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.2. – Житомир: ЖДТУ, 2012.–100 с.
4. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: ТВіМС, 2000. – 163 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2000. — 592 с.
6. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.1/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 279 с.
7. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.2/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 376 с.

Інформаційні ресурси

Бібліотечно-інформаційний ресурс (книжковий фонд, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки Державного університету «Житомирська політехніка», Житомирської обласної універсальної наукової бібліотеки ім. Олега Ольжича (http://www.lib.zt.ua/, 10014, м. Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33), Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (http://www.nbuv.gov.ua/, Київ, просп. 40-річчя Жовтня, 3 +380 (44) 525-81-04) та інших бібліотек .

Інституційний репозитарій «Житомирська політехніка» (наукові статті, автореферати дисертацій та дисертації, навчальні матеріали, студентські роботи, матеріали конференцій, патенти, комп'ютерні програми, статистичні матеріали, навчальні об'єкти, наукові звіти).

4.2. Лабораторна робота № 2. Функції

1. Поняття функції. Способи задання функції.
2. Область визначення та область значень функції.
3. Класифікація функцій.
4. Функції як математичні моделі.

Основні поняття і теореми

Змінною величиною називається величина, яка приймає різні числові значення. Величина, числові значення якої не змінюються, називається ***сталою величиною***. Традиційно змінні величини позначаються буквами $x, y, z, \ldots$, а сталі – буквами $a, b, c, \ldots$ і т. і.

Зауваження. У математиці стала величина часто розглядається як частинний випадок змінної, у якої всі числові значення однакові.

Означення. Якщо кожному значенню змінної x із області X можна поставити у відповідність за деяким правилом одне визначене значення змінної y із області Y, то кажуть, що на множині X задана **функція** і записують цю відповідність за допомогою формули $y = f(x)$.

Змінну x називають **незалежною** змінною, або **аргументом**, а змінну y – **залежною** змінною, або **функцією**. (Кажуть, що y є функцією x, або x і y зв'язані функціональною залежністю.)

Сукупність усіх значень аргументу x, при яких дана функція має сенс (тобто визначена), називається областю визначення функції.

Множину X називають **областю визначення** функції y і позначають через $D(f)$, а множину Y усіх чисел y, які відповідають різним числам $x \in X$, – **областю значень** функції y і позначають через $E(f)$. Помітимо, що коли числу x_0 із $D(f)$ відповідає число y_0 із $E(f)$, то y_0 називають **значенням функції** у точці x_0.

Основні елементарні функції.

– степенева функція: $y = x^n$, n – дійсне число;

– показникова функція: $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$;

– логарифмічна функція: $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$;

– тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

– обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Означення. Функції, які складені з основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) та за допомогою операції композиції функцій, називаються **елементарними** функціями.

Елементарні функції можна розділити на дві групи: алгебраїчні і трансцендентні.

До алгебраїчних функцій належать:

1. Ціла раціональна функція або многочлен (поліном)

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – сталі числа, які називаються коефіцієнтами;

n – ціле додатне число – степінь многочлена.

2. Дробово-раціональна функція – відношення двох многочленів

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

3. Ірраціональна функція – крім арифметичних дій, що виконуються над незалежною змінною, є дія добування кореня.

Функція, яка не є алгебраїчною, називається **трансцендентною**.

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **парною**, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Аналогічно функція зветься **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі OY, графік непарної – відносно початку координат.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **періодичною,** якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x виконується рівність $f(x+T) = f(x)$.

Якщо функція періодична, то мають місце і такі рівності:

$$f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \ldots = f(x).$$

Найменше додатне число T, за якого умова $f(x+T) = f(x)$ виконується, називається **періодом** функції.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою** на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Якщо виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція називається **неспадною**.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **спадною** на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Якщо $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція називається **незростаючою**.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **строго монотонною** на інтервалі, якщо вона зростаюча, або спадна на цьому інтервалі.

Функція **монотонна**, якщо вона неспадна, або незростаюча.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою зверху** (**знизу**) на деякому інтервалі, якщо існує таке число M, що $f(x) \le M$ $(f(x) \ge M)$ для усіх x із даного інтервалу.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою** на деякому інтервалі, якщо існує число $M > 0$, що для усіх x із інтервалу, виконується нерівність: $|f(x)| \le M$.

Нехай $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тоді, якщо область значень функції $u = \varphi(x)$ міститься в області визначення функції $y = f(u)$, то функція $y = f[\varphi(x)]$ називається **складною** функцією, або **композицією** функцій f і φ. Аргумент u називається проміжним аргументом, або внутрішньою функцією.

Нехай функція визначена на множині X.

Означення. Якщо кожне значення аргументу $x \in X$ і відповідне йому значення функції y задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$, то кажуть, що функція задана **неявно**.

Рівняння
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1}$$

називаються **параметричними** рівняннями цієї кривої, t називається **параметром**, а спосіб задання кривої рівняннями (1) називається **параметричним** способом задання функції.

Теорема. Усяка функція, область визначення якої симетрична відносно початку координат, може бути представлена у вигляді суми двох функцій, одна з яких парна, а друга непарна.

Теорема. Тригонометричні, обернені тригонометричні, показникова та логарифмічна функції є трансцендентними функціями.

Завдання для самостійної роботи

I. Опрацювати тему за такими питаннями:

1. Поняття функції. Способи задання функції.
2. Область визначення та область значень функції.
3. Класифікація функцій.
4. Функції як математичні моделі.

II. Дати відповідь на такі питання:

1. Яка функція називається непарною, парною?
2. Що таке період функції?
3. Яка функція називається зростаючою на інтервалі? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається неспадною на інтервалі?
5. Яка функція називається монотонною (строго монотонною)?
6. Що таке обмежена функція? Наведіть приклади.
7. Що таке обернена функція? Наведіть приклад функції, яка має обернену і функції, яка не має оберненої функції.
8. Напишіть рівняння кола в параметричному виді.
9. Побудуйте графіки функцій:

$$y = a^x; \quad y = \log_a x \ (a > 1, 0 < a < 1); \quad y = \sin x; \quad y = \mathrm{arctg} x.$$

10. Яка функція називається алгебраїчною, трансцендентною?
11. Що таке дробово-раціональна функція?
12. Як побудувати графік функцій $y = x^3 - a$, $y = \ln(x + a)$?

III. Розв'язати задачі із вказаного переліку. Послуговуючись узагальненою схемою, ***розв'язати компетентнісні задачі.***

Знайти область визначення функції.

2.1. $y = \dfrac{x-6}{x^2 - 3x + 2}$. ***2.2.*** $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{9+4x^2}$.

2.3. $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt[3]{x+2}}$.

2.4. $y=x\ln\left(4-x^2\right)$.

2.5. $y=x-\dfrac{5}{\sqrt{1-x}}$.

2.6. $y=\dfrac{x^2}{\cos x-1{,}5}$.

2.7. $y=\dfrac{\sin x}{2^x-4}$.

2.8. $y=\dfrac{2^x}{27+x^3}$.

2.9. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

2.10. $y=\dfrac{x+4}{\ln x}$.

2.11. $y=\dfrac{x^2-4}{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} x}$.

2.12. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{3^x-1}$.

2.13. $y=\dfrac{2x-5}{8-x^3}$.

2.14. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-9}$.

2.15. $y=\dfrac{x+4}{\log_2 x+1}$.

Знайти нулі функції, проміжки її знакосталості, проміжки зростання та спадання функції, область її значень. Обчислити значення функції $f\left(x\right)$ у точках x_1 та x_2.

2.16. $f\left(x\right)=3x^2-2x-3,$ $\quad x_1=-2,\ x_2=4.$

2.17. $f\left(x\right)=5x^2-3x+1,$ $\quad x_1=-1,\ x_2=3.$

2.18. $f\left(x\right)=5+3x-2x^2,$ $\quad x_1=-3,\ x_2=2.$

2.19. $f\left(x\right)=2x^2+x-3,$ $\quad x_1=-3,\ x_2=2.$

2.20. $f\left(x\right)=x^2+6x-1,$ $\quad x_1=-2,\ x_2=4.$

2.21. $f\left(x\right)=3x^2+x-4,$ $\quad x_1=-2,\ x_2=1.$

2.22. $f\left(x\right)=3+2x-x^{2},\qquad x_{1}=-2,\ x_{2}=5.$

2.23. $f\left(x\right)=x^{2}+4x-3,\qquad x_{1}=-4,\ x_{2}=3.$

2.24. $f\left(x\right)=4x^{2}-5x+2,\qquad x_{1}=-3,\ x_{2}=1.$

2.25. $f\left(x\right)=3x^{2}+x-5,\quad x_{1}=-3,\ x_{2}=2.$

2.26. $f\left(x\right)=2x^{2}+3x-8,\qquad x_{1}=-1,\ x_{2}=3.$

2.27. $f\left(x\right)=4+x-2x^{2},\qquad x_{1}=-3,\ x_{2}=2.$

2.28. $f\left(x\right)=2+4x-3x^{2},\qquad x_{1}=-2,\ x_{2}=4.$

2.29. $f\left(x\right)=3x^{2}-5x+4,\qquad x_{1}=-2,\ x_{2}=4.$

2.30. $f\left(x\right)=4x^{2}+2x-3,\qquad x_{1}=-1,\ x_{2}=3.$

IV. Проаналізувати зміст виконаної навчальної роботи (теоретичну і практичну складові), ***зробити її самокорекцію та самооцінку, спланувати*** зміст подальшої освітньо-математичної діяльності.

Теми для індивідуальної роботи

1. Становлення та розвиток поняття «функція».
2. Елементарні функції як математичні моделі.

Рекомендована література

Основна

1. Бондарчук В.М., Коваль В.О. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.1. – Житомир: ЖДТУ, 2010.–50 с.

2. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с.

3. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ, 2001. – 176 с.
4. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 3. – Житомир: ЖДТУ, 2002. – 156 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 1. Основні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
6. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 2. Спеціальні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.:Либідь, 2003. – 368 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2006. – 648 с.
8. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник, 3-є видання. – Тернопіль: Економічна думка, 2010. – 304 с.
9. Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.
10. Семенець С.П., Семенець Л.М. Елементарна математика (підготовлено на основі концепції розвивальної освіти): [навч.-метод. посіб.] - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. - 144 с.

Додаткова

1. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф-тів педуніверситетів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
2. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 32 с.
3. Бондарчук В.М. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.2. – Житомир: ЖДТУ, 2012.–100 с.
4. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: ТВіМС, 2000. – 163 с.

5. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2000. — 592 с.
6. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.1/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 279 с.
7. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.2/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 376 с.

Інформаційні ресурси

Бібліотечно-інформаційний ресурс (книжковий фонд, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки Державного університету «Житомирська політехніка», Житомирської обласної універсальної наукової бібліотеки ім. Олега Ольжича (http://www.lib.zt.ua/, 10014, м. Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33), Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (http://www.nbuv.gov.ua/, Київ, просп. 40-річчя Жовтня, 3 +380 (44) 525-81-04) та інших бібліотек .

Інституційний репозитарій «Житомирська політехніка» (наукові статті, автореферати дисертацій та дисертації, навчальні матеріали, студентські роботи, матеріали конференцій, патенти, комп'ютерні програми, статистичні матеріали, навчальні об'єкти, наукові звіти).

4.3. Лабораторна робота № 3. Границя функції

1. Границя числової послідовності та її властивості.
2. Границя функції в точці та її геометричний зміст.
3. Односторонні границі. Необхідна і достатня умови існування границі функції в точці.
4. Властивості границь функції. Розкриття невизначеностей.

Основні поняття і теореми

Означення. Якщо сукупність усіх можливих значень змінної величини така, що всі ці числа можна занумерувати за допомогою нескінченної кількості номерів 1, 2, 3, ... і розташувати у порядку зростання номерів, тобто записати у вигляді: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, то таку змінну будемо називати **послідовністю** (**числовою послідовністю**).

Означення. Стале число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для **будь-якого** довільно малого $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що для **усіх** (натуральних) $n > N$ буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Означення. Число (точка) a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для **будь-якого** інтервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ можна зазначити такий номер N, починаючи з якого **всі** точки x_n з індексами $n > N$ попадуть в цей інтервал.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ (або змінна x_n) називається **нескінченно малою**, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число N, таке, що для усіх $n > N$ буде виконуватись нерівність $|x_n| < \varepsilon$.

У цьому випадку пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, або $x_n \to 0$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо для **будь-якого** числа $M > 0$ завжди знайдеться такий номер N, починаючи з якого **всі** члени послідовності будуть задовольняти нерівність: $|x_n| > M$ $(n > N)$.

При цьому пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо для **усякої** послідовності $\{x_n\}$, яка прямує до x_0 ($x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$), послідовність відповідних значень функції $y_n = f(x_n)$ збігається до A.

Позначається це так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, або $f(x) \to A$ (коли $x \to x_0$). Це означення називають означенням границі функції «на мові послідовностей».

Означення (по Коші). Число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо функція визначена в деякому околі точки x_0, за виключенням, може бути, самої точки x_0 і для **будь-якого**, як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число $\delta > 0$ (яке залежить від ε), що для **усіх** x таких, що $|x - x_0| < \delta$, ($x \neq x_0$) буде виконуватись нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ (або рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$).

Таке означення називають означенням границі функції «на мові ε-δ» (епсілон-дельта).

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, якщо для **будь-якого** інтервалу $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ з центром у точці A на осі ординат ($\varepsilon > 0$ довільне стале число) можна указати такий інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ з центром у точці x_0 на осі абсцис, що для **усіх** точок x із δ-інтервалу відповідні точки $y = f(x)$ на осі OY попадуть в ε-інтервал (рис. 5).

Зауваження 1. Якщо $f(x)$ прямує до границі A_1, а x прямує до числа x_0 так, що x приймає значення тільки менші x_0, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = A_1$ і A_1 називають границею функції $f(x)$ у точці x_0 зліва.

Якщо x прямує до x_0 і приймає значення тільки більші x_0, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = A_2$ і A_2 називають границею функції $f(x)$ у точці x_0 справа.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для любого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M > 0$, що для всіх значень $|x| > M$ буде виконуватись нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ (рис. 6).

Означення. Функція $y = f(x)$ прямує до нескінченності при $x \to x_0$, якщо для кожного достатньо великого додатного числа M знайдеться таке δ, що для всіх значень x, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, буде виконуватись нерівність $|f(x)| > M$ (рис. 7).

У цьому випадку функцію називають **нескінченно великою** і записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Якщо функція $y = f(x)$ прямує до нескінченності при $x \to x_0$ і при цьому приймає тільки додатні значення, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, а якщо функція приймає тільки від'ємні значення, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Означення. Дріб, у якого чисельник і знаменник є змінні, які прямують до нуля, називається **невизначеністю виду** $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Крім невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ існує ще шість видів невизначеностей:

$$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \left\{1^{\infty}\right\}, \left\{0^{0}\right\}, \left\{\infty^{0}\right\}.$$

Теорема. Границя сталої є сама стала.

Теорема. Якщо функція має границю, то вона єдина.

Теорема. Границя суми скінченного числа функцій дорівнює сумі границь цих функцій.

Теорема. Границя добутку скінченного числа функцій дорівнює добутку границь цих функцій.

Теорема. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границя знаменника не дорівнює нулю.

Теорема. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функціє є нескінченно мала функція.

Теорема. Для того щоб функція в точці мала границю, необхідно і достатньо, щоб в цій точці функція мала праву і ліву границі і щоб права границя дорівнювала лівій границі.

Завдання для самостійної роботи

І. Опрацювати тему за такими питаннями:

1. Границя числової послідовності та її властивості.
2. Границя функції в точці та її геометричний зміст.
3. Односторонні границі. Необхідна і достатня умови існування границі функції в точці.
4. Властивості границь функції. Розкриття невизначеностей.

ІІ. Дати відповідь на такі питання:

1. Що таке числова послідовність? Наведіть приклад.
2. Сформулювати означення границі числової послідовності. Наведіть приклади.
3. Розкрити основні властивості границь числових послідовностей.
4. Сформулювати означення границі функції в точці. Наведіть приклади.
5. Розкрити геометричний зміст границі функції в точці. Навести приклад.
6. Яку границю функції в точці називають лівою, а яку правою? Навести приклади.
7. Яку функцію називають нескінченно малою, а яку нескінченно великою? Навести приклади.
8. Сформулювати основні властивості границь функцій у точці.

ІІІ. Розв'язати задачі із вказаного переліку. Послуговуючись узагальненою схемою, ***розв'язати компетентнісні задачі.***

Знайти границю.

3.1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x-3}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2+x-2}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{x^2-6x-7}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-9}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-7x+6}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

Знайти границю.

3.16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^3+2x-4}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-3x^2+4x-3}{4x^2-x-6}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+3x-3}{-5x^2+x+2}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x-1}{x^4-6x+1}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^3-4x+1}{2x^3+2x-4}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+4x-3}{4x^5-x+6}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+1}{-3x^3+4x+14}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-4x^4-7x-1}{9x^3-6x+12}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{-3x^3+2x-5}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+4x+7}{4x^4-3x-6}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+3x+1}{4x^3+2x^2-5}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{-3x^2+x-2}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{3x^3+x-2}$.

14.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x+1}{x^4-3x+1}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-5x+1}{4x^3+3x-2}$.

Знайти границю.

3.31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{4-3x}-1}$.

3.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

3.33. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4-3x^2}-1}{x^2+x}$.

3.34. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$.

3.35. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

3.36. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}$.

3.37. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$.

3.38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x-2x^2}$.

3.39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{5x}$.

3.40. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.

3.41. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6-x}-2}$..

3.42. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x+x^2}$.

3.43. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}$.

344. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x+3}-1}$.

3.45. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{2x+9}-1}$.

IV. Проаналізувати зміст виконаної навчальної роботи (теоретичну і практичну складові), ***зробити її самокорекцію та самооцінку, спланувати*** зміст подальшої освітньо-математичної діяльності.

Теми для індивідуальної роботи

1. Становлення та розвиток вчення про нескінченно малі величини.
2. Застосування границь у розв’язуванні задач прикладного змісту.

Рекомендована література

Основна

1. Бондарчук В.М., Коваль В.О. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.1. – Житомир: ЖДТУ, 2010.–50 с.
2. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с.
3. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ, 2001. – 176 с.
4. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 3. – Житомир: ЖДТУ, 2002. – 156 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 1. Основні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
6. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 2. Спеціальні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.:Либідь, 2003. – 368 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2006. – 648 с.
8. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник, 3-є видання. – Тернопіль: Економічна думка, 2010. – 304 с.
9. Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.
10. Семенець С.П., Семенець Л.М. Елементарна математика (підготовлено на основі концепції розвивальної освіти):

[навч.-метод. посіб.] - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. - 144 с.

Додаткова

1. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф-тів педуніверситетів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
2. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 32 с.
3. Бондарчук В.М. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.2. – Житомир: ЖДТУ, 2012.–100 с.
4. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: ТВіМС, 2000. – 163 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2000. — 592 с.
6. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.1/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 279 с.
7. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.2/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 376 с.

Інформаційні ресурси

Бібліотечно-інформаційний ресурс (книжковий фонд, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки Державного університету «Житомирська політехніка», Житомирської обласної універсальної наукової бібліотеки ім. Олега Ольжича (http://www.lib.zt.ua/, 10014, м. Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33), Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (http://www.nbuv.gov.ua/, Київ, просп. 40-річчя Жовтня, 3 +380 (44) 525-81-04) та інших бібліотек.

4.4. Лабораторна робота № 4. Визначні границі

1. Перша визначна границя.
2. Еквівалентність нескінченно малих величин.
3. Друга визначна границя.

Основні поняття і теореми

Означення. Границею змінної $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ називається число ***e***, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число ***e*** – ірраціональне, воно дорівнює 2,7182818… Рекомендуємо запам'ятати: $\boxed{e \approx 2{,}72}$.

Означення.

Якщо відношення $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до скінченої границі $A \neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку**.

Помітимо, що при $x \to 0$ нескінченно малі x, $\sin mx$, $\operatorname{tg} nx$ є нескінченно малими одного порядку.

Означення.

Якщо відношення $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до нуля, тобто якщо $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ $\left(\text{а } \lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty\right)$, то $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою вищого порядку** відносно $\beta(x)$, а $\beta(x)$ – нескінченно малою нижчого порядку відносно $\alpha(x)$.

Означення.

Якщо відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до одиниці, тобто якщо $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то нескінченно малі називають **еквівалентними** і пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Наведемо найбільш розповсюджені еквівалентні нескінченно малі. Якщо $x \to 0$, то $x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$.

Теорема (перша визначна границя)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Завдання для самостійної роботи

I. Опрацювати тему за такими питаннями:

1. Перша визначна границя.
2. Еквівалентність нескінченно малих величин.
3. Друга визначна границя.

II. Дати відповідь на такі питання:

1. Сформулювати теорему про першу визначну границю.
2. Що таке нескінченно малі величини одного порядку? Наведіть приклади.
3. Які нескінченно малі величини називаються еквівалентними? Наведіть приклади.
4. Яка границя прямує до числа «**е**»? Чому дорівнює наближене значення числа «**е**»?
5. Які числа називаються трансцендентними?

III. Розв'язати задачі із вказаного переліку. Послуговуючись узагальненою схемою, ***розв'язати компетентнісні задачі.***

Знайти границю, скориставшись першою визначною границею.

4.1. $\lim\limits_{x \to 0} \sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 5x$. ***4.2.*** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{\sin^2 2x}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{\mathrm{tg}^2\, 3x}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, 5x}{\sin 2x}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\, 4x}{\sin^2 2x}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot\mathrm{tg}\, 2x}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\, 5x}{1-\cos 3x}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, 7x}{\arcsin 4x}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{2x^2}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{4x\cdot\mathrm{tg}\, 2x}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}\, 3x}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\sin^2 5x}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{\arcsin^2 5x}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot\mathrm{tg}\, 2x}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 5x}{\sin^2 4x}$.

Знайти границю, скориставшись другою визначною границею.

4.16. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x-4}\right)^{2x}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{2-x}}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{3}{x-1}}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x-1}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{3x+2}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x-1}}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{2x+3}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{5x}{x-2}}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x-2}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{1}{x-3}}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3}{x-2}}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2x-1}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2}{4x+7}\right)^{2x}$.

IV. Проаналізувати зміст виконаної навчальної роботи (теоретичну і практичну складові), ***зробити її самокорекцію та самооцінку, спланувати*** зміст подальшої освітньо-математичної діяльності.

Теми для індивідуальної роботи

1. Перша визначна границя та методи її доведення.
2. Число «**е**» та способи його обчислення.

Рекомендована література

Основна

1. Бондарчук В.М., Коваль В.О. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.1. – Житомир: ЖДТУ, 2010.–50 с.
2. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с.
3. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ, 2001. – 176 с.

4. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 3. – Житомир: ЖДТУ, 2002. – 156 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 1. Основні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
6. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 2. Спеціальні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.:Либідь, 2003. – 368 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2006. – 648 с.
8. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник, 3-є видання. – Тернопіль: Економічна думка, 2010. – 304 с.
9. Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.
10. Семенець С.П., Семенець Л.М. Елементарна математика (підготовлено на основі концепції розвивальної освіти): [навч.-метод. посіб.] - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. - 144 с.

Додаткова

1. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф-тів педуніверситетів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
2. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 32 с.
3. Бондарчук В.М. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.2. – Житомир: ЖДТУ, 2012.–100 с.
4. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: ТВіМС, 2000. – 163 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне

числення/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2000. — 592 с.
6. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.1/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 279 с.
7. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.2/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 376 с.

Інформаційні ресурси

Бібліотечно-інформаційний ресурс (книжковий фонд, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки Державного університету «Житомирська політехніка», Житомирської обласної універсальної наукової бібліотеки ім. Олега Ольжича (http://www.lib.zt.ua/, 10014, м. Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33), Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (http://www.nbuv.gov.ua/, Київ, просп. 40-річчя Жовтня, 3 +380 (44) 525-81-04) та інших бібліотек .

Інституційний репозитарій «Житомирська політехніка» (наукові статті, студентські роботи, комп'ютерні програми).

4.5. Лабораторна робота № 5. Неперервність функції

1. Означення неперервної функції в точці.
2. Точки розриву функції. Класифікація точок розриву.
3. Властивості неперервних функції. Метод інтервалів.
4. Дослідження функцій на неперервність.

Основні поняття і теореми

1. *Приріст* аргументу і функції:

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

2. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною* у точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу Δx у точці $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст Δy функції, що визначена в точці x_0 та в її околі. Тобто при $\Delta x \to 0$ буде $\Delta y \to 0$.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною* при $x = x_0$, якщо:

1) $f(x)$ існує при $x = x_0$ і в деякому околі точки x_0;
2) існує лівостороння границя $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$;
3) існує правостороння границя $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;
4) лівостороння і правостороння границі рівні

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ незалежно від способу прямування x до x_0, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо функція не є неперервною у точці x_0, то її називають *розривною* у цій точці, а саму точку x_0 називають *точкою розриву*.

3. Класифікація точок розривів функції:

1) Якщо функція $f(x)$ не визначена в точці x_0 або визначена, але мають місце співвідношення

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0),$$

то розрив у точці називається *ліквідовним* (усувним).

2) Якщо однобічні границі функції $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ існують і скінченні, але не рівні між собою, то x_0 називається точкою розриву *першого роду*, а різниця $\Delta = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ називається *стрибком* функції.

3) Якщо хоч одна з однобічних границь не існує або дорівнює ∞, то розрив у цій точці називається розривом *другого роду*.

Такі розриви першого і другого роду називаються *неліквідовними* (неусувними).

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу (відрізка), то вона називається *неперервною на* цьому *інтервалі* (*відрізку*).

Теорема (Вейєрштрасса). Неперервна функція на відрізку обмежена на цьому відрізку.

Теорема (Вейєрштрасса). Якщо функція неперервна на відрізку, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше значення.

Теорема (Больцано-Коші). Якщо функція неперервна на відрізку, і якщо значення цієї функції на кінцях цього відрізка протилежні за знаком, то на ньому існує принаймні одна точка, значення функції в якій дорівнює нулю.

Теорема (Больцано-Коші). Якщо функція f(x) неперервна на відрізку $[a; \mathrm{b}]$ і $f(a) \neq f(b)$, то для будь-якого числа А, що знаходиться між числами $f(a)$ і $f(b)$, існує точка $c \in (a; \mathrm{b})$ така, що $f(c) = A$.

Завдання для самостійної роботи

I. Опрацювати тему за такими питаннями:

1. Означення неперервної функції в точці.
2. Точки розриву функції. Класифікація точок розриву.
3. Властивості неперервних функції. Метод інтервалів.
4. Дослідження функцій на неперервність**.**

II. Дати відповідь на такі питання:

1. Що таке приріст аргументу і що таке приріст функції? Наведіть приклади.
2. Сформулюйте означення неперервної функції в точці. Наведіть приклад.
3. Які умови неперервної функції в точці?
4. За яких умов функція розривна в точці? Наведіть приклади.
5. Яку точку називають точкою розриву першого роду? Наведіть приклад.
6. Яку точку називають точкою розриву другого роду? Наведіть приклад.
7. Які розриви функції називають неусувними, а які усувними? Наведіть приклади.

III. Розв'язати задачі із вказаного переліку. Послуговуючись узагальненою схемою, ***розв'язати компетентнісні задачі.***

Довести неперервність функцій.

5.1. $y = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x^2 - 12x + 3$.

5.2. $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x - 5$.

5.3. $y = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + 3$.

5.4. $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

5.5. $y = x^3 + x^2 - 5x + 4$.

5.6. $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 3$.

5.7. $y = x^3 - 12x^2 + 21x + 5$.

5.8. $y = \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 20x + 4$.

5.9. $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 3$.

5.10. $y = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Дослідити на неперервність функції.

5.11. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

5.12. $y = \frac{5x}{4 - x^2}$.

5.13. $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.

5.14. $y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$.

5.15. $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$.

5.16. $y = \frac{3x + 6}{x^2 - 4}$.

5.17. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

5.18. $y = \frac{4x}{4 + x^2}$.

5.19. $y = \frac{5x}{4 - x^2}$.

5.20. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

5.21. $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$.

5.22. $y = \frac{3x^2}{8 - x^3}$.

5.23. $y = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$.

5.24. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

5.25. $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$.

Дослідити на неперервність функції.

5.26. $y=(2x+3)e^{-2x-2}$. **5.27.** $y=\frac{\sin x}{x}$

5.28. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$. **5.29.** $y=4^{\frac{2}{x-3}}$

5.30. $y=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$. **5.31.** $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

5.32. $y=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)+2$. **5.33.** $y=\sqrt[3]{x}\,e^{\frac{2}{3x}}$.

5.34. $y=\begin{cases} x^2 \text{ } при -\infty< x<1, \\ 2x-1 \text{ } при \text{ } 1\le x<\infty \end{cases}$ **5.35** $y=\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ } при \text{ } x<0, \\ x \text{ } при \text{ } 1\le x<2, \\ 3 \text{ } при \text{ } 2\le x\le 3. \end{cases}$

5.36. $y=\begin{cases} -\frac{1}{x} \text{ } при \text{ } x<0, \\ 1 \text{ } при \text{ } 0\le x<1, \\ \text{x при } 1\le x\le 2, \\ 3 \text{ } при \text{ } 2<x\le 3. \end{cases}$ **5.37** $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x<0, \\ x^2, & \text{якщо } x\ge 0. \end{cases}$

IV. Проаналізувати зміст виконаної навчальної роботи (теоретичну і практичну складові), ***зробити її самокорекцію та самооцінку, спланувати*** зміст подальшої освітньо-математичної діяльності.

Теми для індивідуальної роботи

1. Розвиток вчення про неперервні функції.
2. Використання властивостей неперервних функції у розв’язуванні прикладних задач.

Рекомендована література

Основна

1. Бондарчук В.М., Коваль В.О. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.1. – Житомир: ЖДТУ, 2010.–50 с.
2. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с.
3. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ, 2001. – 176 с.
4. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 3. – Житомир: ЖДТУ, 2002. – 156 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 1. Основні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
6. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 2. Спеціальні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.:Либідь, 2003. – 368 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2006. – 648 с.
8. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник, 3-є видання. – Тернопіль: Економічна думка, 2010. – 304 с.
9. Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.
10. Семенець С.П., Семенець Л.М. Елементарна математика (підготовлено на основі концепції розвивальної освіти): [навч.-метод. посіб.] - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. - 144 с.

Додаткова

1. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф-тів педуніверситетів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.

2. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 32 с.
3. Бондарчук В.М. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.2. – Житомир: ЖДТУ, 2012.–100 с.
4. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: ТВіМС, 2000. – 163 с.
5. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2000. — 592 с.
6. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.1/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 279 с.
7. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. Ч.2/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 376 с.

Інформаційні ресурси

Бібліотечно-інформаційний ресурс (книжковий фонд, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки Державного університету «Житомирська політехніка», Житомирської обласної універсальної наукової бібліотеки ім. Олега Ольжича (http://www.lib.zt.ua/, 10014, м. Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33), Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (http://www.nbuv.gov.ua/, Київ, просп. 40-річчя Жовтня, 3 +380 (44) 525-81-04) та інших бібліотек .

Інституційний репозитарій «Житомирська політехніка».

5. ЗРАЗОК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ «ВВЕДЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»

1. Знайти область визначення функції $f\left(x\right)=\log_3\left(x+1\right)$.	А. $\left(-\infty;+\infty\right)$; Б. $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;+\infty\right)$; В. $\left(-1;+\infty\right)$; Г. $\left(1;+\infty\right)$; Д. $\left(-\infty;-1\right)$.
2. Знайти область визначення функції $f\left(x\right)=\sqrt{16-x^2}$.	А. $\left(-\infty;4\right)\cup\left(4;+\infty\right)$; Б. $\left(-4;4\right)$; В. $\left[-4;+4\right]$; Г. $\left(-\infty;4\right)$; Д. $\left[4;+\infty\right)$.
3. Яка з функцій є періодичною?	А. $y=x^2$; Б. $y=\left\|x\right\|$; В. $y=e^x$; Г. $y=ctg4x$; Д. $y=\ln x$.
4. Яка з функцій є парною?	А. $y=x^3$; Б. $y=x^2$; В. $y=\sin x$; Г. $y=e^x$; Д. $y=\log_7 x$.

5. Яка з функцій є непарною?	А. $y = \cos x$; Б. $y = x^2$; В. $y = e^x$; Г. $y = x^3$; Д. $y = \ln x$.
6. Яка з функцій є зростаючою на області визначення?	А. $y = \cos x$; Б. $y = x^2$; В. $y = x^3$; Г. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; Д. $y = \sin x$.
7. Обчислити значення функції $y = \sqrt{4 + x^2 - x^3}$ в точці $x = -2$.	А. 4; Б. 0; В. $\sqrt{6}$; Г. $0,5$; Д. $\sqrt{2}$.
8. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$.	А. 1; Б. 2; В. 3; Г. 4; Д. 5.
9. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,\frac{x}{2}}{7x}$.	А. $\dfrac{1}{2}$; Б. $\dfrac{1}{7}$;

	В. $\frac{1}{14}$; Г. $\frac{2}{7}$; Д. $\frac{7}{2}$.
10. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{3}}{2x}$.	А. $\frac{1}{2}$; Б. $\frac{1}{3}$; В. $\frac{2}{3}$; Г. $\frac{1}{6}$; Д. $\frac{3}{2}$.
11. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-3x^2+1}{5+2x-2x^4}$.	А. $-\frac{1}{2}$; Б. -2; В. $\frac{1}{5}$; Г. $-\frac{3}{2}$; Д..

12. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-x^2+x}{x^3-2x+7}$.	А. ∞; Б. 3; В. $\dfrac{3}{7}$; Г. $-\dfrac{1}{3}$; Д. 0.
13. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.	А. 0; Б. $\dfrac{1}{4}$; В. 4; Г. 8; Д. $\dfrac{1}{3}$.
14. Знайти $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{x+8}-2}$.	А. 0; Б. 2; В. 4; Г. 8; Д. $\dfrac{2}{5}$.
15. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{arctg\,2x}$.	А. 9; Б. 3; В. 1; Г. 0; Д. ∞
16. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}$.	А. 0; Б. 1; В. e; Г. e^2;

	Д. e^4.
17. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+7}{x^2-5}$.	А. 0; Б. 1; В. 2; Г. 4; Д. ∞.
18. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{5x}$.	А. 0; Б. 1; В. ∞; Г. e^2; Д. e^5.
19. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{arc\sin 4x}$.	А. 0; Б. 1; В. 2; Г. 4; Д. 8.
20. Яка з функцій має точки розриву?	А. $y=x^2$; Б. $y=\lvert x\rvert$; В. $y=e^x$; Г. $y=ctg4x$; Д. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Навчальне видання

Сергій Петрович Семенець,
Василь Миколайович Бондарчук,
Руслан Миколайович Головня,
Сергій Петрович Давидчук

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ІЗ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»

ЧАСТИНА 1

ВВЕДЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Надруковано з оригінал-макета авторів

Підписано до друку 10.09.20. Формат 60x90/16.
Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк різографічний.
Ум. друк. арк. 3,3. Обл. вид. арк. 3,6. Наклад 100. Зам. 130.

РВВ «Житомирська політехніка»
Державний університет «Житомирська політехніка»,
вулиця Чуднівська, 103, м. Житомир, 10005