Практичне заняття 1.

Основи математичного моделювання складових ГВК. Ч.1

Мета: стисле ознайомлення з теорією кватерніонів як основою математичного моделювання складових гнучких виробничих комірок (ГВК).

1.1. Короткі теоретичні відомості

1.1.1. Короткі теоретичні відомості про теорію кватерніонів як математичну основу складання математичних моделей (ММ) складових ГВК

Кватерніон – це впорядкована четвірка дійсних чисел s, a, b, c, які зв'язані з чотирма базисними елементами $1, i, j, k$ (рис. 1.1), що мають такі властивості:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;\; i\cdot j = k;\; j\cdot k = i;\; k\cdot i = j;\; j\cdot i = -k;\; k\cdot j = -i;\; i\cdot k = -j. \tag{1.1}$$

Операції додавання і віднімання кватерніонів визначені покомпонентно. Множення кватерніонів визначається законом множення їх уявних одиниць. Будь який кватерніон може бути записаний у вигляді:

$$q = s\cdot 1 + a\cdot i + b\cdot j + c\cdot k\,, \tag{1.2}$$

де i, j, k – уявні одиниці.

Кожен кватерніон q можна записати у вигляді суми двох кватерніонів: скаляра (s) і вектора ($a\cdot i+b\cdot j+c\cdot k$), тобто:

$$q = s(q) + v(q) = \left[scalar;(vector)\right], \tag{1.3}$$

де $s(q) = s$ – скалярна частина кватерніона q; $v(q) = a\cdot i+b\cdot j+c\cdot k$ – векторна частина кватерніона q.

Наприклад, у кватерніоні $q=3-5\cdot i+4\cdot k$ скалярна частина дорівнює 3, а векторна частина дорівнює $-5\cdot i+4\cdot k$.

Іноді кватерніон зручно представляти набором чотирьох чисел: як число та 3D-вектор, тобто як гіперкомплексне число з трьома уявними одиницями i, j, k, що може бути записано у вигляді:

$$\begin{aligned} q &= [s,a,b,c] = \left[scalar,(vector)\right] = \left[s,(a,b,c)\right] = \\ &= s\cdot 1 + a\cdot i + b\cdot j + c\cdot k = s + v. \end{aligned} \tag{1.4}$$

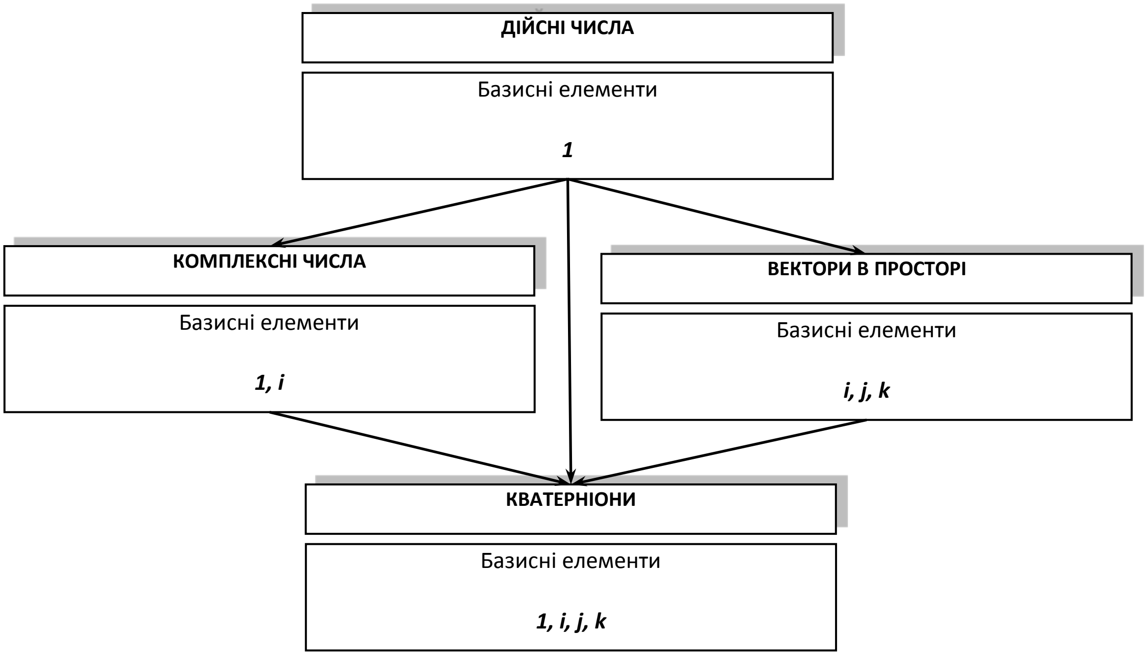


Рис. 1.1. Числові системи та базисні елементи

Іноді достатньо обмежитись лише окремим видом кватерніонів – вектором. Кватерніон (1.2) приймає вид вектора у випадку рівності нулю його скалярної частини:

$$q(vector) = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k; scalar = 0. \qquad (1.5)$$

Геометричний зміст операцій з кватерніонами виду (3.5) відповідає геометричному змісту операцій з векторами. Причому, довжина вектора $v = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k$ кватерніона q в тривимірному просторі визначається за формулою (1.6). Цей вектор іде з початку координат O в точку M з координатами a, b, c (рис. 1.3). Тому:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,, \qquad (1.6)$$

де v – векторна частина кватерніону (1.4), a, b, c – координати точки M, що задає напрямок вектору (рис. 1.2).

При описанні поворотів кватерніон представляють у вигляді:

$$q(v, \omega) = \cos\frac{\omega}{2} + v \cdot \sin\frac{\omega}{2}, \qquad (1.7)$$

де v – одиничний вектор, однонаправлений із віссю повороту;

ω – кут повороту.

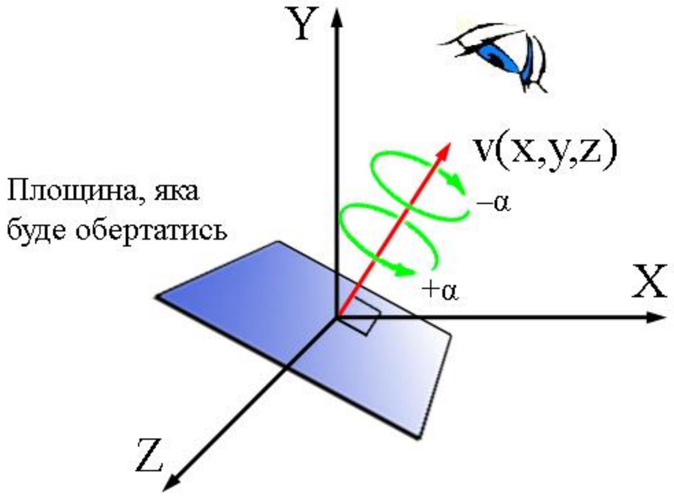


Рис. 1.2. Представлення кватерніону у вигляді вектора v і кута обертання α

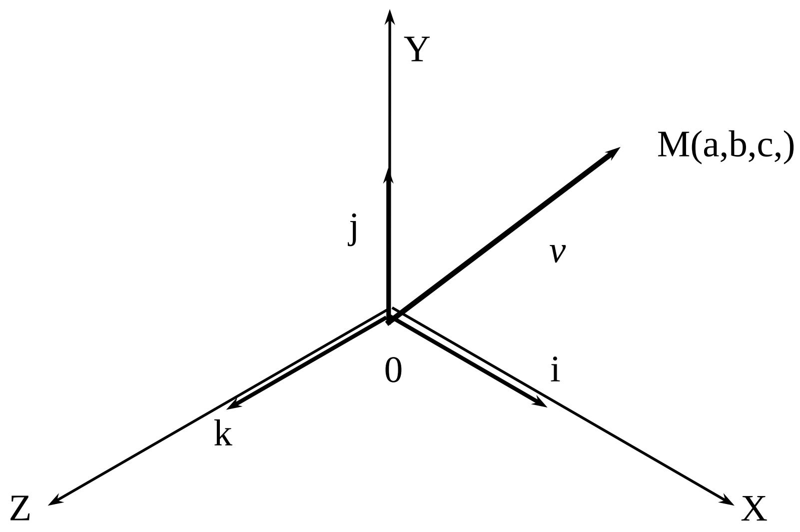


Рис. 1.3. Приклад розташування вектора v в тривимірному просторі

Кватерніон несе в собі інформацію про оберт на заданий кут навколо вектора, початок якого збігається з початком поточної системи координат (рис. 1.2). Якщо значення кута позитивне (+α), то оберт відбувається проти годинникової стрілки (якщо дивитись в напрямку, протилежному напрямку заданого вектора), в противному випадку (–α) – за годинниковою стрілкою.

Важлива особливість кватерніонів полягає в тому, що підмножиною кватерніонів є дійсні числа (*s*, 0, 0, 0); комплексні числа (*s*, *a*, 0, 0); вектори в тривимірному просторі (0, *a*, *b*, *c*) (рис. 1.3), а при виконанні дій множення кватерніонів не виконується закон комутативності, тобто $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$.

Крім того три уявні базисні одиниці *i, j, k* кватерніона можуть бути інтерпретовані як базисні вектори декартової системи координат у тривимірному просторі.

Важливими для розглядуваної проблеми є такі властивості кватерніонів як комутативність та асоціативність за додаванням, комутативність за множенням, асоціативність за множенням та дистрибутивність:

1) кватерніони комутативні та асоціативні за додаванням:

$$q_1 + q_2 = q_2 + q_1;$$
$$(q_1 + q_2) + q_3 = q_2 + (q_1 + q_3);$$

2)кватерніони не комутативні за множенням:

$$q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1;$$

3) кватерніони асоціативні за множенням:

$$(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 \neq q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3);$$

4) кватерніони дистрибутивні:

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3.$$

Сферична лінійна інтерполяція здійснюється за виразом:

$$SLI(Q_1, Q_2, t) = (Q_1 \cdot \sin((1-t) \cdot \omega) + Q_2 \cdot \frac{\sin(t \cdot \omega)}{\sin(\omega)}), \qquad (1.8)$$

де Q_1, Q_2 – вектори, що належать 4-D сфері, що перетинається площиною P, утвореною даними векторами та центром кола, $P \in (Q_1, Q_2, O)$ (рис. 1.4,а). Очевидно, що шукані при інтерполяції точки будуть належати даній площині; ω – кут між векторами Q_1 та Q_2; t – локальний час.

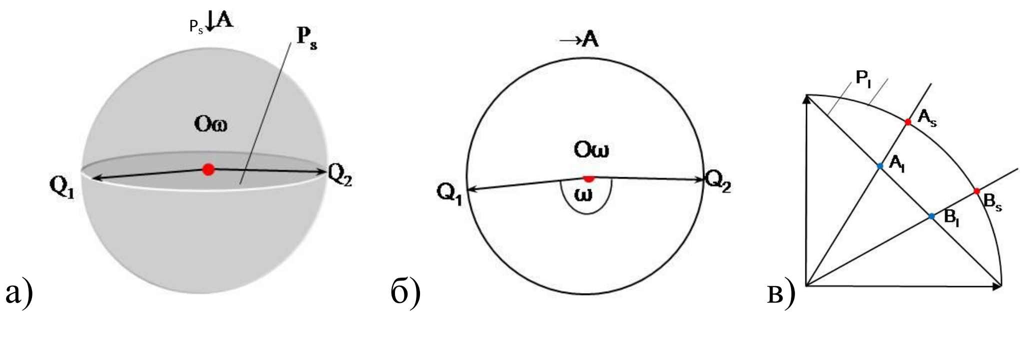


Рис. 1.4. Спрощена схема сферичної лінійної інтерполяції:
а) неспівпадіння точок при лінійній (LI) та сферичній лінійній інтерполяції (SLI);
б) 4-D сфера та площина, утворена векторами Q_1 та Q_2 і центром кола;
в) вид A на рис. 1.4 б

1.2. Особливості складання інформаційних моделей елементів ГВК

Подання інформації про структурні складові ГВК у виді відповідних інформаційних моделей (ІМ) характеризується реалізацією методично обумовлених кроків в такій *послідовності*:

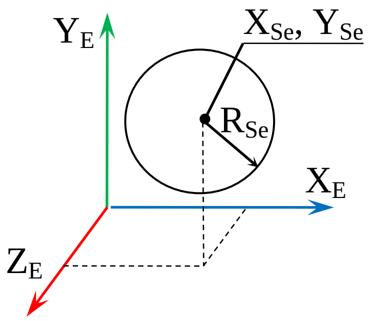
- аналіз конструкції складової;
- складання її так званої схеми заміщення (СЗ, тобто складання ниткової моделі складової);
- заміна рухомих та / або нерухомих елементів СЗ складової її 3D-еквівалентами з використанням геометричних примітивів (ГП);
- складання ІМ складової як такої з урахуванням її можливої рухомості або нерухомості.

При складанні ІМ складових ГВК враховується той факт, що форма кожного із структурних елементів ГВК може бути описана з використанням кінцевої множини елементарних геометричних примітивів (ГП, Gp – сфера SE, циліндр CR, конус CE, паралелепіпед PD, трапеція TZ) та їх комбінацій.

Точка відліку при описі кожного з ГП формально описується так званою прив'язочною точкою з відповідними їй координатами при їх (ГП) подальшому (можливому) упорядкованому описі:

$$X_{Gp}, Y_{Gp}, Z_{Gp} \mid Gp \in (Pd,\ Cr,\ Se,\ Ce,\ Tz), \qquad (1.9)$$

Нижче представлені приклади описів геометричних примітивів.



Опис ГП типу "сфера

Se: X_{Se}, Y_{Se}, Z_{Se}, R_S

Рис. 1.5. Базове розташування ГП типу "сфера" в СК елемента ГВК

Тут:

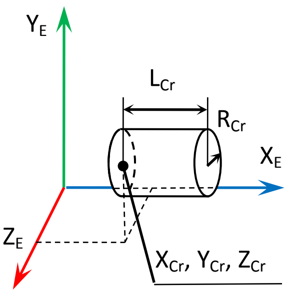
ентифікатор примітиву Se (sphere) – "сфера";

X_{Se} – розташування сфери вздовж осі X в СК елемента E, мм;

Y_{Se} – розташування сфери вздовж осі Y в СК елемента E, мм;

Z_{Se} – розташування сфери вздовж осі Z в СК елемента E, мм;

R_{Se} – радіус сфери, мм.



Опис ГП типу “циліндр”:

Cr: X_{Cr}, Y_{Cr}, Z_{Cr}, R_{Cr}, L_{Cr}

Рис. 1.6. Базове розташування ГП типу “циліндр” в СК елемента ГВК

Тут:

Cr – ідентифікатор примітиву Cr (cylinder) – “циліндр”;

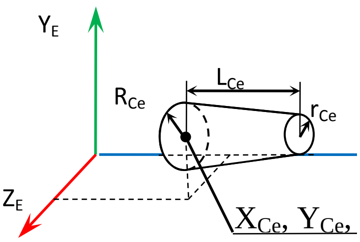
X_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі X в СК елемента E, мм;

Y_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі Y в СК елемента E, мм;

Z_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі Z в СК елемента E, мм;

R_{Cr} – радіус циліндра, мм;

L_{Cr} – довжина циліндра, мм.



Опис ГП типу “конус”:

Ce: X_{Ce}, Y_{Ce}, Z_{Ce}, R_{Ce}, r_{Ce}, L_{Ce}

Рис. 1.7. Базове розташування ГП типу “конус” в СК елемента ГВК

Тут:

Ce – ідентифікатор примітиву Ce (cone) – “конус”;

X_{Ce} – розташування конуса вздовж осі X в СК елемента E, мм;

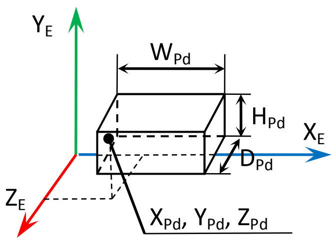
Y_{Ce} – розташування конуса вздовж осі Y в СК елемента E, мм;

Z_{Ce} – розташування конуса вздовж осі Z в СК елемента E, мм;

R_{Ce} – лівий радіус конуса, мм;

r_{Ce} – правий радіус конуса, мм;

L_{Ce} – довжина конуса, мм.



Опис ГП типу “паралелепіпед”:

Pd: X_{Pd}, Y_{Pd}, Z_{Pd}, W_{Pd}, H_{Pd}, D_{Pd}

Рис. 1.8. Базове розташування ГП типу “паралелепіпед” в СК елемента ГВК

Тут:

Pd – ідентифікатор примітиву Pd (parallelepiped) – “паралелепіпед”;

X_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі X в СК елемента E, мм;

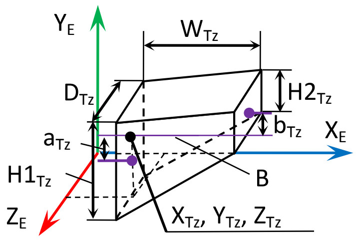
Y_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі Y в СК елемента E, мм;

Z_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі Z в СК елемента E, мм;

W_{Pd} – ширина паралелепіпеда, мм;

H_{Pd} – висота паралелепіпеда, мм;

D_{Pd} – глибина паралелепіпеда, мм.



Опис ГП типу “трапеція”:

TZ: X_{Tz}, Y_{Tz}, Z_{Tz}, D_{Tz}, W_{Tz}, $H1_{Tz}$, $H2_{Tz}$, a_{Tz}, b_{Tz}

Рис. 1.9. Базове розташування ГП типу “трапеція” в СК елемента ГВК

Тут:

Tz – ідентифікатор примітиву Tz (Trapeze) – “трапеція”;

X_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі X в СК елемента E, мм;

Y_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі Y в СК елемента E, мм;

Z_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі Z в СК елемента E, мм;

D_{Tz} – глибина трапеції, мм;

W_{Tz} – ширина трапеції, мм;

$H1_{Tz}$ – ліва висота трапеції, мм;

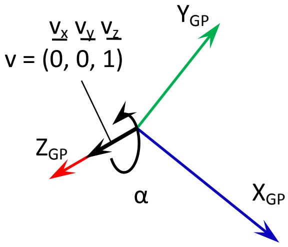
$H2_{Tz}$ – права висота трапеції, мм;

a_{Tz} –відстань між базовою віссю B та центром грані із висотою H1, мм;

b_{Tz} – відстань між базовою віссю B та центром грані із висотою H2, мм.

При потребі змінити орієнтацію ГП вказується кватерніон його орієнтації, що описується за рахунок 4-ох додаткових параметрів:

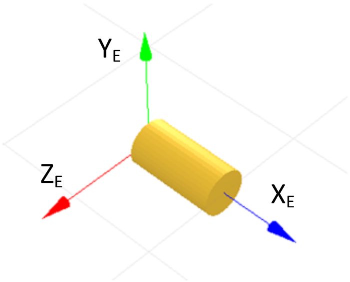
$$Q = [\, S_Q, X_Q, Y_Q, Z_Q \,]. \tag{1.10}$$



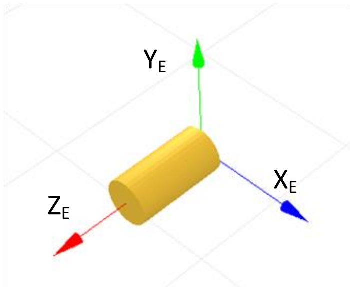
$$Q = (s, v) = (s, v_x, v_y, v_z) =$$

$$= \left(\cos\frac{\alpha}{2},\ v_x \cdot \sin\frac{\alpha}{2},\ v_y \cdot \sin\frac{\alpha}{2},\ v_z \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \right)$$

Приклад ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” з осьовим розміром 200 мм до і після його орієнтації (обертання навколо осі Y на 90° за годинниковою стрілкою при погляді на вісь Y згори) представлено на рис. 1.9.



CR: 0, 0, 0, 50, 200
а)



CR: 0, 0, 0, 50, 200 , 0.7, 0, 0.7, 0
б)

Рис. 1.9. Приклад опису та відповідної 3D-моделі ГП типу “циліндр”:
а) початкове положення (без кватерніона орієнтації);
б) кінцеве положення (із кватерніоном орієнтації)