5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

де p, q – дійсні числа, називаються ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (1) у вигляді $y = e^{kx}$, де k – стале число, вибір якого означимо нижче.

Підставляючи функцію $y = e^{kx}$ і її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ в ліву частину рівняння (1), дістаємо

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то функція $y = e^{kx}$ буде розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли $k^2 + pk + q = 0 \qquad (2)$

Для невідомого коефіцієнта k отримали квадратне рівняння (2), яке називається характеристичним рівнянням рівняння (1). Зауважимо, що характеристичне рівняння складається з даного рівняння (1) шляхом заміни y'', y', y у відповідно на k^2, k, 1.

Розв'язуючи рівняння (2), знаходимо його корені k_1 і k_2

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

ІДЗ 31 а)

I. k_1 і k_2 – дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);
II. k_1 і k_2 – дійсні рівні ($k_1 = k_2$);
III. k_1 і k_2 – комплексні числа ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta_i$).

Випадок I.

розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} \qquad (3)$$

Випадок II.

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x) \qquad (4)$$

Випадок III.

Тому, якщо корені характеристичного рівняння комплексні: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$, то загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (5)$$

Приклад 1.   Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Маємо ЛОДР ІІ-го порядку із сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

За теоремою Вієта його корені

$$k_1 = -1,\ k_2 = 3 \text{ – дійсні і різні.}$$

Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Приклад 2.   Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Маємо ЛОДР ІІ-го порядку із сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 6k + 9 = 0.$$

Його корені $k_1 = k_2 = -3$ (дійсні і рівні)

Тому, за формулою (4) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$$

Приклад 3.   Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Маємо ЛОДР ІІ-го порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 5 = 0 \qquad (Д = 16 - 20 = -4 < 0)$$

має два комплексно-спряжених корені $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$ ($\alpha = 2$; $\beta = 1$). Отже, за формулою (5) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

де p, q – дійсні числа, називається ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами, якщо $f(x) \neq 0$.

Згідно з теоремою 5 п. 4 загальний розв’язок ЛНДР (1) має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

де $\tilde{y}$ – загальний розв’язок відповідного ЛОДР: $y'' + py' + qy = 0$, а y^* – який-небудь частинний розв’язок ЛНДР (1).

Приклад ІДЗ-31 б)

а) права частина f(x) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{mx}, \qquad (2)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; m – дійсне число, що може дорівнювати й нулю.

У цьому випадку частинний розв’язок шукають у вигляді

$$y^* = x^r\, Q_n(x)e^{mx},$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня, що й $P_n(x)$, r – кратність, з якою входить m у число коренів характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0.$$

$r = 0$, якщо m не є коренем характеристичного рівняння $m \neq k_1$ і $m \neq k_2$;

$r = 1$, якщо m є простим коренем характеристичного рівняння $m = k_1 \neq k_2$ $(m = k_2 \neq k_1)$;

$r = 2$, якщо m є двократним коренем характеристичного рівняння $m = k_1 = k_2$.

Невідомі коефіцієнта многочлена $Q_n(x)$ шукають методом невизначених коефіцієнтів, суть якого розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = 4xe^{3x}$$

Маємо ЛНДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 4xe^{3x}$.

Загальний розв'язок даного рівняння має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

має дійсні і різні корені $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.

Тому $\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

2) Знайдемо y^* – частинний розв'язок ЛНДР. Права частина рівняння $4xe^{3x}$ має вигляд $P_1(x)e^{3x}$, де $P_1(x) = 4x$ – многочлен першого степеня. Оскільки $m = 3$ є простим коренем характеристичного рівняння, т. б. $m = k_2 = 3$, то $r = 1$ і частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = xQ_n(x)e^{3x},$$

або

$$y^* = x(Ax + B)e^{3x}.$$

Маємо $y^{*\prime} = (Ax^2 + Bx)'e^{3x} + (Ax^2 + Bx)'(e^{3x})' = (2Ax + B)\, e^{3x} + + (Ax^2 + Bx)e^{3x} \cdot 3 = (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B)e^{3x}$,

$y^{*\prime\prime}=(6Ax + 2A + 3B)\, e^{3x} + (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B)e^{3x}\cdot 3= = (9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B)\, e^{3x}$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$y^{*\prime\prime} - 4y^{*\prime} + 3y^* = (9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B)\, e^{3x} -$
$- (12Ax^2 + (8A + 12B)x + 4B)e^{3x} + (3Ax^2 + 3Bx)e^{3x} = 4xe^{3x}$,

або

$$(4Ax + 2A + 2B)e^{3x} = 4xe^{3x}.$$

Скоротивши на $2e^{3x} \neq 0$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах, дістанемо систему

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 2A = 2 \\ x^0 & A + B = 0 \end{array}\Bigg\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1 \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$y^* = x(x - 1)\, e^{3x}$.

Загальний розв'язок даного рівняння:

$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{3x} + x(x - 1)e^{3x};$

Приклад ІДЗ-31 в)

б) права частина $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = M\cos bx + N\sin bx, \qquad (3)$$

де M, N, b – дійсні числа, причому $b \neq 0$.

Тоді частинний розв'язок ЛНДР (1) шукають у вигляді

$$y^* = A\cos bx + B\sin bx,$$

якщо bi не є коренем характеристичного рівняння, і

$$y^* = x(A\cos bx + B\sin bx),$$

якщо bi є коренем характеристичного рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' + 13y = 29\sin 2x.$$

Маємо ЛНДР ІІ-го порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 29\sin 2x$.

Загальний розв'язок цього рівняння має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 + 4k + 13 = 0$$

має комплексні корені

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm 3i \quad (\alpha = -2; \beta = 3).$$

Тому $\tilde{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

2) Знайдемо y^* – частинний розв'язок ЛНДР. Права частина його $29\sin 2x$ має вигляд $M\cos 2x + N\sin 2x$, де $M = 0$, $N = 29$. Оскільки число $2i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Продиференціювавши двічі, отримаємо

$$y^{*\prime} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

$$y^{*\prime\prime} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$$y^{*\prime\prime} + 4y^{*\prime} + 13y^* = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$
$$+ 13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 29\sin 2x,$$

або $(9A + 8B)\cos 2x + (-8A + 9B)\sin 2x = 29\sin 2x$

Прирівнюючи коефіцієнти при cos 2x і sin 2x в обох частинах рівності, маємо систему

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & 9A+8B=0 \\ \sin 2x & -8A+9B=29 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{8}{5}, \\ B=\dfrac{9}{5}. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^*=-\frac{8}{5}\cos 2x+\frac{9}{5}\sin 2x$$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y=\tilde{y}+y^*=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)-\frac{8}{5}\cos 2x+\frac{9}{5}\sin 2x;$$