Лекція 9. Середньоквадратичне наближення функцій

## Постановка задачі

Розглянутий в попередніх лекціях метод наближення функцій – інтерполяція забезпечує зручне наближення на відносно невеликому відрізку при невеликій кількості вузлів інтерполяції. При цьому за умову близькості наближуваної *f*(*x*) і наближуючої *φ*(*x*) брали їх рівність у вузлах інтерполяції. В багатьох випадках потрібно мати єдину просту для обчислень апроксимуючу функцію *φ*(*x*) на значному відрізку. При цьому значення заданої функції *f*(*x*) знайдені неточно, наприклад, отримані експериментально і містять похибки через недосконалість вимірювальних приладів і вплив різних випадкових факторів. Тоді для визначення апроксимуючої функції *φ*(*x*) вдаються до середньоквадратичного наближення (СКН). СКН краще представляє реальну функцію *f*(*x*), ніж інтерполяційні многочлени в імовірнісному сенсі. В теорій ймовірностей доводиться, що отримані таким чином параметри апроксимуючої функції *φ*(*x*) найбільш імовірні, якщо похибки підпорядковані нормальному закону розподілу. В разі неточних даних кажуть, що функція СКН згладжує локальні похибки.

Отже, розглянемо задачу наближення функції *f*(*x*) на [*a*, *b*] деякою апроксимуючою функцією *φ*(*x*). При СКН невідомі параметри визначають з наступної умови близькості функцій:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (1) |

Тут позначення − норма функції *f*. Норма функції визначається через скалярний добуток функцій:

Скалярний добуток функцій можна визначити так:

неперервний на відрізку [*a*, *b*] (інтегральний):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

дискретний на множині точок *xi* (*i* = 0,1, … *n*):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Тоді норма функції буде рівною

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

І відповідно умову близькості функцій *f*(*x*) і *φ*(*x*) при СКН можна переписати так:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

## Метод найменших квадратів (дискретне СКН)

Нехай, вивчаючи невідому функціональну залежність між *y* та *x* *y* = *f*(*x*), в результаті серії експериментів був виконаний ряд вимірів і отримана сукупність точок (*x*0, *y*0), (*x*1, *y*1), …, (*xn yn*). Необхідно знайти наближену залежність *φ*(*x*), значення якої при *x* = *xi* (*i* = 0,1, … *n*) мало відрізняються від експериментальних даних. Умову малості відхилень *φ*(*x*) від *f*(*x*) запишемо так:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Тут необхідно звернути увагу на те, що апроксимуюча функція *φ* залежить як від незалежної змінної *x*, так і від параметрів *c*1, *c*2, …, *cm*, які необхідно оцінити. На цьому не акцентувалась увага в попередніх лекціях, але в даному випадку це необхідно підкреслити. Відповідно і функція *S* залежить від шуканих параметрів *S* = *S*(*c*1, *c*2, …, *cm*). *Метод найменших квадратів* (МНК) полягає в знаходженні параметрів *c*1, *c*2, …, *cm* з умови мінімуму функції *S* = *S*(*c*1, *c*2, …, *cm*)*.*

Оскільки тут параметри *c*1, *c*2, …, *cm* виступають в ролі незалежних змінних функції *S*, то її мінімум знайдемо, прирівнюючи до нуля частинні похідні по цих змінних:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Отримані співвідношення – система рівнянь для визначення *c*1, *c*2, …, *cm*.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів для широко використовуваного на практиці окремого випадку, коли функція *φ*(*x*) являється лінійною за невідомими параметрами *c*1, *c*2, …, *cm*, тобто має вид узагальненого поліному:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image1.jpeg | (8) |

де *φ*0(*x*), *φ*1(*x*), …, *φm*(*x*) – відомі функції *х*. Формула для визначення суми квадратів відхилень з (6) прийме вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Для складання системи (7) продиференціюємо *S* по змінним *ck* (*k* = 0,1, … *m*):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Прирівнюючи знайдені похідні до нуля, отримаємо наступну систему рівнянь:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

Система (11) є системою лінійних алгебри рівнянь, її можна записати в наочному векторно-матричному виді. Для цього введемо вектори дослідних даних ***у*** і невідомих параметрів ***c***, а також матрицю **Ф** таким чином

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Тут вектори ***у*** і ***c*** мають розмірність *n* + 1 і *m* + 1 відповідно, а матриця **Φ** має розмірність (*n* + 1)х(*m* + 1). Для її елементів справедливий вираз

|  |  |
| --- | --- |
| **Φ*i j* =***φj*(*xi*). | () |

Неважко переконатися, що вираз, що стоїть в квадратних дужках в (11), є *i*-ю компонентою вектору **Φc** – **у**, а кожне рівняння (11) є рівністю нулю *k*-го компонента вектора **ΦT**(**Φc** – **у**), де **ΦT** – транспонована матриця. Таким чином, систему (11) можна записати у виді

**ΦT**(**Φc** – **у**) = 0

або

|  |  |
| --- | --- |
| **(ΦTΦ)c** = **ΦTу**. | (13) |

Матриця цієї системи **ΦTΦ** має розмірність(*m* + 1)х(*m* + 1), вектор **c** є шуканим.

Приклад

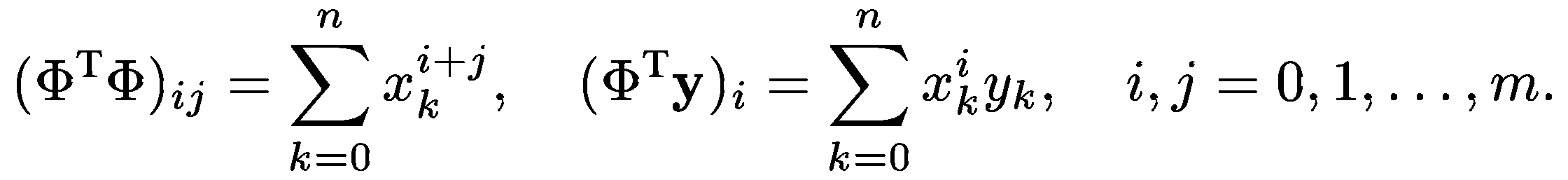
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Методом найменших квадратів вивести апроксимуючий поліном для функції *y* = *f*(*x*), заданої таблично:   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0.75 | 1.50 | 2.25 | 3.00 | 3.75 | | *y* | 2.50 | 1.20 | 1.12 | 2.25 | 4.28 |   В якості апроксимуючої функції візьмемо квадратний трьохчлен:  *φ*(*x*) = *a*0*x* + *a*1*x* + *a*2*x*2.  В даному випадку маємо  *m* = 2, *n* = 4, *φ*0(*x*) = 1, *φ*1(*x*) = *x*, *φ*2(*x*) = *x*2,    Після обчислення матриці **ΦTΦ** і вектора **ΦTу** (наведені округлені значення)    Система рівнянь приймає вид    Звідси знаходимо параметри апроксимуючого полінома:  *a*0 = 4.82, *a*1 = –3.88, *a*2 = 1.00 .  Таким чином, отримаємо наступне наближення функції, заданої таблично:  *φ*(*x*) = 4.82*x* + –3.88*x* + 1.00*x*2.    Рис. 1 |

На завершення можна зробити деякі зауваження.

1. Як видно з розглянутого прикладу, матриця **ΦTΦ** є симетричною, тобто (**ΦTΦ**)*ij* = (**ΦTΦ**)*ji* (*i*, *j* = 0,1, … *m*).
2. У випадку використання в якості апроксимуючої функції многочлена

*φ*(*x*) = *a*0*x* + *a*1*x* + … + *amxm*.

елементи матриці **ΦTΦ** і компоненти вектора **ΦTу** можна обчислити за формулами



## Наближення ортогональними поліномами

Використавши означення скалярного добутку функцій (3) систему (13) можна також записати в наступному виді:

|  |  |
| --- | --- |
| *C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image1.jpeg* | (14) |

Ця система називається системою рівнянь у *нормальній формі* (термін з опису способу розв’язання систем лінійних рівнянь методом найменших квадратів, коли невідомих менше ніж рівнянь системи). Система (14) також налічує (*m* + 1) рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів *cj* (*j* = 0,1, … *m*). Коефіцієнти *ci* визначаються за занченнями функції *f*, вибраної на множині точок *xi*, *i* = 0,1, … *n* , *n* ≥ *m* (причому, якщо *n* = *m*, апроксимуючий поліном буде співпадати з поліномом Лагранжа).

Якщо степень апроксимуючого полінома *φ*(*x*) порівняно велика, то обчислення за методом найменших квадратів можуть стати досить громіздкими. Інколи вигідно використовувати метод побудови апроксимуючого полінома, оснований на понятті ортогональних функцій.

Фукнції *f*(*x*) і *g*(*x*) називаються ортогональними на множині точок *xi* (*i* = 0,1, … *n*), якщо

Наприклад, функцхї *f*(*x*) = З*x*2 – 15*x* + 10 і *g*(*x*) = 2*x* + 5 ортогональні на системі точок *xi*= *i* (*i* = 0, 1, 2, 3, 4, 5). Наспрвді, оскільки

*f*(0) = 10, *f*(1)= –2, *f*(2) = –8, *f*(3) = –8, *f* (4) = –2, *f*(5) = 10,

*g*(0) = 5, *g*(1) = –3, *g*(2) = –1, *g*(3) = 1, *g*(4) = 3, *g*(5) = 5,

то

Отже, апроксимуючий поліном *φ*(*x*) можна будувати у вигляді узагальненого полінома (8)

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image1.jpeg |  |

де базисні функції *φ*0(*x*), *φ*1(*x*), …, *φm*(*x*) – поліноми, ортогональні на заданій системі точок *xi* (*i* = 0,1, … *n*):

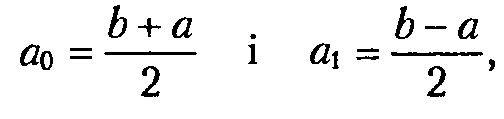
Оскільки для ортогональних поліномів виконуються умови (*φi*, *φj*) = 0 (*i*≠*j*) і ǁ*φi*ǁ > 0, обчислення коефіцієнтів *cj* значно спрощується:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Дані щодо найбільш широко застосовуваних ортогональних поліномів зведені у таблицю

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Властивості | Полином Лежандра | Полином Чебишева | Полином Ерміта |
| Область визначення | –1 ≤ *x*≤ 1 | –1 ≤ *x*≤ 1 | –∞ < x < +∞ |
| *φ*0 | *P*0(*х*) = 1 | *Т*0(*х*) = 1 | *Н*0(*х*) = 1 |
| *φ*1 | *P*1(*х*) = *х* | *Т*1(*х*) = *х* | *Н*1(*х*) = *x* |
| *φ*2 | *P*2(*х*) = 1/2 (З*x*2 – 1) | *Т*2(*х*) = 2*х*2– 1 | *Н*2(*х*) = 4*x*2 – 2 |
| Рекурентна формула обчислення наступних поліномів |  |  |  |
| Загальна формула опису |  |  |  |

У разі застосування поліномів Лежандра і Чебишева слід здійснити перехід від реального інтервалу інтерполяції [*а*, *b*] до області визначення ортогональних поліномів за допомогою заміни змінних *х* = *a*0 + *a1xd*, а також переобчислити вибрані значення *f*(*x*) у значення *f*1(*xd*). Враховуємо, що на нижній межі інтервалу *х* = *a* і *xd* = –1, тому х = *a*0 + *a*1(–1) на верхній межі інтервалу *х*=*b* і *xd* = 1, у результаті *x* = *a*0 +  *a*1(1). Отже, отримуємо:



тому

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Приклад

|  |
| --- |
|  |