Лекція 7. Наближення функцій. Інтерполяція

## Постановка задачі наближення функцій

Нехай величина *y* є функцією аргументу *x*. Це означає, що будь-якому значенню *x* з області визначення поставлено у відповідність значення *y*. В той же час на практиці часто невідомий явний зв'язок між *y* і *x*, тобто неможливо записати цей зв'язок виді деякої залежності *y* = *f*(*x*). Іноді навіть відома залежність *y* = *f*(*x*) виявляється настільки громіздкою (наприклад, містить важко обчислювані вирази, складні інтеграли і т. п.), що її використання у практичних розрахунках вимагає надто багато часу.

Найбільш поширеним і практично важливим випадком, коли вид зв'язку між параметрами *х* і *у* невідомий, являється завдання цього зв'язку у вигляді деякої таблиці {*xi*, *yi*}. Це означає, що дискретній множині значень аргументу {*xi*} поставлена у відповідність множина значень функції {*yi*} (*i* = 0, 1, ..., *n*). Ці значення – або результати розрахунків, або експериментальні дані. На практиці нам можуть знадобитися значення величини *y* і в інших точках, відмінних від вузлів *xi*. Проте отримати ці значення можна лише шляхом дуже складних розрахунків чи проведенням дорогих експериментів. Таким чином, з точки зору заощадження часу і засобів ми приходимо до необхідності використання наявних табличних даних для наближеного обчислення шуканого параметра *у* при будь-якому значенні (з деякій області) визначального параметра *х*, оскільки точний зв'язок *у* = *f*(*x*) не відомий (або нам недоцільно ним користуватися).

Цій меті і служить задача наближення (*апроксимації*) функцій: задану функцію *f*(*x*) вимагається приблизно замінити (*апроксимувати*) деякою функцією *φ*(*x*) так, щоб відхилення (в деякому сенсі) *φ*(*x*) від *f*(*x*) в заданій області було найменшим. Функція *φ*(*x*) при цьому називається *апроксимуючою*.

Апроксимація розглянутого вище типу, при якій наближення будується на заданій дискретній множині точок {*xi*}, називається *точковою*. До неї відносяться інтерполяція, середньоквадратичне наближення та ін. При побудові наближення на безперервній множині точок (наприклад, на відрізку) апроксимація називається *неперервною* (або інтегральною). До безперервної апроксимації відноситься, наприклад, рівномірне наближення.

На практиці досить важливим є випадок, коли апроксимуючу функцію *φ*(*x*), якою оперують під час наближення, будують у виді многочлена порядку *т*:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image1.jpeg | (2.1) |

тут *c*0, *c*1,..., *cm* — деякі постійні коефіцієнти.

Такого виду многочлен називають узагальненим многочленом (поліномом), оскільки в ньому не визначені базисні функції {*φi*(*x*)}. На практиці за базисні функції {*φi*(*x*)} часто беруть послідовність степеневих функцій відносно *x*: 1, *x*1, *х*2, …, *xm*, тобто *φ*0(*x*0) = 1, *φ*1(*x*) = *х*, ..., *φm*(*x*) = *xm.*

Тоді маємо звичайний поліном степеня *m*:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image2.jpeg | (2.2) |

Іноді за {*φi*(*x*)} може братися також послідовність показникових функцій:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image6.jpeg | (2.3) |

де {α*i*} — деяка числова послідовність попарно різних дійсних чисел. Тоді

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image7.jpeg | (2.4) |

Що стосується поняття *близькості* (або *малого відхилення*) функції *f(*х) і апроксимуючої функції *φ*(*x*), то воно буде уточнене далі – при розгляді конкретних методів апроксимації.

## Інтерполяція

Одним з основних видів точкової апроксимації є *інтерполяція*. Вона полягає в побудові для заданої функції *y*= *f(*х) такої *інтерполюючої* функції *φ*(*x*) (наприклад многочлена 2.2)*,* яка приймає на заданій системі точок *x*0, *x*1,..., *xn* ті ж значення *yi*, що і функція *f(*х), тобто:

|  |  |
| --- | --- |
| *φ*(*xi*) = *f*(*xj*) = *yi*, *i* = 0, 1, …, *n* | (2.5) |

При цьому передбачається, що серед значень {*xi*} немає однакових. Ці точки {*xi*} називають *вузлами інтерполяції.*

Для побудови інтерполяційного поліному степеня *m*, необхідно визначити (*m*+ 1) його коефіцієнт *сj*, *j* = 0, 1, ..., *m*. Можна використати умову (2.5) *φ*(*xi*) *= f*(*xi*)*, i =* 0, 1, ..., *n* і скласти систему з(*n* + 1) лінійних алгебраїчних рівнянь на множині точок *x*0, *x*1,..., *xn*:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image3.jpeg | (2.6) |

З цієї системи можна визначити (*n* + 1) коефіцієнт *сj*. І таким чином можна побудувати інтерполяційний многочлен степеня *т = n*.

 Ця система рівнянь, якщо в якості базисних функцій {*φi*(*x*)} взяти послідовність степеневих функцій (2.2), буде мати вид:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image4.jpeg | (2.7) |

Визначник цієї системи, який називають визначником Вандермонда,

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Umka\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image5.jpeg | (2.8) |

не перетворюється на нуль, якщо серед сукупності вузлів {*xi*} немає однакових. Оскільки при виборі вузлів інтерполяції ця умова є обов’язковою, матриця системи (2.8) є невиродженою і система має єдиний розв'язок. Розв’язавши систему (2.7) можна побудувати інтерполяційний многочлен. Такий метод побудови інтерполяційного многочлену називається *методом невизначених коефіцієнтів*. Відмітимо разом з тим, що цей метод вимагає значного об'єму обчислень, особливо при великому числі вузлів. Існують простіші алгоритми побудови інтерполяційних многочленів, які будуть розглянуті далі.

## Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Отже, інтерполяція передбачає обчислення невідомих значень функції шляхом набуття зваженого середнього значення функції у відомих сусідніх точках. При лінійній інтерполяції використовується відрізок прямої, яка проходить через дві точки. Тангенс кута нахилу прямої між точками (*x*0; *у*0) і (*x*1; *y*1) рівний *m* = (*у*1 – *y*0)/(*х*1 – *x*0). Формула прямої, що використовує тангенс кута нахилу в точці (*x*0; *у*0) має вид *у* = *m*(*х* – *x*0) + *у*0. Її можна записати у виді:

|  |  |
| --- | --- |
| *у* = *Р*(х) = *у*0 + (*у*1 – *y*0)$\frac{x-x\_{0}}{x\_{1}-x\_{0}}$ | (2.9) |

Якщо розкласти формулу (2.9), то в результаті отримаємо поліном порядку ≤1. Обчислюючи *Р*(*х*) в точках *x*0 і *х*1 отримуємо відповідно точки *у*0 і *у*1:

|  |  |
| --- | --- |
| *Р*(*х*0) = *y*0 + (*y*1 – *y*0)(0) = *у*0,*Р*(*х*1) = *y*0 + (*y*1 – *y*0)(1) = *y*1 | (2.10) |

Французького математика Жозеф Луї Лагранж (Joseph Louis Lagrange) використав для знаходження цього полінома дещо інший метод. Він відмітив, що поліном можна записати у виді:

|  |  |
| --- | --- |
| *у* = *Р*1(х) = *у*0 $\frac{x-x\_{1}}{x\_{0}-x\_{1}}$ + *у*1$\frac{x-x\_{0}}{x\_{1}-x\_{0}}$ | (2.11) |

Кожний член в правій частині (2.11) включає лінійний множник, тому сума є поліномом степеня ≤1. Позначимо відношення в (2.11) відповідно через:

|  |  |
| --- | --- |
| *L*1,0(х) =  $\frac{x-x\_{1}}{x\_{0}-x\_{1}}$ і *L*1,1(х) =  $\frac{x-x\_{0}}{x\_{1}-x\_{0}}$ | (2.12) |

Обчислення показують, що *L*1,0(*х*0) = 1, *L*1,0(*х*1) = 0, *L*1,1(*х*0) = 0, *L*1,1(*х*1) = 1. Таким чином поліном *Р*1(*х*) (2.11) також проходить через ці дві точки:

|  |  |
| --- | --- |
| *Р*1(*х*0) = *у*0(1)+ *у*1(0) і *Р*1(*х*1) = *у*0(0)+ *у*1(1) | (2.13) |

Члени *L*1,0(*х*) і *L*1,1(*х*) називаються *коефіцієнтами полінома Лагранжа*, основаними на вузлах *x*0 і *х*1. Таким чином можна записати (2.11) у виді суми:

|  |  |
| --- | --- |
| $$P\_{1}\left(x\right)=\sum\_{k=0}^{1}y\_{k}L\_{1,k}\left(x\right)$$ | (2.14) |

В загальному випадку можна побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа *Рn*(*х*) степеня не більше ніж *n*, що проходить через *n*+ 1 точку (*x*0; *у*0) і (*x*1; *y*1), …, (*xn*; *уn*) і має вид:

|  |  |
| --- | --- |
| $$P\_{n}\left(x\right)=\sum\_{k=0}^{n}y\_{k}L\_{n,k}\left(x\right)$$ | (2.15) |

де *Ln*,*k – коефіцієнти многочлена Лагранжа*, основані на заданих вузлах:

|  |  |
| --- | --- |
| $$L\_{n,k}=\frac{(x-x\_{0})\cdots (x-x\_{k-1})(x-x\_{k+1})\cdots (x-x\_{n})}{(x\_{k}-x\_{0})\cdots (x\_{k}-x\_{k-1})(x\_{k}-x\_{k+1})\cdots (x\_{k}-x\_{n})}.$$ | (2.16) |

Або ввівши позначення для добутків можна записати:

|  |  |
| --- | --- |
| $$L\_{n,k}=\frac{\prod\_{\begin{array}{c}j=0\\j\ne k\end{array}}^{n}(x-x\_{j})}{\prod\_{\begin{array}{c}j=0\\j\ne k\end{array}}^{n}(x\_{k}-x\_{j})}.$$ | (2.17) |

Зрозуміло, що члени (*x*–*xk*) і (*xk*–*xk*) не з’являються в правій частині виразів для *Ln*,*k.*

Прості обчислення показують, що для кожного фіксованого *k* коефіцієнти полінома Лагранжа *Ln*,*k*(*x*) володіють властивостями:

|  |  |
| --- | --- |
| *Ln*,*k*(*xj*) = 1, коли *j*= *k* і *Ln*,*k*(*xj*) = 0, коли *j*≠ *k*. | (2.18) |

Використаємо пряму підстановку значень в (2.15), щоб довести, що крива *у* = *Рn*(х) проходить через вузли інтерполяції (*xj*; *уj*):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.19) |

Приклад

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Розглянемо фрагмент таблиці функції *y* = sin*x*+ *x*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1,4 | 1,5 | 1,7 | 1,8 |
| *yi* | 2,38545 | 2,49749 | 2,69166 | 2,77385 |

Запишемо многочлен Лагранжа, використовуючи всю наявну інформацію, тобто покладаючи *n*=3. Кубічний інтерполяційний поліном Лагранжа має вид:   .Обчислення можна організувати економічно, якщо записати (2.15) у виді: ,де .Усі обчислення розташуємо в таблиці 2.1.Таблиця 2.1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | ,  | , |  |  |
| 0 |  0,2 | – 0,1 | – 0,3 | – 0,4 | – 0,012 | 2,38545 | – 993,938 |
| 1 |  0,1 |  0,1 | – 0,2 | – 0,3 |  0,006 | 2,49749 |  4162,48 |
| 2 | – 0,1 |  0,3 |  0,2 | – 0,1 | – 0,006 | 2,69166 |  4486,10 |
| 3 | – 0,2 |  0,4 |  0,3 |  0,1 |  0,012 | 2,77385 | – 1155,77 |

 ,*y*(1,6) = 2,59955.Для порівняння наведемо значення функції *y* = sin*x*+ *x* для *x*=1.6 з п’ятьма точними десятковими знаками:*y*(1,6) = 2,59957. |

Задача інтерполяції значно спрощується, якщо значення *xi* є рівновіддаленими, тобто *xi* = *x*0 + *ih*, (*і* = 1, 2,..., *n*), тоді можна ввести позначення



і інтерполяційний поліном буде мати вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Loerin\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image1.jpeg | (2.20) |

У (2.20) коефіцієнти перед знаком суми



не залежать ні від значень функції*f*(*x*)*,* ні від відстані між вузлами інтерполяції*h.* Їх називають коефіцієнтами Лагранжа.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.) |

Приклад

|  |
| --- |
|  |