4. Лінійні диференціальні рівняння вищого порядку.

Означення 1. Рівняння виду

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \qquad (1)$$

де функції $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$, $f(x)$ задані і неперервні на деякому інтервалі $(a; b)$, називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Функція $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$ називають коефіцієнтами рівняння (1), а функцію $f(x)$ – правою частиною рівняння (1).

У випадку, коли всі коефіцієнти є сталі дійсні числа, рівняння (1) називається рівнянням із сталими коефіцієнтами.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (1) називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням або рівнянням без правої частини.

Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то рівняння (1) називається лінійним неоднорідним або рівняння з правою частиною.

Наприклад, рівняння $y'' \sin x + 3y' - \frac{1}{x} y = 0$

є лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) другого порядку, а рівняння

$$5y''' - y'' + 4y' + 2y = \cos^2 3x$$

– лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) третього порядку із сталими коефіцієнтами.

У ІДЗ-29 представлено частинний випадок диференціальних рівнянь другого порядку (не містять шуканої функції y)

3. Частинні випадки диференціальних рівнянь другого порядку.

1) Рівняння виду

$$y'' = f(x, y') \qquad (1)$$

Права частина цього рівняння не містить шуканої функції y.

За допомогою підстановки $y' = p(x)$ зводиться до рівняння першого порядку:

$$p' = f(x, p)$$

Приклад 1. Розв’язати рівняння $y'' + \frac{y'}{x} = x$

Маємо диференціальне рівняння виду $y'' = f(x, y')$, яке не містить y.

Нехай $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'(x)$.

Отже, після заміни рівняння перетворилось у диференціальне рівняння першого порядку: $p' + \frac{1}{x} \cdot p = x$.

Це лінійне диференціальне рівняння. Розв'язуємо його вже відомим методом.

Покладаючи $p = uv$, знаходимо $p' = u'v + uv'$. Дістаємо

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = x,$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{1}{x}v = 0, \\ u'v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x}, \\ \dfrac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}, \\ \dfrac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|v| = -\ln|x|, \\ \dfrac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{x}, \\ \displaystyle\int du = \int x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{x}, \\ u = \dfrac{x^3}{3} + C_1. \end{cases}$$

Виходить $p = uv = \left(\dfrac{x^3}{3} + C_1\right)\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x}$,

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x},$$

звідки $y = \displaystyle\int\left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{9} + C_1\ln|x| + C_2$ – загальний розв'язок заданого в умові диференціального рівняння.

У ІДЗ-30 представлено частинний випадок диференціальних рівнянь другого порядку (не містять змінної x)

2) Рівняння виду

$$y'' = f(y, y') \qquad (2)$$

Права частина цього рівняння не містить явно незалежну змінну x. Зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p(y)$, де, на відміну від переднього випадку, p вважається функцією від y. Тоді, використовуючи правило диференціювання складної функції, дістаємо $y'' = p_y' \cdot y_x' = p'p$. Рівняння (2) матиме вигляд $p'p = f(y, p)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Маємо диференціальне рівняння виду $y'' = f(y, y')$, яке не містить явно x.

Нехай $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p'p$. Отже, маємо $2yp'p + p^2 = 0$ – диференціальне рівняння першого порядку відносно p з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо:

$$2y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = -p^2,$$

$$2y\,dp = -p\,dy, \quad p \neq 0$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} + \ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = \ln\left|\frac{C_1}{\sqrt{y}}\right|,$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Підставляючи замість p його значення, матимемо

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\int \sqrt{y}\,dy = \int C_1\,dx$$

$$\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} = C_1 x + C_2$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9(C_1 x + C_2)}{4}}$$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Досліджуємо розв'язок p = 0: $p = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow y = C.$

Розв'язок y = C не є особливим, тому що отримується з загального при $C_1 = 0$.

Так знаходиться загальний розв'язок диференціального рівняння. У завданнях **ІДЗ-30** потрібно знайти розв'язок, що задовольняє початковим умовам (розв'язати задачу Коші). Насправді розв'язання, як і в ІДЗ-27 й ІДЗ-28, зводиться до відшукання C_1 , C_2