Лекція 8. Інтерполяція сплайнами

Коли проміжок [*a*, *b*], на якому необхідно наблизити функцію *f*(*x*) функцією *φ*(*x*), великий і немає підстав вважати функцію *f*(*x*) досить гладкою (неперервність похідних високих порядків), тоді немає сенсу використання для наближення поліномів високого порядку. У цих умовах більш перспективним є застосування кусково-поліноміальної інтерполяції. Так відрізок [*a*, *b*] розбивається на кілька ділянок, а потім на кожній ділянці будується інтерполяційний поліном, степінь якого буде меншим, ніж при використанні всіх вузлів відрізку. При цьому звичайно у точках з’єднання сусідніх ділянок поліноми повинні мати однакові значення але похідні в цих точках можуть мати розриви. Позбутися розриву похідних на кінцях ділянок можна за допомогою сплайнів.

Зараз широке поширення для інтерполяції отримало використання кубічних сплайн-функцій – спеціальним чином побудованих многочленів третього степеня. Вони є деякою математичною моделлю гнучкого тонкого стержня з пружного матеріалу. Якщо закріпити його в двох сусідніх вузлах інтерполяції із заданими кутами нахилів *α* і β (рис. 1), то між точками закріплення цей стержень (механічний сплайн) прийме деяку форму, яка мінімізує його потенційну енергію.



Рис. 1. Механічний сплайн

Нехай форма цього стержня визначається функцією *φ* = *S*(*x*). З курсу опору матеріалів відомо, що рівняння вільної рівноваги має вигляд *S*IV(*х*) = 0. Звідси витікає, що між кожною парою сусідніх вузлів інтерполяції функція *S*(*х*) є многочленом степеня не вище за третього. Запишемо її у виді

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Взагалі поліном третього степеня будемо називати кубічним сплайном *S*(*x*), що наближує вихідну функцію *f*(*x*) і заданий на сітці впорядкованих вузлів *a* = *x*0 < *x*1 < … < *xn* = *b*, якщо задовольняються такі умови:

* на кожному відрізку [*xi*­1, *xi*], *i* = 1, 2, … *n* функція *S*(*x*) є поліномом третього степеня;
* функція *S*(*x*) і її перша і друга похідні неперервні на відрізку [*a*, *b*];
* у вузлах інтерполяції *S*(*xi*) = *f*(*xi*), *i* = 0,1,2, … *n*.

Для визначення коефіцієнтів *ai*, *bi*, *ci*, *di* на усіх *n* елементарних відрізках необхідно отримати 4*n* рівнянь. Частина з них витікає з умов проходження графіку функції *S*(*х*) через задані точки, тобто *Si*(*xi*– 1) = *yi*– 1, *Si*(*xi*) = *yi*. Ці умови можна записати у виді

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2)(3) |

Ця система містить 2*n* рівнянь. Для отримання решти рівнянь задамо умови неперервності перших і других похідних у внутрішніх вузлах інтерполяції, тобто умови гладкості другого порядку кривої в усіх точках:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Вичислимо похідні многочлена(1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Підставляючи ці вирази в (4), отримуємо 2*n* – 2 рівнянь

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6)(7) |

Тепер не вистачає двох рівнянь, які отримуються з умов закріплення кінців сплайна. Зазвичай ці умови є співвідношеннями, в які входять значення першої і другої похідних функції *S*(*х*) в точках *x*0 і *xn* . Тому вказані значення повинні входити в дану систему рівнянь. З (5) витікає, що $S\_{i}^{'}$(*xi*– 1) = *bi*, $S\_{i}^{''}$(*xi* – 1) = 2*ci*. Звідси $S\_{1}^{'}$(*x*0) = *b*1, $S\_{1}^{''}$(*x*0) = 2*c*1, тобто значення похідних в точці *x*0 є присутніми в системі. Значення ж похідних в точці *xn* в системі відсутні. Введемо їх в систему за допомогою додаткових невідомих *bn*+1 і *cn*+1:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

З умов неперервності похідних в точці *xn* витікає, що

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Таким чином, співвідношення (6), (7) можна розглядати для діапазону індексів.

|  |  |
| --- | --- |
| *x* = 1,2,..., *n*. | (10) |

Система (2), (3), (6), (7) з урахуванням (10) містить 4*n*+ 2 невідомих і 4*n* рівнянь і може бути доповнена, наприклад, наступними умовами закріплення кінців сплайна:

|  |  |
| --- | --- |
| $S\_{1}^{'}$(*x*0) = *b*1 = *k*1, $S\_{1}^{'}$(*xn*) = *b*n+1 = *k*2 | (11) |

або

|  |  |
| --- | --- |
| $S\_{1}^{''}$(*x*0) = 2*c*1 = *m*1, $S\_{1}^{''}$(*xn*) = 2*cn*+1 = *m*2, | (12) |

де *k*1, *k*2, *m*1, *m*2 – задані числа.

Зокрема, при заданих кутах нахилу *α* і β (рис. 1)

*k*1= tgα, *k*2 = tgβ.

При вільному закріпленні кінців можна прирівняти нулю кривизну лінії в точках закріплення. Отримувана таким чином функція називається вільним кубічним сплайном. З умови нульової кривизни на кінцях слідує рівність нулю других похідних в цих точках. Звідси

*m*1 = *m*2 = 0.

Співвідношення (2), (3), (6), (7), а також (11) або (12) складають систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів *ai*, *di* (i = 1, 2, ..., *n*) і *bi*, *ci* (i = 1, 2, ..., *n* + 1). Її можна розв’язати одним з загальних методів розв’язання СЛАР. Проте з метою економії пам'яті комп'ютера і машинного часу цю систему можна привести до зручнішого виду. З умови (2) відразу можна знайти усі коефіцієнти *аi*. Далі, з(7) отримаємо.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Підставимо ці співвідношення, а також значення *аi* = *уi*– 1 в (3) і знайдемо звідси коефіцієнти

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Враховуючи вирази (13) і (14), виключаємо з рівняння (6) коефіцієнтів *di* і *bi*. Остаточно отримаємо наступну систему рівнянь тільки для коефіцієнтів *ci*.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |
|  | (16) |

або

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

Тут рівняння (16) використовуються при застосуванні умов (11), а рівняння (17) – при застосуванні умов (12). Матриця системи (15) тридіагональна, тобто ненульові елементи знаходяться лише на головній і двох сусідніх з нею діагоналях, розташованих згори і знизу. Для її розв’язання доцільно використати метод прогонки. По знайденим з системи (15), (16) або (17) коефіцієнтам *c*1 легко визначити коефіцієнти *di*, *bi*.

Відмітимо, що кубічна сплайн-функція, що задовольняє умовам (11) або (12), володіє найменшою (в деякому розумінні) кривизною серед усіх функцій, що двічі безперервно диференціюються, на відрізку [x0, *xn*] із заданими значеннями у вузлах інтерполяції, що задовольняють умовам (11) або (12). А саме,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

для усіх *f*(*x*) з вказаного класу функцій.

Приклад

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Побудуємо кубічний сплайн, який апроксимує таку табличну функцію:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *xi* | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *yi* | –2 | 1 | 4 | 15 | 17 | 13 |

Тут кількість вузлів *N* + 1 = 6, кількість інтервалів для побудови сплайнів *N* = 5, величина кроку (інтервалу) *h* = 1. Побудуємо вільний сплайн, $S^{''}\left(x\_{0}\right)=0,S^{''}\left(x\_{n}\right)=0$. Тобто *c*1 = 0, *с*6 = 0.Одержимо таку систему рівнянь за (15)(*i* = 2) 1∙*c*1 + 2∙(1 + 1)∙*c*2 + 1∙*c*3 = 3∙$\left(\frac{4-1}{1}-\frac{1-\left(-2\right)}{1}\right)$,(*i* = 3) 1∙*c*2 + 2∙(1 + 1)∙*c*3 + 1∙*c*4 = 3∙$\left(\frac{15-4}{1}-\frac{4-1}{1}\right)$,(*i* = 4) 1∙*c*3 + 2∙(1 + 1)∙*c*4 + 1∙*c*5 = 3∙$\left(\frac{17-15}{1}-\frac{15-4}{1}\right)$,(*i* = 5) 1∙*c*4 + 2∙(1 + 1)∙*c*5 + 1∙*c*6 = 3∙$\left(\frac{13-17}{1}-\frac{17-15}{1}\right)$,*c*1 = 0, *с*6 = 0або4∙*c*2 +   *c*3 = 0,*c*2 + 4∙*c*3 +   *c*4 = 24,*c*3 + 4∙*c*4 +   *c*5 = –27,*c*4 + 4∙*c*5 = –18.Отримана система є три діагональною може бути представлена в загальному виді так:$$\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{c}B\_{0}z\_{0}+C\_{0}z\_{1}=D\_{0} \\A\_{i}z\_{i-1}+B\_{i}z\_{i}+C\_{i}z\_{i+1}=D\_{i}, i=1,2,…,n-1.\end{array}\\A\_{n}z\_{n-1}+B\_{n}z\_{n}=D\_{n} \end{array}\right.$$Такі системи розв’язуються методом прогонки за наступною обчислювальною схемою:$$1) α\_{0}=-\frac{C\_{0}}{B\_{0}}, β\_{0}=-\frac{D\_{0}}{B\_{0}};$$$$2) α\_{i}=-\frac{C\_{i}}{α\_{i-1}A\_{i}+B\_{i}}, β\_{i}=\frac{D\_{i}-β\_{i-1}A\_{i}}{α\_{i-1}A\_{i}+B\_{i}}, i=1,2,…,n-1;$$$$3) z\_{n}=\frac{D\_{n}-β\_{n-1}A\_{n}}{α\_{n-1}A\_{n}+B\_{n}};$$$$4) z\_{i}=α\_{i}z\_{i+1}+β\_{i} i=n-1,n-2,…,1,0.$$В даному випадку *z*0 = *с*2, *z*1 = *с*3, *z*2 = *с*4, *z*3 = *c*5. (В разі побудови змикаючого сплайна індекси *c* і *z* будуть співпадати).Результати обчислень занесемо в таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *Ai* | *Bi* | *Ci* | *Di* | *αi* | β*i* | *zi* |
| 0 |  | 4 | 1 | 0 | $$-\frac{1}{4}$$ | 0 | 1,8080 |
| 1 | 1 | 4 | 1 | 24 | $$-\frac{2}{7}$$ | $$-\frac{48}{7}$$ | –7,2319 |
| 2 | 1 | 4 | 1 | –27 | $$-\frac{7}{26}$$ | $$\frac{141}{26}$$ | 1,3117 |
| 3 | 1 | 4 |  | –18 |  |  | –6,2784 |

$$1) α\_{0}=-\frac{C\_{0}}{B\_{0}}=-\frac{1}{4},β\_{0}=-\frac{D\_{0}}{B\_{0}}=-\frac{0}{4}=0.$$$$2) α\_{1}=-\frac{C\_{1}}{α\_{0}A\_{1}+B\_{1}}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}∙1+4}=-\frac{2}{7}, β\_{1}=-\frac{D\_{1}-β\_{0}C\_{1}}{α\_{0}A\_{1}+B\_{1}}=-\frac{24-0∙1}{-\frac{1}{2}∙1+4}=-\frac{48}{7}.$$$$ α\_{2}=-\frac{C\_{2}}{α\_{1}A\_{2}+B\_{2}}=-\frac{1}{-\frac{2}{7}∙1+4}=-\frac{7}{26},β\_{2}=-\frac{D\_{2}-β\_{1}C\_{2}}{α\_{1}A\_{2}+B\_{2}}=-\frac{-27-\left(-\frac{48}{7}\right)∙1}{-\frac{2}{7}∙1+4}=\frac{141}{26}.$$$$3) z\_{3}=\frac{D\_{4}-β\_{2}A\_{3}}{B\_{3}+α\_{2}A\_{3}}=\frac{-18-\frac{141}{26}∙1}{4+\left(-\frac{7}{26}\right)∙1}=-\frac{609}{97}≈-6,2784.$$$$4) z\_{2}=α\_{2}∙z\_{3}+β\_{2}=\left(-\frac{7}{26}\right)\left(-\frac{609}{97}\right)+\frac{141}{26}=\frac{5980}{4559}≈1.3117.$$$$ z\_{1}=α\_{1}∙z\_{2}+β\_{1}=\left(-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5980}{4559}\right)+\left(-\frac{48}{7}\right)=-\frac{230792}{31913}≈-7,2319.$$$$ z\_{0}=α\_{0}∙z\_{1}+β\_{0}=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{230792}{31913}\right)+0=\frac{57698}{31913}≈1,8080.$$Отже:*c*1 = 0, *c*2 ≈ 1,8080, *c*3 ≈ –7,2319, *c*4 = 1,3117, *с*5 = –6,2784, *с*6 = 0.Тепер можна знайти *bi*, *di*:$$b\_{1}=\frac{y\_{1}-y\_{0}}{h}-\frac{h}{3}\left(c\_{2}+2c\_{1}\right)=\frac{1-\left(-2\right)}{1}-\frac{1}{3}\left(\frac{57698}{31913}+2∙0\right)=\frac{229519}{95739}≈2,3973.$$$$b\_{2}=\frac{y\_{2}-y\_{1}}{h}-\frac{h}{3}\left(c\_{3}+2c\_{2}\right)=\frac{4-1}{1}-\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{230792}{31913}\right)+2∙\frac{57698}{31913}\right)=\frac{402613}{95739}≈4,2053.$$…$$d\_{1}=\frac{c\_{2}-c\_{1}}{3∙h}=\frac{\frac{57698}{31913}-0}{3∙1}=\frac{57698}{95739}≈0,6027.$$$$d\_{2}=\frac{c\_{3}-c\_{2}}{3∙h}=\frac{-\frac{230792}{31913}-\frac{57698}{31913}}{3∙1}=-\frac{288490}{95739}≈-3,0133.$$… |

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Приклад

|  |
| --- |
|  |