Класифікація диференціальних рівнянь першого порядку

При розв'язанні диференціальних рівнянь першого порядку найпершим (і принциповим) кроком є визначення типу рівняння. Від цього у великій мірі залежить можливість розв'язання диференціального рівняння. Тому слід запам'ятати основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, які класифіковано у наступній таблиці:

№ п/п	*Вид рівняння*	*Назва диференціального рівняння*
I	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
II	$y' = f(x)\cdot g(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
III	$y' = f(x,\, y)$, де $f(x,\, y)$ – однорідна функція нульового виміру	Однорідне рівняння
IV	$y' = -P(x)y + Q(x)$	Лінійне рівняння
V	$y' = -P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$	Рівняння Бернуллі

Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до виду $y' = f(x,\, y)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Диференціальне рівняння може належати одночасно до кількох типів. Наприклад, рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$ відноситься до усіх типів, крім першого. Але найпростіше його розв'язувати як диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (див. приклад **8**).

Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x), \qquad (13)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(a,\, b)$, називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння (13) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання рівняння (13). Розглянемо один із них – *метод Бернуллі*. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v, \qquad (14)$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (13).

Знаходимо похідну функції y: $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y та y' в рівняння (13), отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u\big(v' + P(x)v\big) = Q(x). \qquad (15)$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0. \qquad (16)$$

Знаходимо v з рівняння (16), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dv}{dx} = -P(x)v$, $\quad \dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$, звідки $\ln|v| = -\int P(x)dx$, або $v = e^{-\int P(x)dx}$. Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v, знаходимо u з рівняння $u'v = Q(x)$, яке випливає з (15) та (16):

$$v\frac{du}{dx} = Q(x), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \qquad u = \int Q(x)e^{\int P(x)}dx + C.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (14) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \qquad (17)$$

При розв'язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (17).

Розв'язати диференціальні рівняння:

32. $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.

⌈ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$ (див. формулу (14)). Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0. \qquad (**)$$

Знаходимо v:

$v' = \dfrac{2v}{x}$, $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2v}{x}$, $\dfrac{dv}{v} = 2\dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{dv}{v} = 2\int\dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = 2\ln|x|$, $\ln|v| = \ln x^2$, звідки $v = x^2$.

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв'язків рівняння ($**$), то тут і надалі у методі Бернуллі, після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v, покладаємо $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$u' \cdot x^2 = 2x^3$, $u' = \dfrac{2x^3}{x^2}$,

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x\,dx, \quad \int du = \int 2x\,dx, \quad u = 2\cdot\frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

За формулою (14) знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2$. ⌋

33. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

⌈ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,$$

$$u'v + u\left(v' + v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos^2 x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Знаходимо v:

$v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$, $\dfrac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x$, $\dfrac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\,x\,dx$, $\int\dfrac{dv}{v} = -\int\mathrm{tg}\,x\,dx$, $\ln|v| = \ln|\cos x|$, звідки $v = \cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$u' \cdot \cos x = \cos^2 x$, $u' = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$, $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $du = \cos x\,dx$, $\int du = \int\cos x\,dx$, звідки $u = \sin x + C$.

За формулою (14) маємо $y = uv = \left(\sin x + C\right)\cos x$. ⌋

34. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$.

⌈ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x}$, $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}$, $\int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = -\ln|x|$, $\ln|v| = \ln\dfrac{1}{|x|}$, звідки $v = \dfrac{1}{x}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$, $u' = \dfrac{\sin 2x}{x} \cdot x$, $\dfrac{du}{dx} = \sin 2x$, $du = \sin 2x\,dx$, $\int du = \int \sin 2x\,dx$, звідки $u = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

За формулою (14) маємо $y = uv = \left(C - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\dfrac{1}{x}$. $\lrcorner$

35. $xy' - y = x^2 \cos x$.

$\ulcorner$ Задане рівняння запишемо як $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x$. Отже, це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x\cos x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x\cos x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \dfrac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v}{x}$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x}$, $\int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = \ln|x|$, звідки $v = x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u'x = x\cos x,\quad u' = x\cos x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x,\quad du = \cos x\,dx,\quad \int du = \int \cos x\,dx,\quad u = \sin x + C.$$

За формулою (14) маємо $y = uv = (\sin x + C)x$. $\lrcorner$

36. $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$.

$\ulcorner$ $y' + \dfrac{5xy}{x^2} = -\dfrac{4}{x^2}$, $y' + \dfrac{5y}{x} = -\dfrac{4}{x^2}$, і, отже, маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' + \frac{5uv}{x} = -\frac{4}{x^2},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{5v}{x}\right) = -\frac{4}{x^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{5v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{5v}{x}$, $\dfrac{dv}{v} = -5\dfrac{dx}{x}$, $\int \dfrac{dv}{v} = -5\int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = -5\ln|x|$, $\ln|v| = \ln\dfrac{1}{|x^5|}$, звідки $v = \dfrac{1}{x^5}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \dfrac{1}{x^5} = -\dfrac{4}{x^2}$, $u' = -\dfrac{4}{x^2} \cdot x^5$, $\dfrac{du}{dx} = -4x^3$,

$$du = -4x^3 dx,\quad \int du = -4\int x^3 dx,\quad u = -4 \cdot \frac{x^4}{4} + C,\quad u = -x^4 + C.$$

Отже, $y = uv = \dfrac{C - x^4}{x^5}$. $\lrcorner$

Далі пропонується розв'язання однотипного завдання з тим, що пропонується в ІДЗ - 27.

Знайти розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку, що задовольняє початкову умову.

37. $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} y = x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y(0) = 2$.

Γ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2+1} uv = x\sqrt{x^2+1},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1} v\right) = x\sqrt{x^2+1}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \dfrac{2xv}{x^2+1} = 0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2xv}{x^2+1}$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2x}{x^2+1} dx$, $\int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{2x}{x^2+1} dx$, $\ln|v| = \ln\left|x^2+1\right|$, $v = x^2+1$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\left(x^2+1\right) = x\sqrt{x^2+1}$,

$u' = x\sqrt{x^2+1} \cdot \dfrac{1}{x^2+1}$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\quad du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$,

$\int du = \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $\quad u = \sqrt{x^2+1} + C$.

Отже, $y = uv = \left(\sqrt{x^2+1} + C\right) \cdot \left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 2$ при $x = 0$. Тоді отримаємо $2 = (1+C) \cdot 1$, $C = 1$. Отже, частинний розв'язок

$y = \left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)\left(x^2+1\right)$, $\quad y = \left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1$,

або $y = \sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + x^2 + 1$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати диференціальні рівняння:

38. $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x$.

39. $\left(x^2+1\right) y' + 4xy = 3$.

40. $y' - y = e^x$.

41. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$.

42. $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, якщо $y(0) = 0$.

43. $\left(1-x^2\right) y' + xy = 1$, якщо $y(0) = 1$.

Відповіді:

38. $y = (C+x)\sin x$.

39. $y = \dfrac{x^3+3x+C}{x^2+1}$.

40. $y = e^x (C+x)$.

41. $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + C\right) \cdot \ln x$.

42. $y = \dfrac{x}{\cos x}$.

43. $y = x + \sqrt{1-x^2}$.

§ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Основні поняття.

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

або

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

якщо воно розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$.

Будемо розглядати тільки такі рівняння вищих порядків, які можна розв'язати відносно $y^{(n)}$. Для рівняння (2) має місце теорема Коші.

Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку). Якщо в диференціальному рівнянні (2) функція $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ і її частинні похідні за аргументами $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ неперервні в деякій області Д, що містить точку $(x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)})$, то рівняння має єдиний розв'язок $y = y(x)$,

що задовольняє початковим умовам

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, \quad ..., \quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \qquad (3)$$

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку полягає в тому, щоб знайти розв'язок $y = y(x$ диференціального рівняння (1) чи (2), який задовольняє початковим умовам (3).

Якщо розглядати рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (4)$$

то початкові умови розв'язку $y = y(x)$ слідуючи:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0 \qquad (5)$$

2. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$.

Загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ шукаємо шляхом послідовного інтегрування

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx + C_1 = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2,$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = 1 - \frac{3}{x^3} + 4\cos 2x$$

Інтегруючи послідовно, маємо:

$$y'' = \int\left(1 - \frac{3}{x^3} + 4\cos 2x\right)dx = \int dx - 3\int x^{-3}dx + 4\int \cos 2xdx = x + \frac{3}{2x^2} +$$

$$+ 2\sin 2x + C_1,$$

$$y' = \int\left(x + \frac{3}{2x^2} + 2\sin 2x + C_1\right)dx = \int xdx + \frac{3}{2}\int x^{-2}dx + 2\int \sin 2xdx +$$

$$+ C_1\int dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \cos 2x + C_1x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \cos 2x + C_1x + C_2\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2dx - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x} - \int \cos 2xdx +$$

$$+ C_1\int xdx + C_2\int dx = \frac{x^2}{6} - \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

загальний розв'язок заданого рівняння

Константи C_1 , C_2 , C_3 знаходяться, якщо задано початкові умови (задача Коші). Для прикладу, $y(0)=8$, $y'(0)=5$, $y''(0)=2$. Тоді з першої рівності для y'' знаходимо C_1, із другої рівності для y' знаходимо C_2. Із останньої рівності для функції y знаходимо C_3.

Вищенаведені міркування мають бути використанні в процесі розв'язування завдань ІДЗ-28.